On the types for supercuspidal representations of inner forms of GL_N

東京大学大学院数理科学研究科　山本　祐輝
Yuki Yamamoto
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

F を非アルキメデス的局所体，A を F 上の (有限次元) 中心的単純環とし，G を A の乗法群とする．このとき，適当な自然数 m と F 上の中心的斜体 D があって，$A \cong \mathrm{M}_m(D)$，$G \cong \mathrm{GL}_m(D)$ となる．本稿では G の既約スムーズ表現達をある意味で分類する概念である type について説明し，とくに supercuspidal 表現の type に関して，その存在と一意性について議論する．以後，本稿では「表現」を「複素数体 $\mathbb{C}$ 上のスムーズ表現」の意味で述べる．

1　ベルンシュタイン分解と type

まず，G の type について説明するために，一般の連結簡約群 G' の表現の圏 $\mathrm{Rep}(G')$ のベルンシュタイン分解を説明する．

G' の既約表現の同型類の集合 $\mathrm{Irr}(G')$ には，「inertial support が等しい」という同値関係 $\sim$ を入れることができる．この同値関係は大雑把に言うと，表現が G' のどの Levi 部分群の，またどの supercuspidal 表現から誘導されるかということにより定まる．Is を標準的な全射 $\mathrm{Is} : \mathrm{Irr}(G') \to \mathrm{Irr}(G')/\sim$ とし，また $\sim$ による商集合 $\mathrm{Irr}(G')/\sim$ を $\mathscr{B}(G')$ とおく．

例 1.1. π を G の supercuspidal 表現とする．このとき，$\pi' \in \mathrm{Irr}(G)$ に対し，$\pi' \sim \pi$ であることは，ある $F^\times$ の不分岐指標 χ に対して $\pi' \cong \pi \otimes (\chi \circ \mathrm{Nrd}_{A/F})$ となることと同値である．ここで $\mathrm{Nrd}_{A/F}$ は A の F 上の被約ノルムである．したがって，π と同値な表現もまた supercuspidal であり，$\sim$ は G の supercuspidal 表現の同型類全体 $\mathrm{Irr}_{sc}(G)$ 上の同値関係を誘導する．

G の supercuspidal 表現 π に対して，$[G, \pi]_G = \mathrm{Is}(\pi)$ とおく．

各 $\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G')$ に対し，$\mathrm{Rep}(G')$ の充満部分圏 $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G')$ を次のように定めることができる：G' の表現 π が $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G')$ の対象であるのは，π の任意の既約部分商が $\mathfrak{s}$ の元であるとき．このとき，圏 $\mathrm{Rep}(G')$ の直積分解

$$\mathrm{Rep}(G') = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G')} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G')$$

が成立する．すなわち，G' の表現は $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G')$ の対象たちの直和に分かれる．さらに，各 $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}(G')$ はこれ以上小さい部分圏たちの直積として表すことができない．したがって $\mathscr{B}(G')$ は G' の表現達をある意味で分類するものとなっている．この圏の分解を，$\mathrm{Rep}(G')$ のベルンシュタイン分解という．

以上をもとに，G' の表現の type を次のように定義する．

定義 1.2. $\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G')$ とする．G のコンパクト部分群 J および J の既約表現 λ の組 (J, λ) が $\mathfrak{s}$-type であると

は次を満たすこと：$\pi \in \mathrm{Irr}(G')$ に対し，$\pi \in \mathfrak{s}$ であることは $\lambda \subset \pi|_J$ であることと同値となる．

すなわち type とは，G' の適当なコンパクト部分群へ表現を制限したときの部分表現を見ることによって，表現が $\mathscr{B}(G)$ のある元に含まれているか調べることのできるものである．

注．$\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G')$，$(J,\lambda)$ を $\mathfrak{s}$-type とし，また $\pi \in \mathfrak{s}$ とする．このとき (J,λ) が $\mathfrak{s}$-type であることから $\mathrm{Hom}_J(\lambda,\pi) \neq 0$ が従う．フロベニウス相互律により，これは $\mathrm{Hom}_{G'}(\text{c-Ind}_J^G \lambda, \pi) \neq 0$ を意味する．このことから，π は λ の G' へのコンパクト誘導表現の商として記述できることがわかる．ゆえに type は表現の分類だけでなく，G' の既約表現を構成する場合においても用いられる．ただし $\text{c-Ind}_J^{G'} \lambda$ は「大きく」なりがちであるから，実用上は J および G' の中心を含み，かつ G' の中心を剰余としてコンパクトである群 $\tilde{J}$ へ表現 λ を拡張してからコンパクト誘導することが多い．

基本的な問いとして，与えられた簡約群 G' および $\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G')$ に対し $\mathfrak{s}$-type が存在するか，というものが考えられる．type の存在に関しては次のような結果がある．

まず，G' が一般線形群 $\mathrm{GL}_N(F)$ の場合は，Bushnell–Kutzko[1] により任意の $\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G')$ に対して $\mathfrak{s}$-type が構成されている．$\mathrm{GL}_N(F)$ 以外のいくつかの群でも，Bushnell–Kutzko の手法をもとにした type の構成法が得られている．例えば，今回考察する対象である $G = \mathrm{GL}_m(D)$ においては，Sécherre–Stevens[6] により構成法が得られた．Bushnell–Kutzko の手法をもとにして得られる一連の type を G' の (semi)simple type とよぶ．一方，F の馴分岐拡大上で分解する一般の簡約群 G' について，supercuspidal 表現の type を構成する方法が Yu[7] により得られている．Yu の手法は一般には任意の supercuspidal 表現の type を得られるとは限らないが，F の剰余標数に制限をつけると任意の supercuspidal 表現の type を構成できるということが知られている．

2 $\mathrm{GL}_m(D)$ の simple type

ここで，主定理の主張を述べるために必要であるため，$G = \mathrm{GL}_m(D)$ の supercuspidal 表現の simple type についていくつか述べる．

まず，supercuspidal 表現の simple type は，hereditary order と呼ばれる A の部分環 $\mathfrak{A}$，整数 n，A の元 β の組である simple stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ の情報を用いて構成される．ここで，simple stratum の中に現れる対象は以下の通りである．

- $\mathfrak{A}$ は A の hereditary order である．$A = \mathrm{M}_m(D)$ の hereditary order には例えば次のようなものがある：$m = rs$ となるような正整数 r, s を考える．このとき，
$$\mathfrak{A}_{0,s} = \begin{pmatrix} \mathrm{M}_r(\mathfrak{o}_D) & \mathrm{M}_r(\mathfrak{o}_D) & \cdots & \mathrm{M}_r(\mathfrak{o}_D) \\ \mathrm{M}_r(\mathfrak{p}_D) & \mathrm{M}_r(\mathfrak{o}_D) & \cdots & \mathrm{M}_r(\mathfrak{o}_D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{M}_r(\mathfrak{p}_D) & \mathrm{M}_r(\mathfrak{p}_D) & \cdots & \mathrm{M}_r(\mathfrak{o}_D) \end{pmatrix}$$
という形の環は A の hereditary order である．またこの形の環を $g \in G$ による共役でうつしたものもまた A の hereditary order である．
- 一般の hereditary order は上に述べた以外のものもあるが，supercuspidal 表現の simple type に付随する simple stratum に現れるものは上に述べたもののみである．
- β は A の元であって，$E = F[\beta]$ が体となるようなものである．さらに $E^\times \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{A}) = \{g \in G \mid g\mathfrak{A}g^{-1} = \mathfrak{A}\}$ 等の条件を満たす．
- 整数 n は $\mathfrak{A}$ および β から定まる．すなわち，simple type は $\mathfrak{A}$ および β の情報を用いて構成される．

「simple stratum の情報を用いて構成される」とは，正確には次のような意味である：simple stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ が定まると，$\mathfrak{A}^\times$ のコンパクト開部分群 $J(\beta, \mathfrak{A})$ および，$J(\beta, \mathfrak{A})$ 上の既約表現有限個からなる集合を得る．この集合から既約表現 λ を 1 つ選ぶことにより，simple type $(J(\beta, \mathfrak{A}), \lambda)$ を得る．

このように構成される simple type について，以下の定理は重要である．

定理 2.1 ([6, Théoreme 5.21])**.**
π を supercuspidal 表現とする．このとき，(J, λ) を $[G, \pi]_G$-type であるような simple type が存在する．このとき，J および G の中心を含み，かつ G の中心を剰余としてコンパクトな部分群 $\tilde{J}$ と，λ の $\tilde{J}$ への拡張 Λ であって，$\pi \cong \text{c-Ind}_{\tilde{J}}^G \lambda$ となるものが存在する．

なお上の定理における $\tilde{J}$ について，次のことが知られている．

- $\tilde{J}$ は $\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ の部分群である．
- J は $\tilde{J}$ の唯一の極大コンパクト部分群である．

3　type の存在と一意性

$G = \mathrm{GL}_m(D)$ の supercuspidal 表現には simple type が存在することを見た．ところで simple type が定義される G の部分群は π によって変化する．そこで次のような問題を考える：G のコンパクト部分群 K を一つ固定する．このとき，K 上の既約表現 ρ であって (K, ρ) が G の supercuspidal 表現の type になるようなものは存在するか？また存在する場合，それは（適当な意味で）一意的であるか？なお，以後に述べる経緯を踏まえ，以下では K を G の極大コンパクト部分群として固定するものとする．

この問題が考えられるようになる最初の動機付けは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ における Breuil–Mézard 予想の定式化 [2] である．この予想は F の剰余標数と同じ有限体上の Galois 表現の変形環の情報を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現から得ようとするものである．その定式化において，G の極大コンパクト部分群 K を $K = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ として固定し，K 上の既約表現 ρ であって (K, ρ) が G の適当な表現の type になるようなものを考察することとなる．その中で，G および K が上のようなとき，ほとんど全ての $\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G)$ において $\mathfrak{s}$-type (K, ρ) が同型を除き一意的に存在することが Henniart[2] により示された．特に π が supercuspidal 表現であるときは同型を除き一意的に存在する．

この Henniart の結果の部分的な一般化が Paškūnas[5] により得られている．Paškūnas は，G を一般線形群 $\mathrm{GL}_N(F)$ とし，また K を G の極大コンパクト部分群，π を G の supercuspidal 表現としたとき，K の既約表現 ρ であって (K, ρ) が $[G, \pi]_G$-type になるような ρ がやはり同型を除き一意的であることを示した．

以上のことから，より一般の簡約群 G' およびその極大コンパクト部分群 K，そして G' の supercuspidal 表現 π への拡張ができないかという疑問が自然に現れる．すなわち，(K, ρ) が $[G', \pi]_{G'}$-type になるような K の既約表現 ρ が同型を除き一意的に存在するのではないかという予想ができる．しかしながら，この予想は一般には成立しない．

例えば，G', K, π を上段落の通りとして，さらに (K, ρ) を $[G', \pi]_{G'}$-type とする．ここで g を K の G' における正規化群 $N_G(K)$ の元としてとる．このとき，ρ を g でひねった K-表現 $\rho' = {}^g\rho$ を考えると (K, ρ') もまた $[G', \pi]_{G'}$-type となることがわかる．したがって，ρ' が ρ と同型でない場合，K 上の type は同型を除き一意的でない．すなわち，K 上の type の存在が仮に言えたとしても，K 上の type の同型を除いた一意性は従わないということになる．そしてそのような例は，我々の考えたい群である $G = \mathrm{GL}_m(D)$ でも起こりえる．

例 3.1. 最も簡単な場合として，G が F 上の四元数環 D の乗法群である場合，すなわち $G = \mathrm{GL}_1(D) = D^\times$ の場合を考える．このとき $K = \mathfrak{o}_D^\times$ は G の唯一の極大コンパクト部分群である．また G は中心を剰余

としてコンパクトであるから，任意の G-既約表現は有限次元であり，かつ supercuspidal となる．ここで $k_D^\times = \mathfrak{o}_D^\times/(1+\mathfrak{p}_D)$ 上の character σ を，$\mathrm{N}_{k_D/k_F} : k_D^\times \to k_F^\times$ を経由しないようなものとして一つ取り，それを K の character として持ち上げたものを λ とする．そして λ を $Z(G)K = F^\times K$ 上の表現に拡大したものを一つとって Λ とおき，$\pi = \text{c-Ind}_{F^\times K}^G \Lambda$ とおく．このとき π は G の既約表現であることが次のようにしてわかる：Mackey 分解により，$\mathrm{Res}_{F^\times K}^G \text{c-Ind}_{F^\times K}^G \Lambda = \Lambda \oplus {}^{\varpi_D}\Lambda$ である．ここで ϖ_D は D の素元である．表現 λ は $\mathrm{N}_{k_D/k_F} : k_D^\times \to k_F^\times$ を経由しないものとして取っていたことから，Λ と ${}^{\varpi_D}\Lambda$ は K 表現として同型でない．したがって，フロベニウス相互律から

$$\mathrm{Hom}_G(\pi,\pi) \cong \mathrm{Hom}_{F^\times K}(\Lambda \oplus {}^{\varpi_D}\Lambda, \Lambda) \cong \mathbb{C}$$

となり，π の既約性が従う．

一方，(K,λ) が $[G,\pi]_G$-type であることも次のようにしてわかる：π' を G の既約 supercuspidal 表現とし，$\lambda \subset \pi'|_K$ とする．表現 π および π' はともに有限次元表現であるから，$V_0 = \mathrm{Hom}_K(\pi,\pi')$ は 0 でない有限次元ベクトル空間である．この空間には，$f \in V_0$ および $g \in G$ に対して $g \cdot f = \pi'(g) \circ f \circ \pi(g^{-1})$ により G の作用が入っている．ここで K の作用は自明であり，かつ $G/K \cong \mathbb{Z}$ が可換であることから，V_0 の 0 でない元 f および G/K の character χ であって，任意の $g \in G$ に対し $g \cdot f = \chi(g)f$ となるものが存在する．したがって

$$\pi'(g) \circ f = f \circ (\chi(g)\pi(g)) = f \circ (\chi \otimes \pi)(g)$$

となり，$\pi' \cong \chi \otimes \pi$ が従う．χ は K 上自明であることから不分岐であり，ゆえに $\pi' \in [G,\pi]_G$ が従う．

以上のことから，(K,λ) が $[G,\pi]_G$-type であることが分かった．一方，π の既約性を示すにあたって，Λ と ${}^{\varpi_D}\Lambda$ が K 表現として同型でないことも示されている．これはすなわち，λ と ${}^{\varpi_D}\lambda$ が同型でないことを表している．したがって，(K,λ) と $(K,{}^{\varpi_D}\lambda)$ は（同型類として）相異なる $[G,\pi]_G$-type である．

なお，G が $\mathrm{GL}_N(F)$ の場合に同型類での一意性という強い主張が従ったのは，K の正規化群 $N_G(K)$ について $N_G(K) = F^\times K$ が言えることが関係すると考えられる．K の表現を K の元または G の中心の元で捻っても同型の表現しか得られず，結局同型類のみを考えればよいということになるためである．

以上の考察を踏まえると，type の一意性を考察するにあたっては，表現の同型類における一意性よりもむしろ表現の G' 共役類における一意性を見るのがより自然だということがわかる．これを受けて，archetype というものを次のように定義する．

定義 3.2. $\mathfrak{s} \in \mathscr{B}(G')$ とする．極大コンパクト部分群上定義された $\mathfrak{s}$-type 全体の集合に G' 共役による作用を入れたとき，その軌道を $\mathfrak{s}$-archetype とよぶ．

archetype の一意性についての結果をいくつか述べる．例えば G' が特殊線形群 $\mathrm{SL}_N(F)$ であり，かつ supercuspidal 表現 π を essentially tame としたとき，$[G',\pi]_{G'}$-archetype は一意的であることが Latham[3] により示されている．また，一般の群 G' については，π が深度 0 の supercuspidal 表現である場合に $[G',\pi]_{G'}$-archetype がやはり一意的であるということが同じく Latham[4] により示された．

4　主定理とその証明の概略

前節に述べた結果を踏まえた上で，筆者は次の定理を示した．

定理 4.1 ([8, Theorem 6.1])**.** $G = \mathrm{GL}_m(D)$ とし，また π を G の supercuspidal 表現とする．さらに，$[G,\pi]_G$ に対する simple type (J,λ) に付随する simple stratum $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ について，次を仮定する：$E = F[\beta]$ が F 上の不分岐拡大体である．このとき，$[G,\pi]$-archetype は一意的に存在する．

注．$E=F[\beta]$ が不分岐であるという仮定を外した場合，定理の主張は成立しない．例えば E/F が馴分岐的である場合でさえ，type の一意性が成立しないような表現が構成されている．この意味で，定理における仮定は本質的なものである．

以下，定理の証明について簡単に述べる．

今回 G の極大コンパクト部分群達は互いに共役であるから，$K=\mathrm{GL}_m(\mathfrak{o}_D)$ として，K 上定義される type が $N_G(K)$ 共役を除いて一意的であることを示せば十分である．ここで $N_G(K)$ は K の G 内での正規化群である．ゆえに以降 K を上のように固定して考えてよい．さらに simple stratum の $g\in G$ による共役をとっても再び simple stratum であり，その stratum から得られる simple type として元の simple type の g による共役が取れるため，$\mathfrak{A}\subset \mathrm{M}_m(\mathfrak{o}_D)$ としてよい．このとき $J\subset\mathfrak{A}^\times\subset K$ となる．

さて，π が supercuspidal であることから，(J,λ) の拡張 $(\tilde{J},\Lambda)$ であって，$\pi\cong \text{c-Ind}_{\tilde{J}}^{G}\Lambda$ となるものが存在する．G の開部分群からのコンパクト誘導により得られる表現を G の別の開部分群に制限するとき，その表現は Mackey 分解により具体的な表示を持つのであった．この表示をもとに π の K-部分表現を調べていくことが証明の方針である．しかし $\tilde{J}$ は表現によって大きく変わりうるため，より統一的に扱うために

$$\mathrm{Res}_K^G \,\text{c-Ind}_{\tilde{J}}^G \Lambda = \mathrm{Res}_K^G \,\text{c-Ind}_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}^G \left(\text{c-Ind}_{\tilde{J}}^{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})} \Lambda\right)$$

と変形し，$Res_K^G\,\text{c-Ind}_{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}^G$ に対して Mackey 分解を用いる．ここで，$\tilde{J}\subset\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ であることを用いた．この変形により，

$$\mathrm{Res}_K^G\,\pi = \bigoplus_{g\in K\backslash G/\mathfrak{K}(\mathfrak{A})} \left(\text{c-Ind}_{K\cap {}^g\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}^K \mathrm{Res}_{K\cap {}^g\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}^{{}^g\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}\, {}^g\tilde{\rho}\right)$$

となる．ここで $\tilde{\rho}=\text{c-Ind}_{\tilde{J}}^{\mathfrak{K}(\mathfrak{A})}\Lambda$ である．上式右辺の各直和因子を $(*)_g$ と書くことにすると，定理を得るためには次の 2 つを言えれば十分である：

1. g が自明な両側剰余類に入っているとき，$(*)_g$ の各既約部分表現が $[G,\pi]_G$-type であり，さらに各々が互いに $N_G(K)$ 共役である．
2. g が非自明な両側剰余類に入っているとき，$(*)_g$ の各既約部分表現は type になりえない．

(1) について，g が自明な両側剰余類に入っている場合に $(*)_g$ をさらに変形すると

$$(*)_g = \bigoplus_{h\in\mathfrak{A}^\times\backslash\mathfrak{K}(\mathfrak{A})/\tilde{J}} \text{c-Ind}_{\mathfrak{A}^\times}^K\, {}^h\rho$$

となる．ここで $\rho=\mathrm{Ind}_J^{\mathfrak{A}^\times}\lambda$ である．simple type の intertwining を見ることで $\text{c-Ind}_{\mathfrak{A}^\times}^K\,{}^h\rho$ 達は既約かつ互いに $N_G(K)$ 共役であることが分かり，また既約であることからこれらが $[G,\pi]_G$-type になっていることも従う．なお，ここまでの議論において E/F が不分岐であることは使われていない．

(2) を見るために，$(*)_g$ の K-部分既約表現 τ をとる．このとき，$u\in\mathfrak{K}(\mathfrak{A})$ であって，${}^{g^{-1}}\tau$ および $\lambda'={}^u\lambda$ が共通の $J\cap{}^{g^{-1}}K$-既約部分表現 ξ をもつようなものが取れる．(2) の証明は，この λ' と「似て非なる」J-既約表現 λ'' を取ることにより行なう．具体的には，$J\cap{}^{g^{-1}}K$-部分表現として ξ をもつという点は共通で，しかし J-表現としては π に含まれないような λ'' を考える．このような λ'' が取れれば，τ が $[G,\pi]_G$ の元でない既約表現 π' の K-部分表現として現れることとなり，$[G,\pi]_G$-type になりえないことがわかる．

この λ'' をとるためには，$J\cap{}^{g^{-1}}K$ が J に比べて「十分小さい」必要があるが，E/F が不分岐である場合は「十分小さい」ことがわかり，証明が完結する．

参考文献

[1] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, The admissible dual of $\mathrm{GL}(N)$ via compact open subgroups, *Annals of Mathematics Studies* 129 (Princeton University Press, 1993).

[2] C. Breuil and A. Mézard, Multiplicités modulaires et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ en $l = p$, *Duke Math. J*, **115** (2002), no. 2, 205-310, With an appendix by Guy Henniart.

[3] P. Latham, *Unicity of types for supercuspidal representations of p-adic* SL_2, *J. Number Theory* **162** (2016), 376-390.

[4] P. Latham, The unicity of types for depth zero supercuspidal representations, *Represent. Theory* **21** (2017), 590-610.

[5] V. Paškūnas, Unicity of types for supercuspidal representations of GL_N, *Proc. London Math. Soc.* (3), **91** (2005), 623-654.

[6] V. Sécherre and S. Stevens, Représentations lisses de $\mathrm{GL}(m, D)$. IV. Représentations supercuspidales, *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), no. 3, 527-574.

[7] J.-K. Yu, Construction of tame supercuspidal representations, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), no. 3, 579-622 (electronic).

[8] Y. Yamamoto, On the types for supercuspidal representations of inner forms of GL_N, https://arxiv.org/pdf/1909.10748 (2019).