PULLBACK FORMULA AND APPLICATIONS

大阪大学　伊吹山知義
TOMOYOSHI IBUKIYAMA
OSAKA UNIVERCITY

ここでは、Harder 予想への応用を念頭に、ヤコービ形式に関する pullback formula を扱う。かなり複雑な話なので、本稿で全容を述べることはできないが、詳しくは準備中の将来の論文 [14] を参照していただくことにして、ここでは大雑把なアウトラインを述べようと思う。あまり細部にこだわらずに、思うところを交えて、日本語で気軽な感じで述べてみたい。概観のための参考と思っていただければ幸いである。

1. Pullback formula

最初に Pullback formula の簡単な歴史を述べる。何のために役に立つのかは、また節をあらためて述べる。

ジーゲル保型形式についての詳しい Pullback formula の公式は Garrett [5] に始まると思う。大きな次数に対するウェイト k、次数 n の（スカラー値の）ジーゲルアイゼンシュタイン級数 $E_k^n(Z)$ の変数

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ {}^tZ_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}$$

を $Z_{12} = 0$ として、2 つの対角ブロック変数 Z_{11}, Z_{22} の函数に制限したら、当然、Z_{11} と Z_{22} に関する保型形式の積の和で掛けるはずである。これを係数の公式を込めてきちんと書いたのが、pullback formula である。その特徴は、Z_{11}, Z_{22} のサイズが同じとしておくと、ウェイト k の n 次ジーゲル保型形式の空間のヘッケ固有関数による基底 $\{f\}$ によって $f(Z_{11})f(Z_{22})$ の線形結合で掛けること、どの f についても、その線形結合における係数はゼロで無く、またそれは f の標準 L 函数の特殊値（L の臨界点での値）と初等的な量の積で書けることなどである。ここで同じ函数 f の積しか出てこないというのは、本来テンソルの次元は次元の積であることを考えると、ちょっと驚かされる。この後 Böcherer [2] は、ジーゲルアイゼンシュタイン級数に良い微分作用素 $\mathbb{D}$ を施してから制限するという方法を考えた。$\mathbb{D}$ をいい加減にとると制限は保型形式にならないが「良い」微分作用素という意味は、制限がまた保型形式になるようなものという意味である。これは非常に特殊な微分作用素である。$\mathbb{D}E_k$ をとることで、出てくる f のウェイトは k から $k+l$ に変わるが、彼は極めて複雑な組合せ論的な計算で、このような（スカラー値の）微分作用素を $l = 1$ の場合に具体的に構成し、他をこれの繰り返しで定義した。この場合、pullback formula の見かけ自身は、もともとのと大体同じだが、大きく異なるのは、出てくる標準 L 函数の臨界点が移動することである。ここで、$\mathbb{D}$ をベクトル

値にして、symmetric tensor 方向にウェイトを増やした拡張が [3] である。その後ウェイト k からウェイト $det^k\rho$ (ρ は一般の高次元表現）に増やす $\mathbb{D}$ の場合について、[4] や高柳などによる拡張などもあり、最終的には小島教知 [16] が完全に一般の ρ の場合に pullback formula の全体の構造を非常に明確に述べている。小島 [16] は素晴らしい論文であると思うが、でてくる定数を（いろいろな途中で必要な定数を相当部分を明らかにしたとは言え）完全に明示的には決めてはおらず、この点は実際の応用に当たっては大きな課題となる。また小島の論文は GL の有限次元表現空間を古典的な（Weyl の本にあるような）自然表現のテンソル積の中で実現しており、これはこの論文を必要以上に読みにくくしている。（そもそもこのような GL_m の既約表現の実現は一意的ではない。GL_m の既約表現の古典的な理論は、自然表現のテンソル積を分解することで得られているが、実際には GL_m と対称群 S_l の積の表現として既約分解しているわけで、当然ながら、GL_m の表現としては、対応する S_l の既約表現の次元分だけ重複して実現されている。これはあまり楽しくない。）

さて、このような公式を求めるに当たって、領域の制限について良い振る舞いをする微分作用素が必要になる。Böcherer の与えた微分作用素 D は、 $G_1 = Sp(m,\mathbb{R}) \times Sp(m,\mathbb{R}) \to Sp(2m,\mathbb{R}) = G_2$ という自然な埋め込みを考えたとき、$2m$ 次ジーゲル上半空間 H_{2m} 上の函数 $f(Z)$ と $g_0 = (g_1, g_2) \in G_1 \subset G_2$ について

$$\mathbb{D}(f(g_0Z)\det(CZ+D)^{-k}) = (\mathbb{D}f)(gZ)\det(CZ+D)^{k+l}$$

となるという、領域を制限しなくても保型性が G_1 については保たれるという強い条件の作用素である。このため彼の作用素は繰り返し函数に作用させることができる。ただしこれはスカラー値だから繰り返せるのでベクトル値だと問題が生じる（というか、そもそも彼はベクトル値の作用素は与えていない。）また作用素は定数係数ではなく、一番易しい場合でさえ、非常に複雑な形をしている。一方で、私は [8] において、かなり違う動機で、領域の制限について保型性を保つ定数係数の微分作用素の一般論（特徴づけや具体形など）を考えた。つまり

$$\begin{aligned} Res(\mathbb{D}(f(g_0Z)\det(CZ+D)^{-k}) &= \det(C_1Z_{11}+D_1)^{-k}\det(C_2Z_{22}+D_2)^{-l} \\ &\quad \times \rho(C_1Z_{11}+D_1)^{-1}\rho(C_2Z_{22}+D_2)^{-1}(Res(\mathbb{D}f))(g_1Z_{11}, g_2Z_{22}) \end{aligned}$$

という条件である。ここで (ρ, V_ρ) は GL_m の表現 、$\mathbb{D}$ は V_ρ-値、Res は H_{2m} 上の函数を $H_m \times H_m$ に制限するという意味である。（なお、対角ブロックはもっと一般の、サイズの異なる 3 個以上のブロックでもかまわない。）若干てまえみそではあるが、最近の進展から見ると、一見高級そうな Böcherer の作用素よりもこちらの方が汎用性が高いと思うようになった。まあそれはともかく。小島 [16] は私の一般的な作用素を用いている。この作用素の公式というのは、具体的な一行公式 [12] とか神秘的な生成関数 [13] とか、いくつかあるのだが、小島の公式を書き切るには $\mathbb{D}(\det(CZ+D)^{-k})$ を具体的に書ききることが必要で、これを計算しきれるほど明示的な公式は実は多くない。今回、表現 ρ の depth が 1, 2 の場合などの計算方法と結果などを述べる。

さて、以上はジーゲル保型形式の場合であるが、荒川恒男は [1] において、一般次数のヤコービアイゼンシュタイン形式について pullback formula を考えた。スカラー値のヤコービ形式というのは、適当に l 次の正定値対称行列 S を定めると、$(\tau, z) \in H_n \times M_{n,l}(\mathbb{C})$ の函数であって、 S とウェイト k で決まる適当な保型性を満たす正則函数のことである。とりあえず「適当な保型性」の中身は省略するが、このようなものをウェイト k 示数 (index) S のヤコービ形式という。これの制限というのは、$n = n_1 + n_2$ とするときに

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ {}^t\tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix} \qquad \tau_{11} \in H_{n_1}, \tau_{22} \in H_{n_2}$$

として、$(\tau, z) \in H_n \times M_{n,l}$ を $(\tau_{11}, z_1) \in H_{n_1} \times M_{n_1,l}(\mathbb{C})$, $(\tau_{22}, z_2) \in H_{n_2} \times M_{n_2,l}(\mathbb{C})$ に制限するわけである。制限した結果は、当然 n_1 次のヤコービ形式と n_2 次のヤコービ形式の積の和になる。[1] はヤコービアイゼンシュタイン級数をこのように制限したときにどうなるかという公式を述べている。厳密に言えば、すべての係数が一応きちんと書けているのは $S = 1$ の場合である。ここで、係数は初等的な数とヤコービ形式の標準 L 函数の特殊値で書ける。このヤコービ形式の標準 L 函数というのは、村瀬・菅野 [18],[19],[20] で定義されている。index 1 なら概ね対応する半整数ジーゲル保型形式の L 函数と言っても良い。

さて、彼がやったのはジーゲル保型形式で言えば、Garrett がやったことに相当し、微分作用素はでてこない。しかし私が必要なのはベクトル値の場合で、このためには微分作用素が不可欠である。この微分作用素はジーゲルの場合とはもちろん異なるものである。しかしヤコービ形式は、だいたい半整数ウェイトのジーゲル保型形式と対応するので、まあジーゲルの場合に帰着すると言っても良い。それで、必要な場合に具体的な微分作用素を与えて、ヤコービアイゼンシュタイン級数の pullback formula を書いたというのが私のやったことの一部である。

2. Pullback の公式は何の役にたつのか？

どんな公式でもそれが役に立つ内容を全部網羅して述べることは不可能であろう。しかし、今までの所の利用され方という程度の意味で、少しまとめてみたい。これでも十分面白いことが理解できると思う。

1. まず、アイゼンシュタイン級数をみれば、すべての保型形式が得られるという構造になっている。これは原則に過ぎないと思うかもしれないが、実際に 3 次でそういう方法で求めた人とか例とかがある。

2. おそらく最初の応用は basis problem ではないかと思う。これはジーゲル保型形式がどれくらいテータ函数で書けるかを問うものである。Böcherer とか Arakawa の最初の目的はここにあったのではないかと思う。その証明は大雑把に言って、もともとのジーゲル公式でアイゼンシュタイン級数はテータで書けているが、制限をして Z_{22} 側と内積をとれば、その結果もやはりテータだという方針である。

3. 次の重大な応用は L 函数の特殊値である。係数に標準 L 函数の特殊値が現れるので、この値が何か知らなくても、具体的はヘッケ固有関数を用いてアイゼンシュタイン級数の分解をしてみれば、この特殊

値の具体的な値が計算できる。これは桂田氏の結果を始め、いろいろな結果がある。これが計算できるためには、完全に明示的な pullback formula が必要になる。ある f を固定して、これが登場する pullback formula を考えると、もともとのアイゼンシュタイン級数のウェイトはいろいろに（f のウェイトより「小さく」、またアイゼンシュタイン級数が収束する範囲で）とれる。このとき、でてくる f の L 函数は同じだが、その臨界値が変わる。ということは、ひとつの f に対し、一斉にいろいろな臨界値での値がわかると言うことである。

4. 実際には世の中の人がより多く関心があるのは、特殊値の代数性であるようだ。具体的に言うと、$L(m,f,St)/\pi^q(f,f)$ (q は計算可能な有る数、m はちょうど pullback formula に現れる m）に対して、$\sigma \in Aut(\mathbb{C})$ を作用させると、f^σ （これはフーリエ展開の係数に σ を作用させることにより定義される）に変えたものになる、という結果を用いる。これにより、もし f のフーリエ係数の生成する体 が K ならば、特殊値も K に属することになる。これを示すためには、完全に具体的な pullback formula は必要ない。主要なことはアイゼンシュタイン級数のフーリエ係数が有理数なこと、微分作用素が有理数係数なこと程度である。しかし、pullback formula において、どの eigenform f に対しても係数がゼロで無いという証明は必要である。これは全然明らかなことではない。我々の以前の説明で述べれば、これは $Res(\mathbb{D}(\det(CZ+D)^{-k}))\neq 0$ といっても同じである。これは基本的には [4] に証明がある。

5. 保型形式のフーリエ係数とかヘッケ作用素の固有値とかがどの程度有理的かというような定理は志村により代数幾何的な証明などが知られている。しかしこれは pullback formula を用いても証明可能である。たとえば、Takei [21] は、ウェイトが $det^k Sym(l)$ ($Sym(l)$ は l 次対称テンソル表現）のときに、そのような証明を書いている ([17] も参照）。ウェイトをこのようなものに制限しているのは、当時 pullback formula が他の場合に利用できなかったからであろうと思う。pullback formula さえ有れば、彼の証明はどんなウェイトでも、そのまま通用する。

6. 本稿に一番関係があるのは、次の桂田氏のアイデアである。pullback formula にでてくる量はどれも有理的であるばかりでなく、アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数は有理数で、しかも分母は有界である。どのような分母がでてくるかも、ベルヌーイ数でだいたいわかっている。そこで、そういう特殊な素数を除くことにする。すると、大雑把に言って、それ以外の素数 p について、pullback formula の右辺のどこかの f_0 の係数の分母が p で割れてたら、他の形式 f でその係数の分母が p でわれるものが他にもあるはずだ、そこで p をかけると f_0 と f のヘッケ固有値のあいだの合同が得られるだろう、という話である。ちょっと以上の書き方は雑なので、一般論は桂田・水本の論文 [15] と見てほしいのだが、pullback formula があれば、適当な状況下では L 函数の特殊値をわる素数を法として、保型形式の間に合同があるという、大変面白いアイデアであり、事実、桂田氏はこれにより、多くの合同に関する結果を得ている。（なお、以上の述べ方だと一見 L 函数

の特殊値の分母の素数が問題になるように見えるのだが、そうではなくて分子だ、という事情は前掲の論文を見てほしい。)

3. 合同に関する Harder 予想

さて、ここで我々の仕事の動機でもある、2次ジーゲルカスプ形式の合同に関する Harder 予想について述べたい。$k, j,$ を $k \geq 3, j \geq 0$ となる整数とする。f をウェイトが $2k+j-2$ の $\Gamma_1 = SL_2(\mathbb{Z})$ のカスプ形式でヘッケ固有関数とする。このゼータ函数は

$$\zeta(s,f) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + p^{2k+j-3-2s})^{-1}$$

という形で与えられる。F を $\Gamma_2 = Sp(2,\mathbb{Z})$ に関するウェイトが $det^k Sym(j)$ のカスプ形式で、やはりヘッケ固有関数とする。($F \neq 0$ ならば必然的に j は偶数になる。) このスピノールゼータ函数は

$$\begin{aligned} &H_p(u,F) \\ &= 1 - \lambda(p)u + (\lambda(p)^2 - \lambda(p^2) - p^{2k+j-4})u^2 - \lambda(p)^{2k+j-3}u^3 + p^{4k+2j-6}u^4 \end{aligned}$$

とおくとき

$$L(s,F,Sp) = \prod_p H_p(p^{-s},F)^{-1}$$

という形で書けることはよく知られている。ここで $\lambda(p^\nu)$ はヘッケ作用素 $T(p^\nu)$ の固有値である。

Harder の予想：記号を上記の通りとする。このとき、任意の f に対して、あるヘッケ固有カスプ形式 F と、$L(k+j,f)$ の代数的部分 $L_{alg}(k+j,f)$ を割る素イデアル $\mathfrak{l}$ があって、任意の素数 p について

$$H_p(u,F) \equiv (1-p^{k-2}u)(1-p^{k+j-1}u)(1-a_p u + p^{2k+j-3}u^2) \bmod \mathfrak{l}$$

である。

ここでもし $j=0$ で F が f からの齋藤・黒川リフトならば、F の L 函数はまさに右辺の格好をしているので、合同というよりは等しいのがあると言った方がよいであろう。問題は $j > 0$ のときである。$j > 0$ ならば正則な F には齋藤・黒川リフトはないと思われているから、これは2次と1次の保型形式の間の関係であって、このようなものの合同の証明は、普通やさしくない。

実は k **が偶数の場合**は、これを pullback formula により証明する方法が桂田氏により提案されており、私もそれに協力しているが、これは今回の話とはまた別の話なので、述べない。これから述べるのは k **が奇数の場合**である。だから上のケースとは相補的な関係にある。私のアイデアは私の以前の志村対応予想の仕事と関係がある。

志村は1変数の整数ウェイトの保型形式と半整数の保型形式の間のヘッケ作用素を保つ同型、いわゆる志村対応を証明した。これを2次の場合に拡張しようと試みて精密な予想を提出したのが [9], [11] である。実は予想は2種類ある。半整数ウェイトの2次ジーゲル保型形

式（ここで半整数というのはウェイトが $det^{k-1/2}\rho$ と det の部分が半整数巾という意味）は、１変数の場合と違い、指標付きとそうでないものがある（１変数だと指標付きのものは消える。）これを古典的な場合にならって、Neben Typ と Haupt Typ と言うことにすると Neben と Haupt 両方に対する予想がある。記号として、前者のカスプ形式の空間を $S^+_{k-1/2,\rho}(\Gamma_0^{(n)}(4).\psi)$、ただし $\psi(\gamma)=\left(\frac{-4}{\det(D)}\right)$, $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0^{(n)}(4)$, 後者のカスプ形式の空間を $S^+_{k-1/2,\rho}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ と書くことにする。ここで $\Gamma_0^{(n)}(4)$ は $\Gamma_n=Sp(n,\mathbb{Z})\subset M_{2n}(\mathbb{Z})$ の中で $C\equiv 0 \bmod 4$ で定義される普通のヘッケ型の群、上付きのプラスは、Kohnen 流のプラス部分空間、つまりフーリエ係数の条件でレベル４からレベル１のいわば new form に当たる部分を取っていることを意味する。

不思議なことに、$n=2$ ならば、この両者は１変数からのリフトの部分を除いて、固有値が同じになる同型があるらしいのである。具体的に言うと、$\rho=Sym(j)$ のときに $S_{k-1/2,j}=S_{det^{k-1/2}\rho}$ と書けば

(1) １変数のヘッケ固有カスプ形式の組 $(f,g)\in S_{2k-4}(\Gamma_1)\times S_{2k+2j-2}(\Gamma_1)$ からの吉田リフト型のリフト $\mathcal{L}(f,g)\in S^+_{k-1/2.j}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ を与える単射写像が存在すると予想される。ここで

$$L(s,\mathcal{L}(f,g))=L(s,g)L(s-j-1,f)$$

である。(以上のリフト予想は $j=0$ の時は林田秀一氏との共同研究である。$\mathcal{L}(f,g)$ も具体的に構成できる。)

(2) Haupt Typ の中での、このリフトの像の直交補空間を $S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ と書くと、ヘッケ作用素と可換な同型

$$S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0^{(2)}(4))\cong S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0^{(2)}(4),\psi)$$

があると予想される。

２次の志村型の対応予想 ([9], [11]) $k\geq 3$ で $j\geq 0$ が偶数の時、

$$S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0^{(2)}(4))\cong S^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0^{(2)}(4),\psi)\cong S_{j+3,2k-6}(Sp(2,\mathbb{Z}))$$

となるヘッケ作用素と可換な同型があると予想される。

ただし、ここで半整数ウェイトの方での L 函数をきちんと書いておく。$T(1,p,p^2,p)$ および $T(11,p^2,p^2)$ で決まるメタプレクティック群の（適当に正規化した）ヘッケ作用素の固有値を $\lambda(p),\omega(p)$ とすると、L 函数の $p\neq 2$ でのオイラー因子は

$$1-\lambda(p)u+(p\omega(p)+p^{2k+2j-5}(1+p^2))u^2+\lambda(p)p^{2k+2j-3}u^3+p^{4k+4j-6}u^4$$

で $u=p^{-s}$ としたのもで与えられる。$p=2$ の場合も同様であるが、その場合はヘッケ作用素の定義を対応するヤコービ形式のヘッケ作用素からくるものに置き換えないといけない。詳しくは省略する。

重大な注意: 上の対応予想において、もし j が奇数ならば、左辺は自動的にゼロになるが右辺はゼロとは限らないから、この場合、同型

は成り立たない。言い換えると整数ウェイトのジーゲル保型形式において、**det の巾が偶数のウェイトについては、予想がない。**

これらの予想は詳しい明示的な次元公式と数々の実例によってサポートされており、まず確実に正しいと思われる精密な予想である。

次に、この予想が成り立つと仮定して、Harder 予想を半整数ウェイトに読み替える。こうすると単に整数ウェイトを半整数ウェイトに置き換えたという以上の面白い現象が生じる。その結論は次の通りである。

1 変数の半整数ウェイトのカスプ形式で、ヘッケ固有関数となる $h \in S^+_{k+j-1/2}(\Gamma_0^{(1)}(4))$ を取る。これに対して、h を持ち上げた Klingen 型のアイゼンシュタイン級数 $E(h) \in A^+_{k-1/2,j}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ を普通の通りに定義することができる。今、$g \in S_{2k+2j-2}(SL_2(\mathbb{Z}))$ を志村対応で h に対応する保型形式とする。(定数倍の違いはどうでもよい。) このとき、ジーゲル Φ 作用素などを利用して、簡単に

$$L(s, E(h)) = \zeta(s-j-1)\zeta(2-2k-j+4)L(s,g)$$

となることがわかる。

半整数ウェイトにおける Harder 予想 : 記号を上の通りとする。このとき、h に対して、ある $F \in S^{+,0}_{k-1/2,j}(\Gamma_0^{(2)}(4))$ と、$L_{alg}(2k+j-3,g)$ を割る、ある素イデアル $\mathfrak{l}$ があって、

$$H_p(u,F) \equiv H_p(u,E(h)) \bmod \mathfrak{l}$$

が成立する。ここで $H_p(p^{-s},*)$ はそれぞれのオイラー p 因子である。

注意であるが、$E(h)$ は Haupt Typ の函数である。Neben Typ は全部カスプ形式であることが証明できるので、Neben Typ でこのようなものは考えられない。前の志村型対応予想に従えば F は Haupt でも Neben でも良いようなものだが、$E(h)$ と同じ空間に入っているという点で Haupt から取るのが好ましい。同じ空間の保型形式どうしの合同は、桂田のアイデアにより、pullback formula で考察できるからである。これが今回の話のポイントである。

4. Jacobi forms vs Siegel forms of half-integral weight

半整数ウェイトのままで、いきなり pullback を考えても良いのだが、たとえば Kohnen plus space をとらないといけないとか、いろいろ気を遣わないといけない点が多くなる。それでそれと同値なヤコービ形式で話をしたのが今回の結果である。これを説明する都合上、示数 1 のベクトル値のヤコービ形式と半整数ウェイトの保型形式の対応について一般次数で述べる。普通、ヤコービ形式というのは、ジーゲル保型形式の一部の対角ブロックについてフーリエ展開したときの係数の満たす保型性と同じ保型性を満たす函数のことと思えばわかりやすい。しかしベクトル値のヤコービ形式に関しては、そうではない。ここでは $GL_n(\mathbb{C})$ の表現 ρ に対して、ウェイト ρ, 示数 1 のヤコービ形式というのを次の保型性を満たす $(\tau,z) \in H_n \times \mathbb{C}^n$ 上の正則関数として、

定義する。$g \in Sp(n,\mathbb{R})$, $x=(\lambda,\mu,\kappa)$, λ, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\kappa \in \mathbb{R}$ として

$$f|_{k,1}[g] = \rho(c\tau+d)^{-1}e(-z(c\tau+d)^{-1}c\,{}^t z)f(g\tau, z(c\tau+d)^{-1})$$
$$f|_1[x] = e(\lambda\tau\,{}^t\lambda + 2z\,{}^t\lambda + \mu\,{}^t\lambda+\kappa)f(\tau, z+\lambda\tau+\mu)$$

として、

(1) $f|_{k,1}[\gamma] = f \quad (\gamma \in \Gamma_n = Sp(n,\mathbb{Z}))$.
(2) $f|_1[x] = f \qquad (x \in \mathbb{Z}^{2n+1})$.
(3) $f(\tau,z) = \sum_{N,r} C(N,r)e(Tr(N\tau))e(r\,{}^t z)$ とフーリエ展開したとき、$4N - {}^t r\, r$ が半正定値でないと $C(N,r)=0$ である。ここで N は $n\times n$ の半整数対称行列, $r \in \mathbb{Z}^n$ は行ベクトルである。

(3) の条件は $n \geq 2$ ならば Koecher 原理より自動的である。特に (3) で $4N - {}^t rr > 0$ でなければ $C(N,r)=0$ となるとき、f をヤコービカスプ形式という。上の $Sp(n,\mathbb{Z})$ と $x \in \mathbb{Z}^{2n+1}$ で自然に生成される $H_n \times \mathbb{C}^n$ の変換群を Γ_n^J と書くことにする。ヤコービ保型形式、およびヤコービカスプ形式の空間をそれぞれ $J_{\rho,1}(\Gamma_n^J)$, $J_{\rho,1}^{cusp}(\Gamma_n^J)$ と書く。

Theorem 4.1 (伊吹山、林田、木村昌太郎等による)**.** $GL_n(\mathbb{C})$ の多項式表現 ρ が det の巾を含まないとし、k を 2 以上の偶数とすると、次のヘッケ作用素と可換な同型が成り立つ。

$$J_{det^k\rho,1}(\Gamma_n^J) \cong A^+_{det^{k-1/2}\rho}(\Gamma_0^{(n)}(4))$$
$$J^{cusp}_{det^k\rho,1}(\Gamma_n^J) \cong S^+_{det^{k-1/2}\rho}(\Gamma_0^{(n)}(4))$$

k が奇数の時は、左辺を skew holomorphic Jacobi forms というものの空間に変えれば同様のことがなりたつが、面倒なので、これは説明しない。また肝心の pullback formula も skew holomorphic は技術的に面倒になるので、今のところ正則な場合に限って考えている。

さて、以上を適用すれば、k が偶数の時は、Harder 予想は 2 次正則ヤコービ形式に関する予想ということになる。ここで k が偶数という条件は、対応する整数ウェイト $det^{j+3}Sym(2k-6)$ でいえば、$2k-6 \equiv 2 \bmod 4$ という条件である。とりあえずこの場合だけで話を進める。

5. ヤコービ形式の微分作用素

この節ではヤコービ形式での保型性を保つ微分作用素を、半整数ウェイトに帰着することを述べたい。

領域の制限について保型性を保つ微分作用素 $\mathbb{D}$ というのは領域 $D_1 \subset D_2$ と、それぞれの正則自己同形の一部 G_1, G_2 について、$G_1 \subset G_2$ となる領域への作用と同変的な埋め込みが有り、また (G_1,D_1) と (G_2,D_2) に保型因子 J_i があって、それらで D_1 上、または D_2 上の正則関数 F への自然な作用を決めるとき、$Res_{D_1}(\mathbb{D}(F|_{J_2}[g_1]) = (Res_{D_1}(\mathbb{D}F)|_{J_1}[g_1]$ $(g_1 \in G_1)$ が成り立つような $\mathbb{D}$ の事である。この条件は実リー群の条件であるが、F が保型形式なら、$Res(\mathbb{D}(F))$ も保型形式になる。さて我々の場合は (D_2,D_1) として次の二種類の領域の組 $(H_n, H_{n_1}\times H_{n_2})$

と $(H_n \times \mathbb{C}^n, (H_{n_1} \times \mathbb{C}^{n_1}) \times (H_{n_2} \times \mathbb{C}^{n_2}))$ を考える。Young 図形 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ （つまり整数列で $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 0$ となっていて有限個を除きゼロになるもの）に対して、$depth(\lambda)$ で $\lambda_i \neq 0$ となる i の最大値を表すとき、$GL_m(\mathbb{C})$ の既約多項式表現と λ で $depth(\lambda) \leq m$ なるものは 1 対 1 に対応する。これを $\rho_{m,\lambda}$ と書こう。保型因子は $GL_n(\mathbb{C})$ の表現 det^k と $GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times GL_{n_2}(\mathbb{C})$ の表現 $det^k \rho_{n_1,\lambda} \otimes det^k \rho_{n_2,\lambda}$ に対応するものを考えている。これらでヤコービ形式とジーゲル保型形式の両方のウェイトが決まる。ヤコービ形式の index は別に固定しておく。

まず、ヤコービ形式では、一般にテータ分解というのが知られている。これは任意のヤコービ形式を (τ, z) に関する標準的なテータ関数 $\vartheta_m(\tau, z)$ と τ だけの関数の積の和で書く方法である。今、示数 1 の場合だけで見ると、

$$f(\tau, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} c_m(\tau) \vartheta_m(\tau, z)$$

の形にかけており、ここで $(c_m(\tau))$ はウェイトが $der^{k-1/2}\rho$ のベクトル値保型形式であるから、ヤコービ形式の微分作用素も、半整数ウェイトのジーゲル保型形式に対する微分作用素から得られると思うのは自然である。しかし、このような分解を使うと、離散群の作用で不変な保型形式上だけで有効な証明になってしまい、実 Lie 群の作用と可換というような広い意味での作用との可換性を保つ主張にはなじまない。したがって証明はリー群の作用下での振る舞いをちゃんと見るみる必要があるのだが、証明はともかくとして、結果自身は単純である。

今、$\tau = (\tau_{ij}) \in H_n$, $z = (z_i) \in \mathbb{C}^n$ とする。$n = n_1 + n_2$ として、

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau^{(1)} & \tau^{(12)} \\ {}^t\tau^{(12)} & \tau^{(2)} \end{pmatrix} \qquad z = (z^{(1)}, z^{(2)}), \qquad \tau^{(11)} \in H_{n_1}, z^{(1)} \in \mathbb{C}^{n_1}$$

としておく。記号を簡単にするために

$$\partial_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \times \frac{1 + \delta_{ij}}{2} \frac{\partial}{\partial \tau_{ij}}, \qquad \partial_i = \frac{1}{2\pi i} \times \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z_i}$$

とおく。

Lemma 5.1. *$P(T)$ を $n \times n$ 対称行列 T の成分に関するベクトル値の多項式で、$\mathbb{D} = P\big((\partial_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}\big)$ を $(H_n, H_{n_1} \times H_{n_2})$ について、ウェイト $k - 1/2$ とウェイト $\det^{k-1/2} \rho \otimes \det^{k-1/2} \rho$ できまる保型因子について可換な微分作用素とする。このとき、$P\big((\partial_{ij} - \partial_i \partial_j/4)_{1 \leq i,j \leq n}\big)$ は $(H_n \times \mathbb{C}^n, (H_{n_1} \times \mathbb{C}^{n_1}) \times (H_{n_2} \times \mathbb{C}^{n_2}))$ について、ウェイト k とウェイト $det^k \rho \otimes det^k \rho$ の保型因子による作用、および index 1 の保型因子による作用について可換な微分作用素である。*

以上の主張で実は index 1 である必要はなく、任意の index でも $\partial_i \partial_j$ の部分を index に合わせて変えれば同様の主張が得られるが、今は保型性の説明とか、いろいろ面倒なので、index 1 だけで述べた。

6. 具体的な微分作用素と内積

この節ではジーゲル保型形式上での微分作用素を特別な (我々に必要な) 場合に完全に具体的に書き切る。具体的には, $n = n_1 + n_2$ で、ウェイトは k を **整数または半整数** とするとき、ウェイトが det^k から $det^k \rho_{n_1,\lambda} \otimes det^k \rho_{n_2,\lambda}$ で、かつ $\lambda = (l, 0, \ldots)$ または $\lambda = (l, l, 0 \ldots)$ の場合である。前者は l 次の対称テンソル表現で、一番単純な場合である。

もっと一般の場合にも有用な主張をまず述べる。そのために、GL_n の表現空間の bideterminant による実現について復習しておく。この実現の利点は、表現空間が一意的に決まることと、基本的にベクトルはスカラー値の多項式と思えて取り扱いが易しい点などがあげられる。

今 U を $n \times n$ の変数成分の行列とする。$A \in GL_n(\mathbb{C})$ と U の成分の多項式 $P(U)$ の空間に対して $P(U) \to P(UA)$ という作用が決まる。$1 \leq q \leq n$ なる q を一つ決めて U_q を U の最初の q 行からなる $q \times n$ の部分行列とする。$\{1, \ldots, n\}$ の部分集合 I が $|I| = q$ をみたすとき、$(U_q)_I$ で I の番号からなる列のなす U_q の部分行列の小行列式を表すとする。さまざまな q と I に対して $(U_q)_I$ の有限個の積を bideterminant という。このようなものの線形結合で表現空間を実現しよう。$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0)$ に対して、$depth(\lambda) = m \leq n$ と仮定する。$\lambda_{m+1} = 0$ とおく。$I_{q,i} \subset \{1, \ldots, n\}$ かつ $|I_{q,i}| = q$ に対し

$$\prod_{q=1}^{m} \prod_{i=1}^{\lambda_q - \lambda_{q+1}} (U_q)_{I_{q,i}}$$

となる式で張られる空間を V_λ と書く。このとき $V_{n,\lambda}$ は $\rho_{n,\lambda}$ の表現空間であることが知られている ([6])。またこのように空間 $V_{\rho_{n,\lambda}}$ を実現したときに、この内積で $(*, *)$ で

$$(\rho(g)v, w) = (v, \rho({}^t\overline{g})w)$$

となるものが必要になる。これは定数倍を除きただ一つなのはすぐわかるが、一つは具体的に書かないと話にならない。これは多項式 $P(U)$ と $Q(U)$ が有るときに、

$$(P, Q) = \left(P\left(\frac{\partial}{\partial U}\right) \overline{Q}(U) \right)\Big|_{U=0}, \qquad \frac{\partial}{\partial U} = \left(\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\right), U = (u_{ij})$$

として定義される。ここで $\overline{Q}$ は Q の係数を複素共役に変更した多項式である。

次に微分作用素について考える。$Sp(2m, \mathbb{R})$ から $Sp(m, \mathbb{R}) \times Sp(m, \mathbb{R})$ でウェイトが det^k から $det^{k+l} \otimes det^{k+l}$ の場合の微分作用素の公式があれば、(つまり $\lambda_0 = (l, \ldots, l) \in \mathbb{Z}^m$ の場合がわかっていれば) これの最後に 0 を追加した dominant integral weight $\lambda = (l, \ldots, l, 0, \ldots, 0)$ に対応する GL_{n_i} の表現の場合の公式もわかることを言っておく。これを説明するために記号を準備する。U, V をそれぞれ成分が独立変数からなる $m \times n_1$ および $m \times n_2$ 行列とする。

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

とおく。T を $n \times n$ の対称行列とし、S を $m \times m$ の対称行列とする。P_0 を S の成分に関するスカラー値の多項式とする。

Proposition 6.1. 記号を上の通りとする。$P_0((\partial_{ij}))$ を H_{2m} 上の正則関数に対する定数係数線形偏微分作用素で、H_{2m} の保型因子 det^k と $H_m \times H_m$ の保型因子 $det^{k+l} \otimes det^{k+l}$ で決まる作用と領域の制限に関して、可換なものとする。このとき、

$$\mathbb{D} = P_0(\mathbb{U}(\partial_{ij})_{1 \le i,j \le n}\, {}^t\mathbb{U})$$

と置くと、これはウェイト k の保型因子の作用とウェイト $det^k \rho_{n_1,\lambda} \otimes det^k \rho_{n_2,\lambda}$ の保型因子の作用と領域の制限に関して可換な作用素である。

ここで $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ {}^tT_{12} & T_{22} \end{pmatrix}$ を $n \times n$ の対称行列、T_{11} を $n_1 \times n_1$ の行列とすると、

$$P(T) = P_0 \begin{pmatrix} UT_{11}\,{}^tU & UT_{12}\,{}^tV \\ V\,{}^tT_{12}\,{}^tU & V\,{}^tT_{22}V \end{pmatrix}$$

と置くとき $\mathbb{D} = P((\partial_{ij})_{1 \le i,j \le n})$ といっても良い。

上の補題の証明には、[8] における多重調和多項式による特徴付けと、結果の多項式が U と V の λ に対応する bideterminants で張られているという両方を確かめる必要があるが、ここでは省略する。

さて、この補題以上に $\mathbb{D}$ を具体的に書こうと思ったら、もともとの P_0 をきちんと書く必要がある。これは $m = 1$, $\lambda = (l)$ の場合は、Eichler-Zagier 以来よく知られており、$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$ と書くとき

$$\frac{1}{(1 - 2s_{12}u + s_{11}s_{22}u^2)^{l-1}} = \sum_{l=0}^{\infty} Q_l(S)u^l$$

とおけば、P_0 としては Q_l をとればよい。これは本質的に Gegenbauer 多項式である。これから $n = n_1 + n_2$ の場合の $\lambda = (l, 0, \ldots)$ に対応する $P = P_l$ を求める。U, V の第一行を $(u_1, \ldots, u_{n_1}), (v_1, \ldots, v_{n_2})$ と書き、次の記号を導入する。

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} t_{i,j+n_1} u_i v_j,$$
$$F_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n_1} t_{ij} u_i u_j \right) \left(\sum_{i,j=1}^{n_2} t_{n_1+i,n_1+j} v_i v_j \right).$$

このとき

$$P_l(T) = \sum_{a+2b=l} \frac{(-1)^b (l-1)_b (2l-2+2b)_a}{a!b!} F_1^a F_2^b$$

で与えられる。ここでポッホハンマー記号 $(x)_q = x(x+1)\cdots(x+q-1)$ を用いている。

$m=2$ で $\lambda=(l,l)$ の場合の P_0 は [8] で与えられており、一般の $n=n_1+n_2$ で対応する多項式 $G_l(T)$ $(n=n_1+n_2)$ は、

$$F_1=\det(UT_{12}\,{}^tV)$$
$$F_2=\det(UT_{11}\,{}^tU)\det(VT_{22}\,{}^tV)$$
$$F_3=\det(\mathbb{U}T\,{}^t\mathbb{U})$$

とおき、$s=(2k-5)/2$ とするとき、次で与えられる。

$$G_l(T)=\sum_{a+2b+2c=l}\frac{(-1)^b2^a}{a!b!c!}(s+c+1)_{a+b+c}F_1^aF_2^bF_3^c.$$

7. Pullback formula に必要な量の計算結果

Kozima [16] によれば、pullback formula を完全に書き切るためにわかっていない量は、次の量だけである。$\delta=\det(CZ+D)$ とおいたときの、$\mathbb{D}(\delta^{-k})$ の、定数まで込めた完全に明示的な公式。

この計算は全然容易ではない。我々の場合、この計算は [16] に出ている基本的な微分の公式に基づいて、かなり面倒な帰納法で直接計算する。(彼の表現のとり方は我々のと少し異なるので、本当は基本公式も少し解説が必要だが紙数もないので省略する。) ここで C, D は任意の $Sp(n,\mathbb{R})$ の元 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ を固定しておいたときの C, D である。

$$\Delta^U=\mathbb{U}(CZ+D)^{-1}C\,{}^t\mathbb{U}=(\Delta^U_{ij})_{1\le i,j\le 2m}$$

と書いておく。これはもちろん $2m\times 2m$ の対称行列である。$\mathbb{D}$ も偏微分を係数とする U, V の成分の多項式である。多項式 $P_l(T)$ と $G_l(T)$ を前節の通りとして、次の結果がわかる。k は整数又は半整数である。

Lemma 7.1. $n=n_1+n_2$ は任意、 m はそれぞれ 1 または 2 として

$$P_l((\partial_{ij}))(\delta^{-k}))=\frac{(-1)^l(2k-2)_l(k)_l}{l!}\delta^{-k}(\Delta^U_{12})^l$$
$$G_l((\partial_{ij}))(\delta^{-k}))=\frac{1}{2^{2l}l!}(2k-3)_l(2k-1)_{2l}\delta^{-k}(\Delta^U_{13}\Delta^U_{24}-\Delta^U_{14}\Delta^U_{23})^l$$

8. Exact pullback formula

k を偶数として、ウェイト k、示数 1 の次数 n のヤコービアイゼンシュタイン級数を $E^{(n),J}_{k,1}$ と書くことにする。これは

$$E^{(n),J}_{k,1}=\sum_{\gamma\in\Gamma^J_{n,\infty}\backslash\Gamma^J_n}J_{k,1}(\gamma,(\tau,z))^{-1}$$

で定義される。ここで $J_{k,1}(\gamma,(\tau,z))$ は $\gamma\in\Gamma^J_n$ に対して、前に述べたヤコービ形式の保型性の条件 (1), (2) から自然に決まる保型因子である。また $\Gamma^J_{n,\infty}$ は $x=(\lambda,\mu,\kappa)$, $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_n$ において $\lambda=0$, $c=0$ で決まる Γ^J_n の部分群である。

次にヤコービ形式の内積をひとつ指定しておく。ϕ, ψ が $H_n \times \mathbb{C}^n$ 上のウェイト $det^k\rho$ のヤコービ形式とする。$\tau = \xi + i\eta$, $z = x + iy$ で実部と虚部を表す。$(*, *)$ で ρ の表現空間の内積とする。

$$< \phi, \phi' >= \int_{\Gamma_n^J \backslash H_n \times \mathbb{C}^n} (\rho(\eta^{1/2})\phi(\tau, z), \rho(\eta^{1/2})\psi(\tau, z)) \\ \times det(\eta)^{-n-1} \exp(-4\pi y \eta^{-1}\, {}^t\eta) d\xi d\eta dx dy.$$

として内積を定める。ヤコービ形式に対する一般の pullback formula の一般形は次のようなものである。$\mathbb{D}$ を $H_n \times \mathbb{C}^n$ 上の函数の微分作用素で、ウェイト det^k の保型因子での作用が $(H_{n_1} \times \mathbb{C}^{n_1}) \times (H_{n_2} \times \mathbb{C}^{n_2})$ への制限での $det^k\rho \otimes det^k\rho$ の保型因子での作用と可換であるとする。このとき、変数を $(\tau, z) \in H_{n_1} \times \mathbb{C}^{n_1}$, $(\zeta, w) \in H_{n_2} \times \mathbb{C}^{n_2}$ と書くことにして、$depth(\lambda) = m$ とする。$m \leq r \leq \min(n_1, n_2)$ となる r をとる。表現 $GL_{n_i}(\mathbb{C})$ の表現 $\rho_{n_i,\lambda}$ を $\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ (A_1 は $r \times r$) に制限したとき、自然に $\rho_{r,\lambda}$ に対応する部分表現空間がとれる。$\rho_r = det^k\rho_{r,\lambda}$ と書いておく。また $\rho_{n_i} = det^k\rho_{n_i,\lambda}$ とする。$m \leq r \leq \min(n_1, n_2)$ について、$d(r)$ を $S_{\rho_r}(\Gamma_r^J)$ の次元、$\{f_{r,t}(\tau, z)\}_{t=1}^{d(r)}$ を、その正規直交基底でヘッケ作用素の固有函数になるものとする。ここで正規直交基底をとっているのでこれは内積のとりかたによっている。$f_{r,t}$ をウェイト ρ_{n_i} の n_i 次のヤコービ形式に持ち上げてできる Klingen type のヤコービ形式を $[f_{r,t}]_{\rho_r}^{\rho_{n_i}}$ と書く。また

$$Z(k, f_{r,t}) = L_r(k - r - 1/2, f_{r,t}) \prod_{i=1}^{r} \zeta(2k - 2i)^{-1}$$

とおく。ここで $\zeta(s)$ はリーマンゼータ函数であり、$L_n(s, f_{r,t})$ は Murase, Sugano の [18], [19], [20] などで定義された、$f_{r,j}$ に対する標準 L 函数である。$\theta(f_{r,j})$ で $f_{r,t}(\zeta, w)$ のフーリエ係数を複素共役にしたものを表す。このとき次が成り立つ。($\mathbb{D}$ が定数で $\rho = id$ ならば荒川 [1] ですでにわかっていた。).

$$\mathbb{D}(E_{k,1}^{(n),J})((\tau, z), (\zeta, w)) = \sum_{r=m}^{\min(n_1,n_2)} \sum_{t=1}^{d(r)} c_r Z(k, f_{r,t}) [f_{r,t}]_r^{\rho_{n_1}} [\theta(f_{r,t})]_r^{\rho_{n_2}}.$$

ここで c_r は $f_{r,t}$ などによらない定数であり、一般に $c_r \neq 0$ なることは証明が必要であるが、[4] でポアソン公式を使うことにより証明されている。（これは講演の後で Boecherer に教わった。）

さて問題は c_r を具体的に求めることである。これは一般の ρ ではわかっていない。前節までの具体的な微分作用素が現れる場合は pullback formula が具体的に書けることになるが、ここでは $m = 1$ で 4 次のヤコービ形式を 2 次のヤコービ形式のテンソル積に制限する場合だけを考えることにする。今 $\rho = Sym(j)$ を $GL_2(\mathbb{C})$ の j 次対称テンソル表現とする。$n_1 = n_2 = 2$, $n = 4$ の場合のときは c_1, c_2 のみが問題にな

る。$Sym(j)$ 表現の内積は前に微分で定義したが、$(P,Q)/j!$ に変更しておく。

Theorem 8.1.

$$c_1 = 2^{7/2-k-j} i^{k+j} \frac{\pi}{2k+2j-3} \frac{(-1)^j (2k-3)_j (k-1/2)_j}{j!}$$

$$c_2 = 2^{6-(2k+j)} i^{2k+j} \frac{\pi^3}{(2k+2j-3)(2k+j-4)(2k-5)} \times \frac{(-1)^j (2k-3)_j (k-1/2)_j}{j!}.$$

紙数もなくなったので、次にこれからわかることを箇条書きにする。

(1) $f_{1,t}$ は、GL_1 では $Sym(j) = det^j$ だから、定義によりウエイト $k+j$ のヤコービ形式で、これはウェイト $k+j-1/2$ の 1 変数保型形式と対応し、さらに志村対応より $f \in S_{2k+2j-2}(\Gamma_1)$ とも（定数倍の曖昧さは除いて）対応する。このとき、実は $L_1(k, f_{1,t}) = L(2k+j-3, f)$ となることが荒川によりわかっている。

(2) 我々の次数 2 の志村対応予想を仮定すれば、ヤコービ形式 $f_{2,t}$ に対応するウェイト $det^{j+3} Sym(2k-6)$ のジーゲル保型形式 F があって $L_2(k, f_{2,t}) = L(2k+j-4, F, Sp)$ となる。ここで $L(s, F, Sp)$ は F のスピノールゼータである。ジーゲル保型形式では標準 L 函数しか現れなかったので、この点は大きな違いである。ここで $k' = j+3$, $j' = 2k-6$ とすると $2k+j-4 = k'+j'-1$ は F の臨界点である。F の臨界点全部の集合は $k'-1$, k', $\ldots$, $k'+j'-1$ であり、 今出てきたのは最右端の点である。しかし、微分作用素 $\mathbb{D}$ を $\rho = det^l Sym(j)$ と det の巾も増やすようにとれば、また函数等式も考慮に入れれば、ここに登場する臨界点を増やすことができて、特に $12 \le j$ ならば、F のすべての臨界点が pullback formula に現れる。($E_{k,1}^{(4),J}$ の収束範囲による限界などがある。実解析的アイゼンシュタイン級数については調べていない。)

(3) 一般の c_2 の値は不明だが $c_2 \neq 0$ は知られているので、私の志村対応予想下では、スピノール L 函数の上記の特殊値の代数性も示せる。

(4) ヘッケ固有値の代数性、整数性、ヤコービ形式のフーリエ展開の有理性 (ヘッケ固有値とフーリエ係数が同じ体でとれる）などは、上の条件下で pullback formula よりすべて出る。([21] と同様)

(5) フーリエ係数の適当な条件下、およびリフトと非合同という条件下で、半整数ウェイトの Harder 予想が一般的に証明できる。特に $L(2k+j-3, f) = L(k'+j', f)$ を割る素イデアルでの合同になるので、これは合同素数に L 函数の特殊値がでることの説明になっている。証明は桂田氏の論法をそのまま用いれば良いが、必要とする種々の仮定はあまり美しいとはいえないのが欠点である。

References

[1] T. Arakawa, Jacobi Eisenstein series and a basis problm for Jacobi forms, Comment. Math. Univ. St. Pauli **43** (1994), 181–216.

[2] S. Böcherer, Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. II. Math. Z. 189 (1985), 81–110.

[3] S. Böcherer, T. Satoh and T. Yamazaki, On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series. Comment. Math. Univ. St. Pauli **41** (1992), 1–22.

[4] S. Böcherer and R. Schulze-Pillot, Siegel modular forms and theta series attached to quaternion algebras II, Nagoya Math. J. **147**(1997).71–106.

[5] P. B. Garrett, Pullbacks of Eisenstein series, applications, *Automorphic forms of several variables (Katata, 1983)*, Prog. Math.**46** (1984). 114–137.

[6] J. A. Green, Polynomial Representations of GL_n, Lecture Notes in Math. **830**. Second Edition with an Appendix on Schensted Correspondence and Littlemann Paths, by K. Erdmann, J. A. Green and M. Schocker, Springer, Berlin, Newyork (2007). vi+161.

[7] G. Harder, A congruence between a Siegel and an elliptic modular forms, Colloquium Bonn, February 7, 2003. Preprint pp.15.

[8] T. Ibukiyama, On differential operators on automorphic forms and invariant pluriharmonic polynomials, Commentarii Math. Univ. St. Pauli 48(1999), 103–118.

[9] T. Ibukiyama, A Conjecture on a Shimura type correspondence for Siegel modular forms, and Harder's conjecture on congruences, Modular Forms on Schiermonnikoog Edited by Bas Edixhoven, Gerard van der Geer and Ben Moonen, Cambridge University Press (2008), 107–144

[10] T. Ibukiyama, T. Kuzumaki and H. Ochiai, Holonomic systems of Gegenbauer type polynomials of matrix arguments related with Siegel modular forms, J. Math. Soc. Japan Vol. 64 No.1(2012), 273-316.

[11] T. Ibukiyama, Conjectures of Shimura type and of Harder type revisited, Comment. Math. Univ. St. Pauli Vol. 63(2014), 79–103

[12] T. Ibukiyama, One-line formula for automorphic differential operators on Siegel modular forms, Abhand. Math. Semi. Univ. Hamburg. **89** (2019), 17–43.

[13] T. Ibukiyama, Generic differential operators on Siegel modular forms and special polynomials, preprint.

[14] T. Ibukiyama, Pullback formula for Jacobi forms and Hader's conjecture on congruences, in preparation.

[15] H. Katsurada and S. Mizumoto, Congruences for Hecke eigenvalues of Siegel modular forms, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **82**(2012), 129–152.

[16] N. Kozima, Gar r ett's pullback formula for vector valued Siegel modular forms, J. Number Theorey **128**(2008), 235–250.

[17] S. Mizumoto, Poles and residues of standard L-functions attached to Siegel modular forms, Math. Ann. **289**(1991), 589–612.

[18] A. Murase, L-function attached to Jacobi forms of degree n, Part I, The basic identity, J. reine angew. Math. 401(1989), 122-156.

[19] A. Murase, L-function attached to Jacobi forms of degree n, Part II, Functional equation. Math. Ann. **290**(1991). 247–276.

[20] A. Murase and T. Sugano, Whittaker-Shintani functions on the symplectic group of Fourier-Jacobi type, Compositio Math. **79**(1991),321-349.

[21] Y. Takei, On algebraicity of vector valued Siegel modular forms, Kodai Math. J. **15** (1992), 445–457.

Department of Mathematics, Graduate School of Mathematics, Osaka University, Machikaneyama 1-1, Toyonaka,Osaka, 560-0043 Japan

E-mail address: `ibukiyam@math.sci.osaka-u.ac.jp`