Transcendence of digital expansions and formal power series generated by a generalized Rudin-Shapiro sequence

早稲田大学基幹理工学部数学科 宮之原 永士
Eiji Miyanohara
Major in Pure and Applied Mathematics
Graduate School of Fundamental Science and Engineering
Waseda University

1 Introduction

はじめに, 自然数の k 進展開（$2 \leq k \in \mathbb{N}$ とする）から決まる数列が生成する実数の超越性に関する研究 [Mi1] を紹介する; このとき自然数 n の k 進展開を次で定義する.

$$n = \sum_{q=0}^{\infty} s_{n,q} k^q,$$

ただし $0 \leq s_{n,q} \leq k-1$.

$1 \leq s \leq k-1$, $y \in \mathbb{N}$ とする. 関数 $d(n; sk^y)$ を次で定義する,

$$d(n; sk^y) := \begin{cases} 1 & n \text{ を } k \text{ 進展開したときに } sk^y \text{ が現れる}, \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases}$$

$2 \leq L \in \mathbb{N}$ とする. 写像 $\mu : \{1, \ldots, k-1\} \times \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, L-1\}$ と $d(n; sk^y)$ を用いて数列 $(a(n))_{n=0}^{\infty}$ を定義する.

$$a(n) \equiv \sum_{y=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{k-1} \mu(s, y) d(n; sk^y) \pmod{L}, \tag{1.1}$$

ただし $0 \leq a(n) \leq L-1$, $a(0) = 0$. これを (L, k, μ) 型の Thue-Morse 数列と呼ぶ.(L, k, μ)-TM と略記する. 私は [Mi1] において次の結果を得た.

Theorem 1 (Mi1) $L \le \beta \in \mathbb{N}$ とする．このとき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(N+ln)}{\beta^{n+1}}$ ($\forall N \ge 0, \forall l \ge 1$) は 次の場合を除いて超越数である; ある自然数 A が存在して次の関係式をみたす．

$$\mu(s, A+y) \equiv \mu(1, A) s k^y \pmod{L},$$

ただし　$\forall 1 \le s \le k-1$, $\forall y \in \mathbb{N}$.

上の定理から自然数の k 進展開に関連する非可算個の超越数を見つけることができる．更に (L, k, μ) 型の Thue-Morse 数列は非周期であれば, その任意の算術的部分数列も超越数を生成することが分かる．またこの定理は Morton-Mourant [MortM] による Theorem7 の数列が k-automatic でない場合とその算術的部分数列に対しての一般化である．(k-automatic sequence から生ずる級数の超越性に関する研究)

Remark 1 (L, k, μ)-TM が非周期であれば, 有限文字からなる数列の等差数列に関する Van der Waerden の定理と上の定理から $\#\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(N+nl)}{\beta^{n+1}} | \forall N \ge 0, \forall l > 0\} = \infty$ が分かる．

Remark 2 2 以上の整数 β に対して, 以下の実数の集合 N_β を定義する．
$N_\beta := \{\zeta = a(0).a(1) \cdot\cdot a(n) \cdot\cdot |$ 任意の算術的部分数列 $(a(N+nl))_{n=0}^{\infty}$ は非周期$\}$ とする（ただし上の式の右辺は実数 ζ の β 進展開を表す）．正規数に関する Borel の定理から, ほとんど全ての実数は N_β に含まれる．

証明の方針は, 無限積関数 $\prod_{y=0}^{\infty}(1+\sum_{s=1}^{k-1} \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}\mu(s,y)}{L} z^{sk^y})$ を考えることで (L, k, μ)-TM に対応する巡回置換から生成される語を定義する．(L, k, μ)-TM の定義と自然数の k 進展開の性質から級数の無理性を導く．巡回置換から生成される語の定義から, Adamczewski-Bugeaud-Luca [ABL] による組み合わせ超越判定法を級数に適用することで代数的無理数でないことを導く．この二つを組み合わせることで定理を得る．

　次に Tachiya [Ta] による無限積関数の特殊値の超越性に関する研究を紹介する; α を代数的数とするとき, $||\alpha||$ で α の分母と共役の絶対値の最大値をあらわす．ここで K を代数体とし, z を複素変数とする. このとき次の無限積関数 $\Phi_0(z)$ を定義する．

$$\Phi_0(z) := \prod_{y=0}^{\infty}(1+\sum_{s=1}^{k-1} a_{s,y} z^{sk^y}),$$

ただし $a_{s,y} \in K$ かつ $\log ||a_{s,y}|| = O(k^y)$．$\alpha$ を代数的数とし, $0 < |\alpha| < 1$ かつ $1+\sum_{s=1}^{k-1} a_{s,y}\alpha^{sk^y} \ne 0$ ($\forall y \in \mathbb{N}$) を満たすとする．このとき Tachiya [Ta] は次を示した．([Ta] の Theorem 1 と Theorem 6 (i), (ii) を参照)

Theorem 2 (Ta) $\Phi_0(\alpha)$ が代数的数であれば, 次の二つのいずれかを満たす;

(1) 十分大きい任意の y と $1 \leq s \leq k-1$ に対して

$$a_{s,y} = 0.$$

(2) 十分大きい任意の y と $1 \leq s \leq k-1$ に対して

$$a_{s,y} = \zeta^{sk^y},$$

ただし ζ は 1 のべき根とする.

この定理の証明は [DN] において開発された inductive method を無限積関数 $\Phi_0(z)$ に適用することでなされる. 最近では Amou-Väänänen [AmV1], [AmV2] らにより $\Phi_0(z)$ の特殊値の超越測度や代数的独立性が研究されている.

ここで Theorem 1 と Theorem 2 の関連を述べる; 実は (L,k,μ)-TM $(a(n))_{n=0}^{\infty}$ の周期性を Theorem2 における $\Phi_0(z)$ の有理関数性の考察からも導ける. ただし, その算術的部分数列 $(a(N+ln))_{n=0}^{\infty}$ の周期性は現時点では Theorem2 における $\Phi_0(z)$ の有理関数性の考察から導かれないと思われる. 逆に $\Phi_0(z)$ において任意の $a_{s,y}$ が 1 の L べき根であれば, 次の関数の超越性が Theorem1 における $(a(N+ln))_{n=0}^{\infty}$ の周期性の考察から導かれる,

$$\Phi_{0,N,l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{N+ln} z^n$$

ただし, $\Phi_0(z) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とする. 更に Theorem1 において $(a(n))_{n=0}^{\infty}$ が 0 と 1 からなる場合, Theorem2 において任意の $a_{s,y}$ が 1 または -1 の場合を考えることで, 相互に新しい超越数を見つけることができる. 具体的には $\Phi_{0,N,l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{N+ln}\beta^n$ の超越性などが分かる. それぞれの証明方法は, Theorem1 が Adamczewski-Bugeaud-Luca [ABL] による組み合わせ超越判定法に依存しており（本稿ではこの手法を組み合わせ的超越数論と呼ぶ）, Theorem2 が Mahler 関数（関数等式）の理論に依存している [DN], [LP], [N]. これらから Theorem1 は Theorem2 の組み合わせ的類似とみなせる（Morton-Mourant [MortM] の Theorem7 は [N] の Example1.3.1 に対応している）. このように組み合わせ的超越数論と Mahler 関数の理論はしばしば類似または同一の結果を導く.

本稿では,(L,k,μ) 型の Thue-Morse 数列をパターン数列の剰余類による数列をもとに一般化し, Theorem1 の一般化及び Theorem2 の行列型無限積関数への一般化を論じる.

2 Generalized Rudin-Shapiro sequence and Main results

最初に有名なパターン数列の剰余類による数列 Rudin-Shapiro sequence を3通り（数列, 語, 母関数）の定義で紹介する; まず Rudin-Shapiro sequence $(r(n))_{n=0}^{\infty}$ の自然数の 2 進表示に関するパターン数列の剰余類による定義を与える.

$$r(n) := \begin{cases} 1 & n \text{ の 2 進表示に 11 が奇数個現れる}, \\ 0 & \text{それ以外}. \end{cases}$$

次に Rudin-Shapiro sequence $(r(n))_{n=0}^{\infty}$ の巡回置換を用いて連立再帰的に定義される語の極限としての定義を与える ([Ab]). $\{0,1\}^*$ で $\{0,1\}$ が生成する語の空間とする. ここで $\{0,1\}^*$ から $\{0,1\}^*$ への語の準同型 f を以下で定める.

$$f(0) = 1, f(1) = 0.$$

$A_0 = 0$, $B_0 = 0$ とする. 長さ 2^{n+1} の 2 つの語 A_{n+1} と B_{n+1} を以下のように連立再帰的に定義する.

$$\begin{aligned} A_{n+1} &:= A_n B_n, \\ B_{n+1} &:= A_n f(B_n). \end{aligned}$$

ここで $A_\infty := \lim_{n\to\infty} A_n$ は一つの無限語を定め, この語は Rudin-Shapiro sequence に一致する.
最後に Rudin-Shapiro sequence $(r(n))_{n=0}^{\infty}$ の母関数による定義を与える. z を複素変数とし, $P_0(z) = 1$, $Q_0(z) = 1$ とする. 次数 $2^{n+1} - 1$ の 2 つの多項式 $P_{n+1}(z)$ と $Q_{n+1}(z)$ 以下のように連立再帰的に定義する.

$$\begin{aligned} P_{n+1}(z) &:= P_n(z) + z^{2^n} Q_n(z), \\ Q_{n+1}(z) &:= P_n(z) - z^{2^n} Q_n(z). \end{aligned}$$

$P_\infty(z) := \lim_{n\to\infty} P_n(z) = \lim_{n\to\infty} Q_n(z)$ は一つの収束冪級数を与え, これは Rudin-Shapiro sequence の母関数とみなせる.（0 を 1, 1 を -1 に移したものだと思えばよい）
ここで $P_\infty(z)$ は定義からつぎのような行列型無限積表示をもつ.

$$\begin{pmatrix} P_\infty(z) \\ P_\infty(z) \end{pmatrix} = \prod_{n=0}^{\overleftarrow{\infty}} \begin{pmatrix} 1 & z^{2^n} \\ 1 & -z^{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} := \lim_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & z^{2^n} \\ 1 & -z^{2^n} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

この 3 つの対応をもっと広いクラスで一般化することを考える.

Remark 3 (AlRB, Ni) *Rudin-Shapiro sequence* の母関数に対して次の関数等式 *(Mahler 関数, [Ni] を参照)* が知られている,

$$\begin{pmatrix} P_\infty(z) \\ P_\infty(-z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z^2 \\ 1 & -z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_\infty(z^2) \\ P_\infty(-z^2) \end{pmatrix}$$

この関数等式から $P_\infty(z)$ は次の行列型無限積表示ももつ.

$$\begin{pmatrix} P_\infty(z) \\ P_\infty(-z) \end{pmatrix} = \prod_{n=0}^{\overrightarrow{\infty}} \begin{pmatrix} 1 & z^{2^n} \\ 1 & -z^{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} := \lim_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & z^{2^n} \\ 1 & -z^{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

二つの行列型無限積表示は $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に $\lim_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & z^{2^n} \\ 1 & -z^{2^n} \end{pmatrix}$ と $\lim_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & z^{2^n} \\ 1 & -z^{2^n} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{pmatrix}$ をそれぞれ作用させて得られる. この二つの作用は逆に行列を掛け算しているので, その非可換性が得られるベクトルの第 2 成分に現れている.

ここで Rudin-Shapiro sequence を自然数の 2 進表示に関する定義を基に次のように一般化する; $2 \leq d$ を整数とし, $0 \cdots 0 \neq P = p_1 p_2 \cdots p_d \in \{0, 1, \cdots, k-1\}^d$ をパターンとする. 0 以上の y に対して, 関数 $d(n; p_d k^y + \cdots + p_1 k^{y+d-1})$ を次で定義する,

$$d(n; p_d k^y + \cdots + p_1 k^{y+d-1}) := \begin{cases} 1 & \exists q \text{ such that,} \\ & s_{n,q} k^q + \cdots + s_{n,q+d-1} k^{q+d-1} \\ & = p_d k^y + \cdots + p_1 k^{y+d-1}. \\ 0 & \text{それ以外.} \end{cases}$$

写像 $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, L-1\}$ を一つ決める. $d(n; p_d k^y + \cdots + p_1 k^{y+d-1})$ と μ を用いて数列 $(a(n))_{n=0}^{\infty}$ を次で定める.

$$a(n) \equiv \sum_{y=0}^{\infty} \mu(y) d(n; p_d k^y + \cdots + p_1 k^{y+d-1}) \pmod{L},$$

ただし $0 \leq a(n) \leq L-1$ かつ $a(0) = 0$. $(a(n))_{n=0}^{\infty}$ を (L, k, P, μ) 型 Rudin-Shapiro sequence と呼ぶ, 簡単のため (L, k, P, μ)-RS 数列と略す. このとき私は次を示した.

Theorem 3 (Mi2) *$(a(n))_{n=0}^{\infty}$ を (L, k, P, μ)-RS 数列 と略する. $\beta \geq L$ を整数とする. もし次のような整数 A が存在しなければ*

$$\mu(y) = 0 \pmod{L}$$

$A \leq \forall y \in \mathbb{N}$, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(N+nl)}{\beta^{n+1}}$ ($\forall N \geq 0$, $\forall l > 0$) は S-, T-, もしくは *Liouville number.*

Theorem3 は Theorem1 を (L, k, P, μ)-RS に対して一般化したものである.

Remark 4 ζ を実数とする. $w_n(\zeta)$ を次を満たす実数の上限 w とする*;* 次の不等式を満たす高々次数 n 以下の整数係数多項式 $R(x)$ が無限個存在する,

$$0 < |R(\zeta)| \leq \frac{1}{H(R)^w}$$

ただし $R(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ かつ $H(R) = \max\{|c_i| \mid 0 \leq i \leq n\}$. $w(\zeta) := \lim_{n=1}^{\infty} \sup \frac{w_n(\zeta)}{n}$ とおく. 実数に対して $w(\zeta)$ と $w_n(\zeta)$ を用いて以下の 4 つの分類を与える.

$w(\zeta) = 0$ なら *A-number.*

$0 < w(\zeta) < +\infty$ なら *S-number.*

$w(\zeta) = +\infty$ かつ $w_n(\zeta) < +\infty$ $1 \leq \forall n$ なら *T-number.*

$w(\zeta) = +\infty$ かつ $w_n(\zeta) = +\infty$ $1 \leq \exists n$ なら *U-number.*

特に ζ が $w(\zeta) = +\infty$ かつ $w_1(\zeta) = +\infty$ であるものは *Liouville number.*

また次の行列型無限積表示をもつ関数の特殊値の超越性が Theorem3 から従う; $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) z^n$ を次の行列型無限積表示をもつとする,

$$\begin{pmatrix} f(z) \\ f(z) \end{pmatrix} = \prod_{y=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1 & z^{2^y} \\ 1 & \mu(y) z^{2^y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ただし $\mu(y) \in \{1, -1\}$ かつ $\#\{y \mid \mu(y) = -1\} = \infty$.

Corollary 1 (Mi2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(N+ln)}{\beta^{n+1}}$ ($\forall N \geq 0$, $\forall l > 0$) は S-, T-, もしくは *Liouville number,* ただし $\beta \geq 2$ は整数とする.

この系は Tachiya [Ta] の無限積関数を

$$(\Phi_0(z)) = \prod_{y=0}^{\infty} (1 + \sum_{s=1}^{k-1} a_{s,y} z^{sk^y})(1)$$

と見れば Theorem2 の行列型無限積への一般化のひとつとみなせる.

3 証明の方針

証明は級数の無理性と非代数的無理数性の 2 つを証明し, 組み合わせることで得られる;
まず無理性は以下の定理から従う.

Theorem 4 *$(a(n))_{n=0}^{\infty}$ を (L,k,P,μ)-RS 数列とする. $(a(n))_{n=0}^{\infty}$ が周期を持つ必要十分条件は次のような自然数 A が存在することである;*

$$\mu(y)=0$$

$A \leq \forall y \in \mathbb{N}$.
更に (L,k,P,μ)-RS 数列が非周期であれば, その任意の算術的部分数列も非周期である.

証明は非周期性は自然数の k 進展開に関する補題 ([M1] の Lemma13) , 周期性は (L,k,P,μ)-RS 数列の定義をそれぞれ用いることでなされる.
級数の非代数的無理数性を示すために, まず Adamczewski-Bugeaud による定量的組み合わせ的超越性判定法 [AdB2] を紹介する. $(a(n))_{n=0}^{\infty}$ を $\{0,1,\cdots,L-1\}$ 上の数列とする. $(a(n))_{n=0}^{\infty}$ に対して complexity function $p(m,(a(n))_{n=0}^{\infty})$ を以下で定義する,

$$p(m,(a(n))_{n=0}^{\infty})=\#\{a(j)a(j+1)\cdots a(j+m-1)\ |j\geq 0\}.$$

更に $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathfrak{CL}$ を以下で定義する,

$$\mathfrak{CL}:=\{\zeta\in\mathbb{R}|\ \text{次のような整数}\ \beta>1\ \text{が存在する;}$$
$$p(m,(a(n))_{n=0}^{\infty})=O(m)\ \text{ただし}\ \zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(n)}{\beta^{n+1}}\}.$$

Adamczewski-Bugeaud[AdB2] は次の結果を定量的部分空間定理を用いて示した.

Theorem 5 (定量的組み合わせ的超越性判定法 [AdB2]) *$\zeta\in\mathfrak{CL}$ かつ $\zeta\notin\mathbb{Q}$. ζ は S-, T-, もしくは Liouville number.*

(L,k,P,μ)-RS 数列を上の定理に適用するために, (L,k,P,μ)-RS 数列に対して巡回置換を用いた連立再帰的な語による定義を与える.
$2\leq L\in\mathbb{N}$ で $a_0,a_1,\cdots,a_{L-1}\in\mathbb{C}$ を L 個の異なる複素数とする. $\{a_0,a_1,\cdots,a_{L-1}\}^*$ を $\{a_0,a_1,\cdots,a_{L-1}\}$ で生成される語の空間とする. $\{a_0,a_1,\cdots,a_{L-1}\}^*$ から $\{a_0,a_1,\cdots,a_{L-1}\}^*$ への語の準同型 f を以下で定める,

$$f(a_i)=a_{i+1}\pmod{L}$$

$f^j:=f$ の j 回合成とし, $f^0:=$ は恒等写像とする. このとき次の定義を与える.

Definition 3.1 写像 $\mu : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1,\ldots,L-1\}$ とパターン $P = p_1 \cdots p_d$ で $p_1 \neq 0$ を満たすものとする．$A_{0,0} = a_0, \cdots A_{d-1,0} = a_0$ とする．長さ k^{y+1} の d 個の語 $A_{0,y+1}, \cdots, A_{d-1,y+1}$ を以下のように再帰的に定義する，

$$
\begin{aligned}
A_{0,y+1} &:= \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{p_1} A_{1,y} \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{k-p_1-1}, \\
A_{1,y+1} &:= \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{p_1} A_{1,y} \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{p_2-p_1-1} A_{2,y} \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{k-p_2-1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\
A_{s,y+1} &:= \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{p_1} A_{1,y} \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{p_{s+1}-p_1-1} A_{s+1,y} \underbrace{A_{0,y} \cdots}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\
A_{d-1,y+1} &:= \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{p_1} A_{1,y} \underbrace{A_{0,y} \cdots A_{0,y}}_{p_d-p_1-1} f^{\mu(y)}(A_{i,y}) \underbrace{A_{0,y} \cdots},
\end{aligned}
$$

ただし $0 \leq i \leq d-1$．また $p_{s+1} = p_i$ を満たす i があれば $A_{i,n}$ を $A_{s+1,n}$ に置き換える．
$A_\infty := \lim_{n\to\infty} A_{0,n}$ は無限語を一意に定め，A_∞ は (L,k,P,μ)-*RS*($P = p_1 \cdots p_d$ で $p_1 \neq 0$ の場合）の連立再帰的な語による定義である（命題）．

Definition 3.2 パターン $P = \underbrace{0 \cdots 0}_{t} p_1 \cdots p_d$ で $p_1 \neq 0$ を満たすものには以下の定義を与える;
$A_{0,0} = a_0, \cdots A_{t,0} = a_0, A^{1,0} = a_0, \cdots A^{d-1,0} = a_0$ とする．
長さ k^{y+1} の $d+t$ 個の語 $A_{0,y+1}, \cdots, A_{t,y+1}, A^{1,y+1}, \cdots A^{d-1,y+1}$ を以下のように再帰的に定義する，

$$
\begin{aligned}
A_{0,y+1} &:= A_{0,y} \underbrace{A_{1,y} \cdots A_{1,y}}_{p_1-1} A^{1,y} \underbrace{A_{1,y} \cdots A_{1,y}}_{k-p_1-1}, \\
A_{1,y+1} &:= A_{2,y} \underbrace{A_{1,y} \cdots A_{1,y}}_{k-1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\
A_{t-1,y+1} &:= A_{t,y} \underbrace{A_{1,y} \cdots A_{1,y}}_{k-1}, \\
A_{t,y+1} &:= A_{0,y} \underbrace{A_{1,y} \cdots A_{1,y}}_{k-1},
\end{aligned}
$$

$$A^{1,y+1} := A_{2,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{p_2-1}A^{2,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{k-p_2-1},$$
$$A^{2,y+1} := A_{2,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{p_3-1}A^{3,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{k-p_3-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$
$$A^{s,y+1} := A_{2,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{p_{s+1}-1}A^{s+1,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{k-p_{s+1}-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$
$$A^{d-1,y+1} := A_{2,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{p_d-1}f^{\mu(y)}(A_{1,y})\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{k-p_d-1}.$$

$A_\infty := \lim_{n\to\infty} A_{0,n}$ は無限語を一意に定め，A_∞ は (L,k,P,μ)-RS ($P = \underbrace{0\cdots0}_{t}p_1\cdots p_d$ で $p_1 \neq 0$ の場合）の連立再帰的な語による定義である（命題）．

Remark 5 パターン $P = \underbrace{0\cdots0}_{t}p_1$ の場合．$A_{0,0} = a_0, \cdots A_{t,0} = a_0$ とする．長さ k^{y+1} の $d+t$ 個の語 $A_{0,y+1}, \cdots, A_{t,y+1}$ を以下のように再帰的に定義する，

$$A_{0,y+1} := A_{0,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{p_1-1}f^{\mu(y)}(A_{1,y})\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{k-p_1-1},$$
$$A_{1,y+1} := A_{2,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{k-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$
$$A_{t-1,y+1} := A_{t,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{k-1},$$
$$A_{t,y+1} := A_{0,y}\underbrace{A_{1,y}\cdots A_{1,y}}_{k-1},$$

$A_\infty := \lim_{n\to\infty} A_{0,n}$ は無限語を一意に定め，A_∞ は (L,k,P,μ)-RS ($P = \underbrace{0\cdots0}_{t}p_1$ の場合）の連立再帰的な語による定義である．

この 2 つの定義から (L,k,P,μ)-RS 及びその任意の算術的部分数列から生成される級数が $\mathfrak{CL}$ に含まれることがわかる．ここから非代数的無理数性とその

定量性が導かれ, Theorem4 と組み合わせることで Theorem 3 を得る.

$(2, k, P, \mu)$-RS($P = 11$ の場合) において $\{0, 1\}$ を $\{1, -1\}$ に対応させることで Corollary1 が Theorem3 から容易に従う．更に $(2, k, P, \mu)$-RS の場合は Theorem3 から Corollary1 の一般化が従い更に超越数がみつかる．また $\zeta := \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{L}$ とすると，(L, k, P, μ)-RS の場合は $\{0, 1, \cdots, L-1\}$ を $\{1, \zeta, \cdots, \zeta^{L-1}\}$ に対応させることで Theorem 4 と Szegő の定理 [Di]（係数に有限個の複素数しか現れない収束冪級数の自然境界に関する定理）から行列型無限積表示をもつ収束冪級数から多くの有理関数体上超越的なものが見つけられる.

4 最後に: 行列型無限積表示をもつ収束冪級数について

今回は自然数の k 進展開に関して比較的明確な意味をもつ数列と対応する行列型無限積表示をもつ収束冪級数について考察したが, 自然数の k 進展開に関して明確でない意味をもつ数列（自然数の k 進展開に関連はしている）と対応する行列型無限積表示をもつ収束冪級数に対しても同様の問題は考えられる．現在研究を進めている．また行列型無限積表示をもつ収束冪級数は Remark 3 よりもう一種類考えられる（私はこの関数は Mahler 関数側の話だと考えています.）これらに対しても同様の問いがあると思われる．またこれらの 2 つの行列型無限積表示の関係についても研究を進めている.

5 謝辞

今回の講演、執筆の機会をいただきありがとうございました。また私の拙い講演を聴いて頂きありがとうございました。最後にこの資料を読んでいただきありがとうございます。

References

[Ab] E. H. El Abdalaoui, *The Rudin-Shapiro polynomials and The Fekete polynomials are not L^α-flat*, arXiv:1603.04095.

[AdB1] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, *On the complexity of algebraic numbers I*, Ann. of Math. 165 (2007), 547-565.

[AdB2] B. Adamczewski, and Y. Bugeaud, Nombres rels de complexit sous-linaire: mesures d'irrationalit et de transcendence, *J. Reine Angew. Math.***606** (2011), 105-121.

[AdBL] B. Adamczewski, Y. Bugeaud and F. Luca, *Sur la compléxite des nombres algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 339 (2004),11-14.

[AlRB] J.-P.Allouche, B.Rand and L.Thimonier, *Fonctions gnratrices transcendantes coefficients engendrs par automates*, STACS 88 (Bordeaux, 1988), 170183, Lecture Notes in Comput. Sci., 294, Springer, Berlin, 198

[AlS1] J. P. Allouche and J. Shallit, *Infinite products associated with counting blocks in binary strings*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1992), (1989), no. 2, 193-204

[AlS2] J.-P. Allouche and J. Shallit, *The ring of k-regular sequences*, Theoret. Comput. Sci. 98 (1992), no. 2, 163-197.

[AlS3] J.-P. Allouche and J. Shallit, *Sums of digits, overlaps, and palindromes*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 4 (2000), no. 1, 1-10.

[AlS4] J.-P. Allouche and J. Shallit, *The ring of k-regular sequences. II*, Theoret. Comput. Sci. 307 (2003), no. 1, 3-29.

[AmV1] M.Amou and K.Väänänen, *Arithmetical properties of certain infinite products*, J. Number Theory 153 (2015), 283303.

[AmV2] M,Amou and K.Vnnen, *On algebraic independence of a class of infinite products*, J. Number Theory 172 (2017), 114132.

[BeR] V. Berthe and M. Rigo, *Combinatorics, Automatia and Number Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 135,Cambridge University Press 2010(1994).

[Bu] Y. Bugeaud, *Distribution modulo one and Diophantine approximation*, Cambridge Tracts in Mathematics 193.

[Di] P.Dienes, *The Taylor series: an introduction to the theory of functions of a complex variable*, Dover Publications, Inc., New York, 1957. x+552 pp. 30.0X

[DuN] D. Duverney and K. Nishioka, *An inductive method for proving the transcendence of certain series*, Acta Arith. 110 (4) (2003) 305330

[Fo] N. P. Fogg, *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics Springer; (2002).

[Fr] Frid. A. E, *Overlap-free symmetric D0L words*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 4 (2001), no. 2, 357-362

[LP] J.H. Loxton, and A.J. van der Poorten, *Arithmetic properties of certain functions in several variables III*, Bull. Austral. Math. Soc. 16 (1977) 1547

[Mi1] E. Miyanohara, *Transcendence of Digital Expansions Generated by a Generalized Thue-Morse Sequence*, J. Integer Sequences18 (2015), Article 15.9.2

[Mi2] E. Miyanohara, *Transcendence of digital expansions and formal power series generated by a generalized Rudin-Shapiro sequence*, preprint

[MorgSS] J. F. Morgenbesser, J. Shallit, T. Stoll, *Thue-Morse at multiples of an integer*, J. Number Theory 131 (2011), no. 8, 1498-1512.

[MortM] P. Morton and W. J. Mourant, *Digit patterns and transcendental numbers*, J. Australian. Math. Soc 51, (1991).

[N] K. Nishioka, *Mahler Functions and Transcendence*, LectureNotes in Mathmatics Springer; (1996).

[ST] I. Shiokawa and Y.Tachiya, *Linear relations between pattern sequences in a <q,r>-numeration system*, Acta Math. Hungar. 132 (2011), no. 1-2, 190-206.

[Ta] H.Tachiya, *Transcendence of certain infinite products*, J. Number theorey. 125 (2007), no.1, 182-200.

[Th] A. Thue, *Selected Mathematical Papers of AXEL THUE*, Universitetsforlaget (1977).

[U1] Y. Uchida, *Algebraic independence of power series that are defined in terms of blocks of digits. (Japanese) Analytic number theory (Japanese) (Kyoto, 1995)*, Surikaisekikenkyusho Kokyuroku No. 961 (1996), 150-160.

[U2] Y. Uchida, *Algebraic independence of the power series defined by blocks of digits*, J. Number Theory 78 (1999), no. 1, 107-118.