

**ON THE VALUE-DISTRIBUTION OF THE  
DIFFERENCE BETWEEN LOGARITHMS OF TWO  
SYMMETRIC POWER  $L$ -FUNCTIONS  
(二つの対称べき  $L$  関数の対数の差の値分布について)**

KOHJI MATSUMOTO AND YUMIKO UMEGAKI  
(松本耕二・梅垣由美子)

1. RIEMANN ゼータ関数の値分布

本稿で報告する主結果は保型形式に付随するある種の  $L$  関数に関するものであるが、問題意識を明瞭にするため、まずは Riemann ゼータ関数の値分布に関する古典的な Bohr-Jessen の定理から話を始めることにする。

よく知られているように、Riemann ゼータ関数は

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s = \sigma + it \in \mathbb{C})$$

として半平面  $\sigma > 1$  において定義され、全複素平面に有理型に解析接続される。その解析的な挙動を調べることは整数論において極めて重要である。関数等式によって  $\zeta(1-s)$  が  $\zeta(s)$  を用いて記述できることに注意すれば、複素平面の右半分、つまり  $\sigma \geq 1/2$  での挙動が解明できれば十分である、と考えられる。

Bohr と Jessen [1] は、 $\sigma > 1/2$  なる  $\sigma$  をひとつ固定して、直線  $\Re s = \sigma$  上の点における  $\log \zeta$  の取る値の分布を調べた。複素平面内の有界な Jordan 可測集合  $A$  をひとつ定め、 $T > 0$  に対し

$$L(T, A) = \mu\{t \in [-T, T] \mid \log \zeta(\sigma + it) \in A\}$$

と定義<sup>1</sup> する。ただし  $\mu$  は通常の一次元 Lebesgue 測度である。すると、 $L(T, A)$  を  $T$  で割った商は  $\log \zeta(\sigma + it)$  ( $-T \leq t \leq T$ ) が集合  $A$  に含まれる「割合」を示しているので、この商の  $T \rightarrow \infty$  のときの極限值が存在すれば、その値は、直線  $\Re s = \sigma$  上で  $\log \zeta$  の値が  $A$  に含まれる「確率」と見なせるだろう。Bohr と Jessen が証明したことは、まさしくこの極限値の存在である。

---

<sup>1</sup>ここでは Riemann 予想は仮定していないので、 $1/2 < \sigma < 1$  であれば直線上に  $\zeta(s)$  の零点が存在する可能性があり、その点では  $\log \zeta(s)$  を定義できない。しかしそのような点は高々可算個なので、測度の値には影響しない。

**定理 1** (Bohr-Jessen) 任意の  $\sigma > 1/2$  に対して、極限值

$$W(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{L(T, A)}{2T}$$

が存在する。

この定理はその後、いろいろな別証明が与えられたり、より一般のゼータ関数、 $L$  関数への一般化がなされたりした。現在では、Euler 積を持つような非常に一般的なゼータ関数のクラスについて、上の定理の類似が成り立つことが分かっている。(Matsumoto [13])

実は Bohr-Jessen の結果は、単なる存在証明ではなく、具体的に構成可能な、連続な密度関数  $F_\sigma^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在して、

$$(1.1) \quad W(A) = \int_A F_\sigma^{\mathbb{C}}(w) \frac{dudv}{2\pi} \quad (w = u + iv \in \mathbb{C})$$

と書けることまで含んでいる。上述した一般化 [13] においては、こうした積分表示は得られていないことを注意しておく。

## 2. DIRICHLET $L$ 関数の値分布

さて、前節で紹介した Bohr-Jessen の結果は、 $t$  を動かしたときの値分布を論じており、いわば  $t$ -aspect の結果である。Riemann ゼータ関数のみを考えるならば、 $t$ -aspect がおそらくは唯一の意味のある aspect かもしれない。しかし、より一般の種々のゼータ関数、 $L$  関数を考えるならば、他の種々の aspect を考察することが重要になって来る。

例えば  $\chi$  を mod  $q$  の Dirichlet 指標とし、付随する Dirichlet  $L$  関数  $L(s, \chi)$  を考えた場合、 $t$ -aspect のみならず、 $q$ -aspect の考察が重要であるというのは周知のことであろう。従って Dirichlet  $L$  関数の値分布の  $q$ -aspect からの研究は何人も数学者によってなされているが、ここでは Ihara (および Ihara-Matsumoto) の結果を取り上げる。

Ihara [5] は代数体と関数体の両方の場合に、 $L$  関数の対数微分の値分布を考察して、(1.1) に類似した極限定理を  $\sigma > 1$  に対して (関数体の場合にはさらに臨界領域に踏み込んで) 示した。この論文における着想を、Dirichlet  $L$  関数の対数の場合にさらに深化させて、Ihara-Matsumoto [8] は次の結果を得た。

**定理 2** (Ihara-Matsumoto)  $\sigma > 1/2$  とする。具体的に構成可能な、連続な密度関数  $M_\sigma^{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在して、

$$(2.1) \quad \text{Avg}_\chi \Psi(\log L(s, \chi)) = \int_{\mathbb{C}} M_\sigma^{\mathbb{C}}(w) \Psi(w) \frac{dudv}{2\pi} \quad (w = u + iv \in \mathbb{C})$$

が、有界連続な、または  $\mathbb{C}$  のコンパクト部分集合の特性関数であるような、任意の  $\Psi$  について成り立つ。ただし  $\text{Avg}_\chi$  は指標に関するある平均であって、具体的には次の二つのどちらかの平均を意味する。

( $\text{Avg}_\chi$  の意味)

(FI)  $f$  を素数、 $X(f)$  を  $\text{mod } f$  の原始 Dirichlet 指標の全体、 $\pi(m)$  を  $m$  以下の素数の個数として、固定した  $s$  に対し、

$$\text{Avg}_\chi^I \Psi(\log L(s, \chi)) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi(m)} \sum_{2 < f \leq m} \frac{1}{f-2} \sum_{\chi \in X(f)} \Psi(\log L(s, \chi))$$

とする。ただし  $L(s, \chi) = 0$  となる指標  $\chi$  は適宜無視する。

(FII)  $\chi_\tau(n) = n^{-i\tau}$  とおくと、

$$\zeta(s + i\tau) = \prod_p (1 - p^{-s-i\tau})^{-1} = \prod_p (1 - \chi_\tau(p)p^{-s})^{-1}$$

なので、 $\tau$  についての平均も一種の指標に関する平均と見ることができる。この意味で、

$$\text{Avg}_\chi^{\text{II}} \Psi(\log L(s, \chi_\tau)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \Psi(\log \zeta(s + i\tau)) d\tau$$

とする。

(FII) の方は、実質的には  $t$ -aspect である。事実、 $\Psi$  として集合  $A$  の特性関数<sup>2</sup> を取れば、その場合の (2.1)(FII) が意味していることは Bohr-Jessen の (1.1) そのものである。密度関数  $F_\sigma^{\mathbb{C}}$  と  $M_\sigma^{\mathbb{C}}$  は、全く同じ形の式を満たし、しかも両者とも連続なので、この両者は同じものである<sup>3</sup>。その密度関数が、異なる aspect である (FI) の場合にもそのまま密度関数として使える、という点が、上の定理の一つの面白みであろう。

この密度関数そのものに対するさらに立ち入った研究として、Ihara [6] [7], Ihara-Matsumoto [9] を挙げておく。また  $(L'/L)(s, \chi)$  に対する、定理 2 と類似した結果は Ihara-Matsumoto [10] にある。

### 3. 原始形式に付随する対称べき $L$ 関数

定理 1、定理 2 のような結果が他の種々のゼータ関数、 $L$  関数についても示せないか、と考えるのは極めて自然な疑問であろう。実際、上述したように、 $t$ -aspect における極限値の存在だけなら非常に一般的

<sup>2</sup>つまり  $\Psi(z) = 1$  if  $z \in A$ ,  $\Psi(z) = 0$  otherwise.

<sup>3</sup> $D = \{z \in \mathbb{C} \mid F_\sigma^{\mathbb{C}}(z) \geq M_\sigma^{\mathbb{C}}(z)\}$  とおくと、 $F_\sigma^{\mathbb{C}}(z) - M_\sigma^{\mathbb{C}}(z)$  の  $D$  上での積分は 0 になる。連続性から二つの関数は  $D$  上で恒等的に等しい。 $F_\sigma^{\mathbb{C}}(z) \leq M_\sigma^{\mathbb{C}}(z)$  なる領域に対しても同様。

な状況で証明されているし、また Ihara [5] においては代数体の Hecke の  $L$  関数や関数体の  $L$  関数の場合が論じられている。

筆者たちの研究目的は、もう一つの重要な  $L$  関数のクラスである保型  $L$  関数の理論の枠内で、定理 2 に類した定理を得たい、というものであった。今回の主結果を述べるために、まずいくつかの記号や定義を述べよう。

$S_k(N)$  を、重みが  $k$  でレベルが  $N$  の正則カスプ形式の全体のなす空間とする。 $S_k(N)$  の元  $f$  として原始形式、すなわち normalized Hecke-eigen new form であるものをとる。この  $f$  の Fourier 展開を

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{(k-1)/2} e^{2\pi i n z}$$

と書けば、 $\lambda_f(1) = 1$  で、 $\lambda_f(n)$  はすべて実数である。これに付随する  $L$  関数を

$$L(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s}$$

で定義すれば、これは  $\sigma > 1$  で絶対収束し、全平面に正則解析接続可能で、その Euler 積表示は

$$(3.1) \quad L(f, s) = \prod_{p|N} (1 - \lambda_f(p) p^{-s})^{-1} \prod_{p \nmid N} (1 - \lambda_f(p) p^{-s} + p^{-2s})^{-1}$$

となる。あるいは、この第二の積の部分をも

$$(1 - \lambda_f(p) p^{-s} + p^{-2s})^{-1} = (1 - \alpha_f(p) p^{-s})^{-1} (1 - \beta_f(p) p^{-s})^{-1}$$

と因数分解して書く場合も多い。ここで  $\alpha_f(p), \beta_f(p)$  は共に絶対値が 1 の複素数で、

$$\alpha_f(p) + \beta_f(p) = \lambda_f(p), \quad \beta_f(p) = \overline{\alpha_f(p)}$$

を満たす。

この  $L(f, s)$  そのものの値分布についての定理 2 の類似が得られれば嬉しいのだが、我々は今のところ、それには成功していない。我々が証明した定理は、 $f$  に付随する対称べき  $L$  関数の値分布に関する結果である。

自然数  $\gamma$  に対し、 $\gamma$ -th 対称べき  $L$  関数を

(3.2)

$$L(\text{Sym}_f^\gamma, s) = \prod_{p|N} (1 - \lambda_f(p^\gamma) p^{-s})^{-1} \prod_{p \nmid N} \prod_{h=0}^{\gamma} (1 - \alpha_f^{\gamma-h}(p) \beta_f^h(p) p^{-s})^{-1}$$

で定義<sup>4</sup>する。この級数は  $\sigma > 1$  で収束するが、全平面に正則に解析接続され、ある種の関数等式を満たすと予想されている。ただし現時点ではこの予想は特殊な場合にしか証明されていない (cf. Kim-Shahidi [12])。そこで本稿においては以下を仮定することにする。

(H1)  $L(\text{Sym}_f^\gamma, s)$  は半平面  $\sigma > 1/2$  に正則に解析接続され、帯領域  $1/2 < \sigma < 2$  において評価  $L(\text{Sym}_f^\gamma, s) \ll N(|t| + 2)$  が成り立つ。

(H2)  $L(\text{Sym}_f^\gamma, s)$  は  $1/2 < \sigma \leq 1$  に零点を持たない。

(H1) における評価は、期待される関数等式が成り立てば、そこから凸性原理だけで導けるものである。また言うまでもなく (H2) は Riemann 予想の類似である。

本稿で述べる主結果は、二つの対称べき  $L$  関数の対数の差を考えたとき、その値分布の level-aspect について、定理 2 と類似した極限定理が示せる、というものである。

#### 4. 主結果

本稿で論じているような極限定理の証明においては、通例、ある種の「独立性」ないしは「直交性」と言うべき性質が重要な役割を果たす。定理 1 の証明においては素数  $p$  に対する  $\log p$  たちが  $\mathbb{Q}$  上一次独立であること<sup>5</sup> が本質的に用いられるし、定理 2 の証明では Dirichlet 指標の直交性が重要な役割を果たす。

対称べき  $L$  関数の値分布に関する我々の結果の証明において、同様の役割を果たすのが、Petersson 公式<sup>6</sup> と呼ばれる関係式である。我々が実際に用いるのは、Ichihara [4, Lemma 3] が Petersson 公式から導出した、次の形の公式である。原始形式  $f$  の重みとレベルについての条件として、次を仮定する。

(H0) 重み  $k$  は  $2 \leq k \leq 10$  または  $k = 14$  で、レベル  $N$  は素数  $q$  のべき  $N = q^m$ 。

**補題 1** (Ichihara) 仮定 (H0) の下で、自然数  $n$  に対し

$$(4.1) \quad \sum'_{f \in S_k(q^m)} \lambda_f(n) = \delta_{1,n} + \begin{cases} O_k(n^{(k-1)/2} q^{-k+1/2}) & m = 1 \\ O_k(n^{(k-1)/2} q^{m(-k+1/2)+k-3/2}) & m \geq 2 \end{cases}$$

が成り立つ。ここに  $\delta_{1,n}$  は Kronecker のデルタ記号であり、 $\sum'$  は以下のように定義される和である。

<sup>4</sup>最初  $\gamma = 2$  の場合に Shimura [16] によって導入された。一般の  $\gamma$  の場合の定義については例えば [2] [15] 参照。

<sup>5</sup>これは素因数分解の一意性の言い換えに過ぎない。

<sup>6</sup>例えば [11] 参照。

( $\sum'$  の定義)  
 $f$  に依存する量  $A_f$  に対し、

$$(4.2) \quad \sum'_{f \in S_k(q^m)} A_f = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}(1-C_q(m))} \sum_{\substack{f \in S_k(q^m) \\ f: \text{primitive}}} \frac{A_f}{\langle f, f \rangle},$$

ただし右辺の和は primitive form であるような  $S_k(q^m)$  の元すべてに亘り、 $\langle f, f \rangle$  は Petersson 内積、また

$$C_q(m) = \begin{cases} 0 & \text{if } m = 1 \\ q(q^2 - 1)^{-1} & \text{if } m = 2 \\ q^{-1} & \text{if } m \geq 3 \end{cases}$$

である。

仮定 (H0) においてレベルを  $N = q^m$  の形に限定したので、 $p|N$  なる素数は  $p = q$  のみである。そこで (3.1) と (3.2) から、 $p = q$  に対応する Euler 因子  $(1 - \lambda_f(q)q^{-s})^{-1}$ ,  $(1 - \lambda_f(q^\gamma)q^{-s})^{-1}$  をそれぞれ取り除いたものを、 $L_q(f, s)$ ,  $L_q(\text{Sym}_f^\gamma, s)$  と書くことにする。取り除くのは Euler 因子一個だけなので、(H1), (H2) のような解析的性質は取り除く前と変わらないことを注意しておく。

さて、上で定義した  $\sum'$  記号を用いて、次の二通りの「平均」を定義する。

$$\text{Avg}_{\text{prime}} = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q: \text{prime}}} \sum'_{f \in S_k(q^m)} \quad (m: \text{fixed})$$

$$\text{Avg}_{\text{power}} = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \in \mathbb{N}}} \sum'_{f \in S_k(q^m)} \quad (q: \text{fixed})$$

ただし後者においては固定する  $q$  は  $2^{2\mu}$  ( $\mu$  は下記、主定理の主張中に出て来る自然数) より大きいとする。すると我々の主定理は次のように述べられる。

**主定理** ([14]) 原始形式  $f$  の重みとレベルが条件 (H0) を満たすとする。 $\mu$  と  $\nu$  は正の整数で  $\mu - \nu = 2$  とし、 $\mu$ -th および  $\nu$ -th 対称べき  $L$  関数について (H1), (H2) を仮定する。このとき、任意の  $\sigma > 1/2$  に対して、具体的に構成可能な密度関数  $M_\sigma^\mathbb{R} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在して、

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & \text{Avg}_{\text{prime}} \Psi(\log L_q(\text{Sym}_f^\mu, \sigma) - \log L_q(\text{Sym}_f^\nu, \sigma)) \\ &= \text{Avg}_{\text{power}} \Psi(\log L_q(\text{Sym}_f^\mu, \sigma) - \log L_q(\text{Sym}_f^\nu, \sigma)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} M_\sigma^\mathbb{R}(u) \Psi(u) \frac{du}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

が、有界連続な、または  $\mathbb{R}$  のコンパクト部分集合の特性関数であるような任意の  $\Psi$  について成り立つ。

この定理の証明の方針については次節で述べるが、その前に、この定理のような「対数の差」を考えた、そもそもの理由を説明しておこう。半平面  $\sigma > 1$  で考えると、Euler 積表示は絶対収束しているので、

$$\log L_q(\text{Sym}_f^\gamma, \sigma) = - \sum_{p \neq q} \sum_{h=0}^{\gamma} \log(1 - \alpha_f^{\gamma-h}(p) \beta_f^h(p) p^{-\sigma}),$$

従って

(4.4)

$$\begin{aligned} & \log L_q(\text{Sym}_f^\mu, \sigma) - \log L_q(\text{Sym}_f^\nu, \sigma) \\ &= - \sum_{p \neq q} \left( \sum_{h=0}^{\mu} \log(1 - \alpha_f^{\mu-h}(p) \beta_f^h(p) p^{-\sigma}) - \sum_{h=0}^{\nu} \log(1 - \alpha_f^{\nu-h}(p) \beta_f^h(p) p^{-\sigma}) \right) \end{aligned}$$

である。ところが

$$\alpha_f(p) \beta_f(p) = \alpha_f(p) \overline{\alpha_f(p)} = |\alpha_f(p)|^2 = 1$$

であるから、 $\mu = \nu + 2$  に注意すれば、

$$\alpha_f^{\mu-h}(p) \beta_f^h(p) = \alpha_f^{\mu-h-1}(p) \beta_f^{h-1}(p) = \alpha_f^{\nu-(h-1)}(p) \beta_f^{h-1}(p)$$

なので、(4.4) の右辺の括弧の中のほとんどの項はキャンセルして消えてしまい、第一の和の中の  $h = 0$  と  $h = \mu$  に対応する項だけが残って、

$$\begin{aligned} (4.5) \quad & \log L_q(\text{Sym}_f^\mu, \sigma) - \log L_q(\text{Sym}_f^\nu, \sigma) \\ &= - \sum_{p \neq q} (\log(1 - \alpha_f^\mu(p) p^{-\sigma}) + \log(1 - \beta_f^\mu(p) p^{-\sigma})) \end{aligned}$$

を得る。

ここでもし  $\mu = 1$  であれば、この右辺はまさしく、 $L_q(f, \sigma)$  の Euler 積表示の対数を取ったものに他ならない。その場合を扱いたい、というのが研究当初の動機だったわけである。だが今は  $\mu = \nu + 2$  で  $\nu$  が正の整数だから  $\mu \geq 3$  である。上述した主定理に対して我々が現在持っている証明は、 $\mu = 1$  に対しては破綻する。なぜなら上記右辺の  $\log$  を展開すると  $\mu \geq 3$  であれば  $m \geq 1$  として

$$\alpha_f^{\mu m}(p) + \beta_f^{\mu m}(p) = \lambda_f(p^{\mu m}) - \lambda_f(p^{\mu m-2})$$

が現れ、 $\mu m - 2 \geq 1$  なので、補題 1 から error term として扱える。しかし  $\mu = 1$  であれば、特に  $m = 2$  の場合に

$$\alpha_f^2(p) + \beta_f^2(p) = \lambda_f(p^2) - 1$$

となり、これは補題 1 を用いても error term とはならない。この部分の処理が、今のところ、上手くいっていないのである。

## 5. 証明の概略

主定理の証明の詳細については筆者たちのプレプリント [14] を参照していただくことにして、以下では証明の基本的な方針のみを簡単にスケッチする。大枠の骨組みは [8] を踏襲するが、当然ながら細部においては相当の相違点がある。

*Step 1*  $\mathcal{P}$  を素数の有限集合 (ただし  $q \notin \mathcal{P}$ ) とし、Euler 積をこの  $\mathcal{P}$  に含まれる素数だけに制限した

$$L_{\mathcal{P}}(\text{Sym}_f^{\gamma}, s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{h=0}^{\gamma} (1 - \alpha_f^{\gamma-h}(p) \beta_f^h(p) p^{-s})^{-1}$$

を導入する。これは単なる有限積なので  $\sigma > 1/2$  においても意味を持つ。そこで  $\sigma > 1/2$  に対し、前節 (4.4), (4.5) と同様の計算によって

$$(5.1) \quad \begin{aligned} & \log L_{\mathcal{P}}(\text{Sym}_f^{\mu}, \sigma) - \log L_{\mathcal{P}}(\text{Sym}_f^{\nu}, \sigma) \\ &= - \sum_{p \in \mathcal{P}} (\log(1 - \alpha_f^{\mu}(p) p^{-\sigma}) + \log(1 - \beta_f^{\mu}(p) p^{-\sigma})) \end{aligned}$$

を得る。

$T$  を複素平面上の単位円周、 $T_{\mathcal{P}} = \prod_{p \in \mathcal{P}} T$  として、 $\Phi_{\sigma, \mathcal{P}} : T_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\Phi_{\sigma, \mathcal{P}}(t_{\mathcal{P}}) = - \sum_{p \in \mathcal{P}} (\log(1 - t_p p^{-\sigma}) + \log(1 - \bar{t}_p p^{-\sigma}))$$

(ただし  $t_{\mathcal{P}} = (t_p)_{p \in \mathcal{P}} \in T_{\mathcal{P}}$ ) で定義する。この記法を使えば (5.1) の右辺は  $\Phi_{\sigma, \mathcal{P}}(\alpha_f^{\mu}(\mathcal{P}))$  (ただし  $\alpha_f^{\mu}(\mathcal{P}) = (\alpha_f^{\mu}(p))_{p \in \mathcal{P}}$ ) と書けることが分かる。

*Step 2*  $\mathbb{R}$  上の任意の連続関数  $\Psi$  に対して、

$$(5.2) \quad \int_{\mathbb{R}} M_{\sigma, \mathcal{P}}^{\mathbb{R}}(u) \Psi(u) \frac{du}{\sqrt{2\pi}} = \int_{T_{\mathcal{P}}} \Psi(\Phi_{\sigma, \mathcal{P}}(t_{\mathcal{P}})) d^* t_{\mathcal{P}}$$

(ただし  $d^* t_{\mathcal{P}}$  は  $T_{\mathcal{P}}$  の正規化された Haar 測度) が成り立つような、具体的に構成可能で compact support を持つ関数  $M_{\sigma, \mathcal{P}}^{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  が存在することを言う。

この証明は  $\mathcal{P}$  の元の個数  $|\mathcal{P}|$  についての帰納法で行なう。まず  $|\mathcal{P}| = 1$ , つまり  $\mathcal{P}$  がただひとつの素数  $p$  しか含まない場合には、(5.2) の右辺は単なる複素積分であり、簡単な計算によって、(5.2) を満たす  $M_{\sigma, \{p\}}^{\mathbb{R}}$  がどのようなものであるか、突き止めることができる。それは、

$$u = u(\theta) = -2 \log |1 - e^{i\theta} p^{-\sigma}|$$



によって開区間  $(-\pi, 0)$  上の単射実数値関数を定め、その値域を  $A(\sigma, p)$  と書いて、

$$M_{\sigma, \{p\}}^{\mathbb{R}}(u) = \begin{cases} -\frac{|1 - e^{i\theta} p^{-\sigma}|^2}{\sqrt{2\pi} \sin(\theta) \cdot p^{-\sigma}} & \text{if } u \in A(\sigma, p) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とするのである。そしてこの場合ができてしまえば、一般の  $\mathcal{P}$  に対しては convolution 積として  $M_{\sigma, \mathcal{P}}^{\mathbb{R}}$  を帰納的に構成することができる。すなわち、 $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \{p\}$  と分解して、

$$M_{\sigma, \mathcal{P}}^{\mathbb{R}}(u) = \int_{\mathbb{R}} M_{\sigma, \mathcal{P}'}^{\mathbb{R}}(u') M_{\sigma, \{p\}}^{\mathbb{R}}(u - u') \frac{du'}{\sqrt{2\pi}}$$

とすれば、この関数が (5.2) を満たすことが証明できる。

この構成法は [5] [8] の類似であるが、 $\mathbb{C}$  上ではなく  $\mathbb{R}$  上で定義されているところが相違点である。

*Step 3* ここで一旦、 $\psi_x(u) = e^{ixu}$  として、 $\Psi = \psi_x$  という特殊な場合に考察を限定する。そして

$$\begin{aligned} \text{avg}_{\text{prime}}(\psi_x \circ \Phi_{\sigma, \mathcal{P}}) &= \text{Avg}_{\text{prime}}(\psi_x \circ \Phi_{\sigma, \mathcal{P}})(\alpha_f^{\mu}(\mathcal{P})) \\ \text{avg}_{\text{power}}(\psi_x \circ \Phi_{\sigma, \mathcal{P}}) &= \text{Avg}_{\text{power}}(\psi_x \circ \Phi_{\sigma, \mathcal{P}})(\alpha_f^{\mu}(\mathcal{P})) \end{aligned}$$

とおけば、

(5.3)

$$\text{avg}_{\text{prime}}(\psi_x \circ \Phi_{\sigma, \mathcal{P}}) = \text{avg}_{\text{power}}(\psi_x \circ \Phi_{\sigma, \mathcal{P}}) = \int_{T_{\mathcal{P}}} \psi_x(\Phi_{\sigma, \mathcal{P}}(t_{\mathcal{P}})) d^* t_{\mathcal{P}}$$

が成り立つことが示される。この証明は補題 1 に基づいて行なわれるが、前節の末尾で説明したように、 $\mu \geq 3$  であることがその証明中で必要となる。

以上で得られた (5.2) と (5.3) を併せると、

(5.4)

$$\text{avg}_{\text{prime}}(\psi_x \circ \Phi_{\sigma, \mathcal{P}}) = \text{avg}_{\text{power}}(\psi_x \circ \Phi_{\sigma, \mathcal{P}}) = \int_{\mathbb{R}} M_{\sigma, \mathcal{P}}^{\mathbb{R}}(u) \psi_x(u) \frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

を得る。

*Step 4* 上記 (5.4) は、((5.1) と併せて考えれば)  $\Psi = \psi_x$  という場合について、Euler 積を有限集合  $\mathcal{P}$  に制限したものについては、主定理の主張と同じ形の関係式が成立していることを意味している。よってこの場合の主定理の証明を完成させるには、 $|\mathcal{P}| \rightarrow \infty$  なる極限が取れることさえ示せば良い。

この作業は、絶対収束領域  $\sigma > 1$  においてはさほど難しくはないが、 $1/2 < \sigma \leq 1$  においては、単純に  $L_{\mathcal{P}}(\text{Sym}_f^{\gamma}, s)$  において  $|\mathcal{P}| \rightarrow \infty$  と

したのでは発散してしまうので、 $|\mathcal{P}|$  が十分大きいときの  $L_{\mathcal{P}}(\text{Sym}_f^\gamma, s)$  が本来の  $L_q(\text{Sym}_f^\gamma, s)$  をいかに近似するか、を定量的に表す、技術的な補題が必要となる。我々の場合、それは次の式である。十分大きい  $q$  に対し、 $\sigma = 1/2 + \delta$  と書いて、

$$(5.5) \quad \log L_q(\text{Sym}_f^\gamma, \sigma) = \log L_{\mathcal{P}}(\text{Sym}_f^\gamma, \sigma) + S_\gamma \\ + O((\log q^m)^{-\delta} + (\log q^m)^{-1/4} + (q^{m/4(k-1)\gamma})^{-\delta/2})$$

が、 $\mathcal{P} = \{p \mid p \leq \log q^m\}$  について成り立つ。ただし

$$S_\gamma = \sum_{\substack{p > \log q^m \\ p \neq q}} \frac{\lambda_f(p^\gamma)}{p^\sigma} \exp\left(-\frac{p}{q^{m/(k-1)\gamma}}\right)$$

である。これは [3] のアイデアを援用して示されるが、ここで仮定 (H1), (H2) が必要となる。

この (5.5) が  $\log L_q(\text{Sym}_f^\gamma, \sigma)$  と  $\log L_{\mathcal{P}}(\text{Sym}_f^\gamma, \sigma)$  の差の評価を与えるので、これを用いて (5.4) から  $|\mathcal{P}| \rightarrow \infty$  の極限へ移行する。

$M_{\sigma, \mathcal{P}}^{\mathbb{R}}(u)$  が  $|\mathcal{P}| \rightarrow \infty$  の極限においてある関数  $M_\sigma^{\mathbb{R}}(u)$  に収束することは、[5] [8] と同様にして、一旦 Fourier 変換像に移行して極限を取ることによって示される。その他、[8, Section 5] の結果なども用いて丁寧に評価することで、 $\Psi = \psi_x$  という場合の主定理に到達する。

**注意** 我々はこの Step で Riemann 予想の類似である (H2) を用いたわけであるが、定理 1、定理 2 においてはそうした強い仮定は要請されていない。それは、定理 1、定理 2 の証明においては、Riemann 予想の代用品として使えるような、 $\zeta(s)$  や  $L(s, \chi)$  についての平均値定理を用いるからである。同様の平均値定理を対称べき  $L$  関数について示すことは簡単ではなさそうなので、我々は (H2) を仮定に置くことにしたのである。ただし、何らかの弱い平均値定理なら対称べき  $L$  関数に対しても示せるであろうし、そうした結果を用いて部分的な結果を (H2) を仮定せずに証明できる可能性はあるだろう。

*Step 5* 最後に一般の  $\Psi$  に対する主定理を、 $\Psi = \psi_x$  という場合の結果から導出する。これは、[8] [14] で述べられているように self-contained に説明することもできるし、あるいは [10] の末尾で注意したように、確率測度の弱収束に関する一般論を適用して示すこともできる。ここでは後者の方法を述べよう。

$\delta_w$  を  $w$  でだけ non-zero となる Dirac 測度とし、測度  $\mu_{q,m}$  を

$$\mu_{q,m} = \sum'_{f \in S_k(q^m)} \delta_{\log L_q(\text{Sym}_f^u, \sigma) - \log L_q(\text{Sym}_f^v, \sigma)}$$

で定めると、

$$\text{Avg}_{\text{prime}} \Psi(\log L_q(\text{Sym}_f^\mu, \sigma) - \log L_q(\text{Sym}_f^\nu, \sigma)) = \lim_{\substack{q \rightarrow \infty \\ q: \text{prime}}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(u) d\mu_{q,m}(u),$$

$$\text{Avg}_{\text{power}} \Psi(\log L_q(\text{Sym}_f^\mu, \sigma) - \log L_q(\text{Sym}_f^\nu, \sigma)) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \in \mathbb{N}}} \int_{\mathbb{R}} \Psi(u) d\mu_{q,m}(u)$$

と書ける。このように書いてみると、主定理の主張は、 $q \rightarrow \infty$  または  $m \rightarrow \infty$  の極限において、 $d\mu_{q,m}(u)$  が  $M_\sigma(u)du/\sqrt{2\pi}$  に弱収束している、と解釈できる。この立場に立てば、よく知られた Lévy の定理により、 $\Psi(u) = e^{ixu}$  の場合が言えれば十分であり、それが Step 4 で示したことに他ならない。よって一般の場合の主定理の証明が完成した。

#### REFERENCES

- [1] H. Bohr and B. Jessen, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, I, *Acta Math.* **54** (1930), 1-35; II, *ibid.* **58** (1932), 1-55.
- [2] J. Cogdell and P. Michel, On the complex moments of symmetric power  $L$ -functions at  $s = 1$ , *Intern. Math. Res. Notices* (2004), no.31, 1561-1617.
- [3] W. Duke, Extreme values of Artin  $L$ -functions and class numbers, *Compositio Math.* **136** (2003), 103-115.
- [4] Y. Ichihara<sup>7</sup>, The first moment of  $L$ -functions of primitive forms on  $\Gamma_0(p^\alpha)$  and a basis of old forms, *J. Number Theory* **131** (2011), 343-362.
- [5] Y. Ihara, On "M-functions" closely related to the distribution of  $L'/L$ -values, *Publ. RIMS Kyoto Univ.* **44** (2008), 893-954.
- [6] Y. Ihara, On certain arithmetic functions  $\tilde{M}(s; z_1, z_2)$  associated with global fields: Analytic properties, *ibid.* **47** (2011), 257-305.
- [7] Y. Ihara, An analytic function in 3 variables related to the value-distribution of  $\log L$ , and the "Plancherel volume", in *Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects*, K. Matsumoto et al. (eds.), RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B34** (2012), 103-116.
- [8] Y. Ihara and K. Matsumoto, On certain mean values and the value-distribution of logarithms of Dirichlet  $L$ -functions, *Quart. J. Math. (Oxford)* **62** (2011), 637-677.
- [9] Y. Ihara and K. Matsumoto, On  $\log L$  and  $L'/L$  for  $L$ -functions and the associated "M-functions": Connections in optimal cases, *Moscow Math. J.* **11** (2011), 73-111.
- [10] Y. Ihara and K. Matsumoto, On the value-distribution of logarithmic derivatives of Dirichlet  $L$ -functions, in *Analytic Number Theory, Approximation Theory, and Special Functions*, G. V. Milovanović et al. (eds.), Springer-Verlag, 2014, pp.79-91.
- [11] H. Iwaniec, *Topics in Classical Automorphic Forms*, Grad. Stud. Math. **17**, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

---

<sup>7</sup>Y. Ichihara = Y. Umegaki

- [12] H. Kim and F. Shahidi, Symmetric cube  $L$ -functions for  $GL_2$  are entire, *Ann. of Math.* **150** (1999), 645-662.
- [13] K. Matsumoto, Value-distribution of zeta-functions, in *Analytic Number Theory*, K. Nagasaka and E. Fouvry (eds.), Lecture Notes in Math. **1434**, Springer-Verlag, 1990, pp.178-187.
- [14] K. Matsumoto and Y. Umegaki, On the value-distribution of the difference between logarithms of two symmetric power  $L$ -functions, preprint, arXiv:1603.07436
- [15] E. Royer and J. Wu, Special values of symmetric power  $L$ -functions and Hecke eigenvalues, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **19** (2007), 703-753.
- [16] G. Shimura, On the holomorphy of certain Dirichlet series, *Proc. London Math. Soc.* (3)**31** (1975), 79-98.

名古屋大学大学院多元数理科学研究科  
奈良女子大学理学部