多項式函数の bifurcation set の計算法 I
Methods for computing the bifurcation set of a polynomial function I

新潟大学大学院自然科学研究科　田島慎一 *1
Shinichi Tajima
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

東京理科大学理学部第一部応用数学科　鍋島克輔 *2
Katsusuke Nabeshima
Department of Applied Mathematics, Tokyo University of Scinece

Abstract

The tameness of a complex polynomial function is considered in the context of symbolic computation. The method due to S. A. Broughton for testing tameness is realized as an algorithm via comprehensive Gröbner systems. A result of A. Parusinski on bifurcation sets is described by using local cohomology with a parameter to show our main idea of computation.

1　序

Bifurcation set は, 多変数多項式が定める複素函数のトポロジーを考える際, 最も基本的で重要な概念である. 本研究では, 計算代数の観点から bifurcation set を求める計算アルゴリズムについて考える. 具体的には, 以下の２つの課題を目標とする.

課題その１

与えられた多項式が tame であるか否かを判定するアルゴリズムの構成

課題その２

多項式函数が無限遠において孤立特異点を持つ場合, その bifurcation set を求めるアルゴリズムの構成

課題その２では数学的には課題その１とは全く異なる理論を必要とする. またアルゴリズムを導出する枠組みも全く異なる. 本稿では, 主に, 課題その１に関し得た結果を紹介する. 課題その２についてはアルゴリズム導出の基礎となる事項を紹介するにとどめる.

2　bifurcation set と tame 多項式

1983 年に出版された S. A. Broughton の論文 [4] 以降, 多くの研究者により様々な観点から, bifurcation set の研究がなされている. この節では, S. A. Broughton の論文に従って, bifurcation set と tame 多項式に関する基本的事項を復習する.

*1 〒 950-2181 新潟県新潟市西区五十嵐 2 の町 8050　E-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp
*2 〒 162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3　E-mail: nabeshima@rs.tus.ac.jp

いま, $f:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ を多項式 f が定める函数とする. 各点 $c \in \mathbb{C}$ に対し $f^{-1}(c)$ のトポロジーを考える.

R. Thom により, $\mathbb{C}$ の有限集合 Γ_f であり,

$$f:\mathbb{C}^n - f^{-1}(\Gamma_f) \longrightarrow \mathbb{C} - \Gamma_f$$

が局所的に自明な fibration となるような Γ_f が存在することが知られている. このような有限集合のうち最小である有限集合を B_f とおき, 多項式函数 f の bifurcation set と呼ぶ.

注 S. A. Broughton の論文 [4] では, atypical set と呼ばれている

函数 f の critical set を $Sing(f)$ とおき, $Sing(f) \subset \mathbb{C}^n$ の f による像, 即ち, critical values のなす集合を C_f とおく. このとき, $C_f \subset B_f$ であるが, 一般には, $C_f = B_f$ が成り立たない. 次の例は非常に有名である.

例 ([4]) $f(x,y) = x^2y - x$

f の多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ におけるヤコビイデアルを J_f とおく. 簡単な計算で, $J_f = \left\langle 2xy-1, x^2 \right\rangle = \langle 1 \rangle$ が分かる, f は特異点を持たないので, $C_f = \emptyset$ を得る.

他方, $x^2y - x = x(xy-1)$ より, $c \neq 0$ のとき, $f^{-1}(c) \cong \mathbb{C}^*$, $c = 0$ のとき $f^{-1}(0) \cong \mathbb{C} \cup \mathbb{C}^*$ となる. 従って, $B_f = \{0\}$ を得る. このことは, $C_f \neq B_f$ を意味する.

次に, tame の概念を思い出そう

定義 ([4]) 多項式 $f:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ が tame とは
集合 $\{x \in \mathbb{C}^n \mid |\frac{\partial f}{\partial x_1}|^2 + \cdots + |\frac{\partial f}{\partial x_n}|^2 \geq \delta\}$ がコンパクトとなるような正の定数 δ が存在すること
と定める.

つぎの結果は S. A. Broughton による

定理 ([4]) $f:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ は tame 多項式であるとする. このとき $B_f = C_f$ が成り立つ.

与えられた多項式が tame であることが判れば, その bifurcation set は, critical values の集合であることを意味している. critical values の計算と bifurcation set の計算の複雑さを考えれば, この定理の重要性は明らかである.

次の結果も, S. A. Broughton による.

定理 ([4]) $f:\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ は Newton 非退化かつ convinient とする. このとき f は tame である.

Newton 非退化等の概念に関しては, [12] を参照されたい.

S. A. Broughton が導入した tame 多項式の概念は, その後, C. Sabbah [20], A. Némethi [16], A. Zaharia [17] らによりいくつかの方向に拡張されている. また, tame の概念は C. Sabbah [20], A. Douai [9], M. Schultz [21] らにより Gauss-Manin connection の研究等に応用されている. しかし, 与えられた多項式が tame であるか否かを定義に従って判定することは, 一般にはそれほど容易では無い. 他分野への応用も鑑みると, tameness の判定を行うアルゴリズムを構成することは意義があると思われる.

3 tameness と comprehensive Gröbner system

この節では, comprehensive Gröbner system を用いることで, 与えられた多項式函数が tame であるか否かを判定できることを示す.

議論の出発点となる S. A. Broughton の 1988 年の結果 ([5]) をおもいだすことからはじめる.

多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に, パラメータ $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ を係数にもつ一次式を加え

$$f^p(x) = f(x) + p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

とする. f および f^p の多項式環 $\mathbb{C}[x]$ におけるヤコビイデアルをそれぞれ J_p, J_{f^p} で表す.

$$J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle,\ J_{f^p} = \left\langle \frac{\partial f^p}{\partial x_1}, \frac{\partial f^p}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f^p}{\partial x_n} \right\rangle.$$

定理 (S. A. Broughton 1988) 次は同値

(1) f は tame

(2) パラメータ空間 $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍 W であり, $p \in W$ に対し

$$\dim(\mathbb{C}[x]/J_f) = \dim(\mathbb{C}[x]/J_{f^p})$$

を満たすものが存在する.

パラメータを含むイデアル J_{f^p} の Gröbner 基底は, comprehensive Gröbner system を用いることで計算可能である. 一般に, comprehensive Gröbner system のアルゴリズムは, 代数的集合によるパラメータ空間の分割と, 分割に応じた Gröbner 基底を与える. 従って, 原点の近傍を与えるような代数的集合にパラメータが属すときの Gröbner 基底からそのイデアルの colength を求めることで, tameness の判定を行うことが出来る.

いくつか計算例を与える.

例 $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4$

パラメータ p, q に対し, $f^{(p,q)}(x,y) = f(x,y) + px + qy$ とおく. ヤコビイデアル $J_{f^{(p,q)}}$ は

$$J_{f^{(p,q)}} = \left\langle 4x^3 - 4y + p, -4x + 4y^3 + q \right\rangle \subset \mathbb{C}[x,y]$$

で与えられる. すべての $(p,q) \in \mathbb{C}^2$ に対し, $\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_{f^{(p,q)}}) = 9$ が成り立つ. 従って f は tame である.

例 $f(x,y) = (x+y^2)^2 + y^2$

f のヤコビイデアル $J_f = \left\langle 2x + 2y^2, 4xy + 4y^3 + 2y \right\rangle$ の colength は, $\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_f) = 1$.

パラメータ p, q に対し, $f^{(p,q)}(x,y) = f(x,y) + px + qy$ とおく, comprehensive Gröbner system を用いてヤコビイデアル $J_{f^{(p,q)}}$ を計算する.

(i) $p - 1 = 0$ のとき $J_{f^{(1,q)}} = \langle 2x + 2y + 1 \rangle$ となり零次元ではない.

(ii) $p - 1 \neq 0$ のとき $\dim(\mathbb{C}[x,y]/J_{f^{(p,q)}}) = 1$ である.

代数的集合 $p - 1 \neq 0$ は, 原点の近傍を与えるので, f は tame である.

例 $f(x,y) = x^2y - x$ (S. A. Broughton の例)

$B_f \neq C_f$ であるので tame でない. Comprehensive Gröbner system を用いて, tame でないことを確認してみる. パラメータ p, q に対し, $f^{(p,q)}(x,y) = f(x,y) + px + qy$ とおく.

Comprehensive Gröbner system によりヤコビイデアル $J_{f^{(p,q)}}$ の Gröbner 基底を計算する.

(i) $q = 0, p - 1 = 0$ のとき, $J_{f^{(1,0)}} = \left\langle x^2, xy \right\rangle$. 零次元ではない

(ii) $q = 0, p - 1 \neq 0$ のとき, $J_{f^{(p,0)}} = \langle (p-1)x \rangle$. 零次元ではない

(iii) $p - 1 = 0, q \neq 0$ のとき, $J_{f^{(1,q)}} = \left\langle x^2 + q, qy \right\rangle$. colength $= 2$

(iv) $(p-1)q \neq 0$ のとき, $J_{f^{(p,q)}} = \left\langle (p-1)x - 2qy, 4qy^2 + p^2 - 2p + 1 \right\rangle$. colength $= 2$

を得る.

(ii) と (iv) の場合は原点の近傍と共有点をもつ．colength が零とならないので, f は tame でないことが判る．

一般には, パラメータ空間の原点の近傍で様々な現象が起こりうる．

例 $f(x,y)=x^3y+x^2y^3+y^{12}$

多項式 f は, Newton 非退化であるが, convinient ではないので, 一般論だけからは, tame であるか否か判定できない．f の多項式環でのヤコビイデアルの colength を計算すると, 25 を得る．

パラメータ p,q に対し, $f^{(p,q)}(x,y)=f(x,y)+px+qy$ とおく．Comprehensive Gröbner system を用いて, ヤコビイデアル $J_{f^{(p,q)}}$ の colength を計算する．

(i) $p=0$ の時, colength $=25$.

(ii) $243p-8=0$ のとき．colength $=25$

(iii) $p(243p-8)\neq 0$ のとき, colength $=25$

を得る．従って, f は tame である．

次の例は, P. Cassou-Noguès が 1996 年に発表した論文 [6] で扱った例である．多項式自体に変形パラメータ s が含まれている点に注意されたい．

例 $f(x,y,z)=xy+3xz^2+2yz^2+x^2z^5+sxyz^5+y^2z^5$

パラメータ p,q,r に対し, $f^{(p,q,r)}(x,y,z)=f(x,y,z)+px+qy+rz$ とおく．独立変数 x,y,z 以外に変形パラメータとして s を含んでいる．今迄と同様に, comprehensive Gröbner system の計算を行う．出力のサイズが大きいのでここではデータは省略するが, 計算の結果 $s-2=0$ および $s+2=0$ の場合, $J_{f^{(p,q,r)}}$ の colength は 13 で一定であることから, この場合は tame であることが判る．同様に, それ以外のパラメータ s に対しては, f は tame でないことが判る．

このように, 入力多項式がパラメータを含んでいるような場合も, tameness の判定が可能である．

4 tame 多項式の bifurcation set

一般に, bifurcation set を求める計算は, critical values の計算に比べ, 複雑にならざるを得ない．従って, 多項式 f が与えられたとき, まず最初に f が tame であるか判定し, その結果 tame である場合には, その critical values の集合を計算することで bifurcation set を決定することが望ましい．以下に, critical values の計算法を与える．Tame 多項式の特異点集合は零次元であることから, 以下のアルゴリズムを得る

入力: f tame な多項式

Step 1. $J=\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle$

Step 2. Compute the primary decomposition of the ideal J

$J=Q_1\cap Q_2\cap\cdots\cap Q_\ell,\quad Q_j$: primary ideal

$\sqrt{J}=P_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_\ell\quad P_j$: associated prime

Step 3. Compute $\mu_j=\dim(K[x]/Q_j)/\dim(K[x]/P_j)$

Step 4. Compute a monic generator $r_j(t)$ of the ideal $\langle t-f,P_j\rangle\cap K[t]$

Step 5. Set $\{s_1(t),s_2(t),\ldots,s_m(t)\}=\{r_1(t),r_2(t),\ldots,r_\ell(t)\}$

Step 6. $m_k = \sum_{r_j = s_k} \mu_j, k = 1, 2, \ldots, m$

出力: $T_k = \{t \in \mathbb{C} \mid s_k(t) = 0\}$ は multiplicity m_k の bifurcation set.

$T = T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_m$ は f の bifurcation set.

5 無限遠での μ-constant deformation

Bifurcation set の計算に関しては, A. Bodin による先行研究 [2] がある. A. Bodin の与えた計算法は, 特異点に関する彼自身の数学的研究成果と, D. Siersma と M. Tibar の結果 [22] に基づいて導出したものであり, 計算代数としては既存の tool を組み合わせることでアルゴリズムを構成している. 本研究では, それに対し, 最近我々自身で開発した計算代数の手法を A. Parusinski の結果 [18] に適用することで, bifurcation set を求める新たな計算法を提唱するものである. アルゴリズムの全容を述べることは, 現時点では困難である. ここでは, local cohomology の概念を使うことで, 基本的なアイデアを紹介するにとどめたい.

多項式 $f(x)$ の次数は d であるとする. いま, $f(x) = f_d(x) + f_{d-1}(x) + \cdots + f_0(x)$ とおく. ただし, $f_k(x)$ は, $f(x)$ の k 次の部分である. 変数 η を用いて, $f(x)$ を homogenize した多項式を $\tilde{f}(x, \eta)$ で表す. さらに, あらたなパラメータ t を用いて

$$F_t(x, \eta) = \tilde{f}(x, \eta) - t\eta^d$$

と定める. 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の無限遠 $\eta = 0$ における F_t の特異点集合を

$$A = \{[x_1 : x_2 : \cdots : x_n : \eta] \in \mathbb{P}^n \mid \frac{\partial F_t}{\partial x_1} = \frac{\partial F_t}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial F_t}{\partial x_n} = \frac{\partial F_t}{\partial \eta} = \eta = 0\}$$

とおく.

補題 つぎが成り立つ.

$$A = \{[x_1 : x_2 : \cdots : x_n : 0] \in \mathbb{P}^n \mid \frac{\partial f_d}{\partial x_1} = \frac{\partial f_d}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f_d}{\partial x_n} = f_{d-1} = 0\}$$

例 $f(x, y) = x^2y^2 + x$

$\tilde{f}(x, y, \eta) = x^2y^2 + x\eta^3$. $F_t(x, y, \eta) = x^2y^2 + x\eta^3 - t\eta^4$.

$A = \{[x : y : \eta] \in \mathbb{P}^2 \mid xy^2 = x^2y = \eta = 0\} = \{[0 : 1 : 0], [1 : 0 : 0]\}$

例 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

$\tilde{f}(x, y, \eta) = x^4 + y^4 - 4xy\eta^2$, $F_t(x, y, \eta) = x^4 + y^4 + 4xy\eta^2 - t\eta^4$.

$A = \{[x : y : 0] \in \mathbb{P}^2 \mid x^3 = y^3 = 0\} = \emptyset$.

以下, 集合 A は零次元であり, $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ なる m 個の点からなるとする. F_t の点 a_j における Milnor 数を μ_{t,a_j} で表す.

1995 年に A. Parusinski は次の結果を得た

定理 ([18]) $t_0 \notin C_f$ とするこのとき, 次は同値

(1) $t_0 \notin B_f$

(2) t_0 の近傍 $U \subset \mathbb{C}$ であり, $\forall t \in U$ に対して次を満たすものが存在する.

$\mu_{t,a_j} = \mu_{t_0,a_j}, j = 1, 2, \ldots, m$

つまり, Milnor 数が t_0 において jump するような場合, t_0 は bifurcation set B_f に属すことになる.

無限遠点 a_j が有理点であれば [24, 25] にあるように, local cohomology を用いて Milnor 数を計算できる論文 [15] のアルゴリズムにより, Milnor 数のパラメータ t の依存の仕方を計算できる.

以下に計算例をいくつか紹介する.

例 $f(x,y) = x^2y - x$

$F_t(x,y,\eta) = x^2y - x\eta^2 - t\eta^3,\ A = \{[0:1:0]\}.$

$x = uy, \eta = hy$ とおく. $F_t = y^3 g_t(u,h)$ をえる. ただし $g_t(u,h) = u^2 - uh^2 - th^3$ である.

Local cohomology $H_{J_{g_t}} = \{\psi \mid \frac{\partial g_t}{\partial u}\psi = \frac{\partial g_t}{\partial h}\psi = 0\}$ を求める

(i) $t \neq 0$ のとき, $H_{J_{g_t}} = \mathrm{Span}\{\left[\frac{1}{uh}\right], \left[\frac{1}{uh^2}\right]\}$

(ii) $t = 0$ のとき, $H_{J_{g_0}} = \mathrm{Span}\{\left[\frac{1}{uh}\right], \left[\frac{1}{uh^2}\right], \left[\frac{1}{u^2h}\right] + 2\left[\frac{1}{uh^3}\right]\}.$

従って, $t \neq 0$ のとき, $\mu_t = 2$, $t = 0$ のとき, $\mu_0 = 3$ であり, bifurcation set は. $B_f = \{0\}$. である.

例 $f(x,y) = x^2y^2 + x$

$F_t(x,y,\eta) = x^2y^2 + x\eta^3 - t\eta^4,\ A = \{[0:1:0],[1:0:0]\}.$

無限遠点 $a_1 = [0:1:0]$ での計算.

$x = uy, \eta = hy$ とおく $F_t = y^4 g_t(u,h),\ g_t(u,h) = u^2 + uh^3 - th^4$

Local cohomology $H_{J_{g_t}} = \{\psi \mid \frac{\partial g_t}{\partial u}\psi = \frac{\partial g_t}{\partial h}\psi = 0\}$ を求める

(i) $t \neq 0$ のとき, $H_{J_{g_t}} = \mathrm{Span}\{\left[\frac{1}{uh}\right], \left[\frac{1}{uh^2}\right], \left[\frac{1}{uh^3}\right]\}$

(ii) $t = 0$ のとき, $H_{J_{g_0}} = \mathrm{Span}\{\left[\frac{1}{uh}\right], \left[\frac{1}{uh^2}\right], \left[\frac{1}{uh^3}\right], \left[\frac{1}{u^2h}\right] + 2\left[\frac{1}{uh^4}\right], \left[\frac{1}{u^2h^2}\right] + 2\left[\frac{1}{uh^5}\right]\}.$

故, $t \neq 0$ のとき, $\mu_{t,a_1} = 3$, $t = 0$ のとき, $\mu_{0,a_1} = 5$ である.

無限遠点 $a_2 = [1:0:0]$ で計算すると, t によらずに $\mu_{t,a_2} = 2$ を得る.

以上より, $B_f = \{0\}$ をえる.

例 (S. A. Broughton) $f(x,y) = (x + y^2)^2 + y^2$

Tame 多項式であるので, A. Parusinski の結果を用いる必要はないが, local cohomology を用いて計算してみる.

$F_t(x,y,\eta) = y^4 + 2xy^2\eta + (x^2 + y^2)\eta^2 - t\eta^4,\ A = \{[1:0:0]\}.$

$y = vx, \eta = hx$ とおく. $F_t = x^4 g_t(v,h),\ g_t(v,h) = v^4 + 2v^2h + h^2 + v^2h^2 - th^4$

Local cohomology $H_{J_{g_t}} = \{\psi \mid \frac{\partial g_t}{\partial v}\psi = \frac{\partial g_t}{\partial h}\psi = 0\}$ を求める

常に $H_{J_{g_t}} = \mathrm{Span}\{\left[\frac{1}{vh}\right], \left[\frac{1}{v^2h}\right], \left[\frac{1}{v^3h}\right] - \left[\frac{1}{vh^2}\right], \left[\frac{1}{v^5h}\right] - \left[\frac{1}{v^3h^2}\right] + \left[\frac{1}{vh^3}\right] + \left[\frac{1}{vh^2}\right]\}$ が成り立つ.

従って, $\mu_{t,a} = 5$ が常に成り立つ.

例 (A. Dimca [8]) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + x$

$F_t(x,y,z,\eta) = x^2y + y^2z + x\eta^2 - t\eta^3,\ A = \{[0:0:1:0]\},$

$x = uz, y = vz, \eta = hz$ とおく. $F_t = z^3 g_t(u,v,h),\ g_t(u,v,h) = u^2v + v^2 + uh^2 - th^3$

Local cohomology $H_{J_{g_t}} = \{\psi \mid \frac{\partial g_t}{\partial u}\psi = \frac{\partial g_t}{\partial v}\psi = \frac{\partial g_t}{\partial h}\psi = 0\}$ を求める.

$H_{J_{g_t}} = \mathrm{Span}\{\left[\frac{1}{uvh}\right], \left[\frac{1}{uvh^2}\right], \left[\frac{1}{u^2vh}\right], \left[\frac{1}{v^3h}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{uv^2h}\right], \left[\frac{1}{u^4vh}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{u^2v^2h}\right] + \frac{3}{2}t\left[\frac{1}{u^2vh^2}\right] + \left[\frac{1}{uvh^3}\right]\}$ を得る.

基底 local cohomology class は t によるが, Milnor 数は t に依らず, 一定である. 故, $B_f = \emptyset$ を得る.

集合 A は一般には有理点からなるとは限らない. そのような場合には, local cohomology を求めるアルゴリズムを利用することが出来ない. A. Parusinski の結果を用いて bifurcation set を決定するためには, 有理点でないような点で局所環におけるパラメータ付きのイデアルの colength を計算できるようなアルゴリズムを用意する必要がある.

参 考 文 献

[1] A. Bodin, Newton polygons and families of polynomials, *Manuscripta Math.* **113** (2004), 371-382

[2] A. Bodin, Computation of Milnor numbers and critical values at infinity, *J. Symbolic Comput.* **38** (2004), 1417–1427

[3] A. Bodin and M. Tibar, Topological equivalence of complex polynomials, *Adv. in Math.* **199** (2006), 136–150

[4] S. A. Broughton, On the topology of polynomial hypersurfaces, *Proc. Sympos. in Pure Math.* **40** (1983), 167–178

[5] S. A. Broughton, Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces, *Invent. Math.* **92** (1988), 217–241

[6] P. Cassou-Noguès, Sur la généralisation d'un théorème de Kouchnirenko, *Compositio Math.* **103** (1996), 95–121

[7] P. Cassou-Noguès and A. Dimca, Topology of complex polynomials via polar curves, *Kodai Math. J.* **22** (1999), 131–139

[8] A. Dimca, Singularities and Topology of Hypersurfaces, Universitext, Springer 1992

[9] A. Douai, Très bonnes bases du réseau de Brieskorn d'un polynôme modéré, *Bull. de la S. M. F.* **127** (1999), 255–287

[10] M. Ishikawa, The bifurcation set of a complex polynomial function of two variables and the Newton polygons of singularities at infinity, *J. Math. Soc. Japan* **54** (2002), 161–196

[11] Z. Jelonek and K. Kurdyka, On asymptotic critical values of a complex polynomial, *J. Reine Angrew. Math.* **565** (2003), 1–11

[12] A. G. Koushnirenko, Polyèdre de Newton et nombres de Milnor, *Invent. Math.* **32** (1976), 1–31

[13] V. T. Lê and M. Oka, Estimation of the number of the critical values at infinity of a polynomial function, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **31** (1995), 577–598

[14] K. Nabeshima, A speed-up of the algorithm for computing comprehensive Gröbner systems, *Proc. ISSAC 2007*, 299-306, ACA New York, 2007

[15] K. Nabeshima and S. Tajima, Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, *J. of Symbolic Comput.* **82** (2017), 91–122

[16] A. Némethi, Théorie de Lefschetz pour les variétés algèbriques affines, *C. R. Acad. Sci. Paris* **303** (1986), 567–570

[17] A. Némethi and A. Zaharia, On the bifurcation set of a polynomial function and Newton boundary, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **26** (1990), 681–689

[18] A. Parusinski, On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity, *Compositio Math.* **97** (1995), 369–384

[19] T. S. Pham, On the topology of the Newton boundary at infinity, *J. Math. Soc. Japan* **60** (2008), 1065–1081

[20] C. Sabbar, Hypergeometric period for a tame polynomial, *C. R. Acad. Sci. Paris* **328** (1999), 603–608

[21] M. Schulze, Good bases for tame polynomials, *J. Symbolic Comput.* **39** (2005), 103–126

[22] D. Siersma and M. Tibar, Singularities at infinity and their vanishing cycles, *Duke Math. J.* **80** (1995), 771-783.

[23] A. Stasica, An effective description of the Jelonek set, *J. Pure and Appl. Algebra***169** (2002), 321–326

[24] 田島慎一. 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1456**(2005), 126–132

[25] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, 京都大学数理解析研究所講究録 **1568** (2007), 74–80