Drury-Arveson 空間の普遍性について

名古屋大学・多元数理科学研究科 荒神 健太
Kenta Kojin
Graduate school of mathematics,
Nagoya University

2023 年 3 月 31 日

概要

開単位円盤上で定義される Hardy 空間の多変数化の一つである Drury-Arvedon 空間の普遍性について紹介する．結論として, 完全 Pick 性と呼ばれる性質を持つ再生核 Hilbert 空間とその掛け算代数は, それぞれ $H^2(\mathbb{D})$ や $H^\infty(\mathbb{D})$ に似た性質を持つことがわかる．

1 序論

再生核 $\frac{1}{1-z\overline{w}}$ に対する再生核 Hilbert 空間である Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ や, その掛け算代数である $H^\infty(\mathbb{D})$ に対して, Pick の補間定理 [12], Beurling の定理 [5] や Carlson の定理 [6] 等重要な事実が成り立つことがよく知られている．そこで, どのような再生核 Hilbert 空間とその掛け算代数が Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ やその掛け算代数 $H^\infty(\mathbb{D})$ のような良い性質を持つのかを研究することは, 再生核 Hilbert 空間の研究において重要である．

この問題に関して, 多変数版の Hardy 空間の一つで, 再生核 $\frac{1}{1-\langle z,w\rangle_{\mathbb{C}^d}}$ に関する再生核 Hilbert 空間である Drury-Arveson 空間と上述の Pick の補間定理が重要な役割を果たすことが知られている [3], [8]．実際, 完全 Pick 空間と呼ばれる行列値の Pick の補間定理が成り立つ空間は全て, Drury-Arveson 空間の商空間として実現できる．この性質は Drury-Arveson 空間の普遍性と呼ばれ, 現在も完全 Pick 性と Drury-Arveson 空間をキー

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya, 464-8602, Japan
E-mail adress:m20016y@math.nagoya-u.ac.jp

ワードに Hardy 空間論の一般化が試みられている．このノートでは具体例を交えながら，Drury-Arveson 空間の普遍性を紹介する．最近の発展は [8] を参照して頂きたい．

2　Pick の補間定理

この章では Pick の補間定理の主張を述べた後，それを再生核 Hilbert 空間の言葉に翻訳する．

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\},$$

$$\mathscr{S}(\mathbb{D}) := \left\{ \phi \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \|\phi\|_\infty := \sup_{z \in \mathbb{D}} |\phi(z)| \le 1 \right\}$$

と定める．ここで，$\mathcal{O}(\mathbb{D})$ は開単位円盤 $\mathbb{D}$ 上の正則関数全体である．

定理 2.1. (Pick の補間定理 [12]) 有限個の点 $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{D}$, $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{C}$ に対して，以下は同値である:

(1) $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{D})$ で $\phi(z_i) = w_i \ (i = 1, \dots, N)$ を満たすものが存在する．

(2) Pick 行列

$$\left[\frac{1 - w_i \overline{w_j}}{1 - z_i \overline{z_j}} \right]_{i,j=1}^N$$

が半正定値である．

次に，再生核 Hilbert 空間の掛け算代数を定義する．

定義 2.2. H_k を集合 X 上の再生核 k に関する再生核 Hilbert 空間とする．集合

$$Mult(H_k) := \{\phi : X \to \mathbb{C} \mid \phi f \in H_k \ \ (f \in H_k)\}$$

を H_k の掛け算代数と呼び，$Mult(H_k)$ の元を掛け算作用素と呼ぶ．

任意の $\phi \in Mult(H_k)$ に対し，H_k 上の線形写像 $M_\phi : f \mapsto \phi f$ は閉グラフ定理により有界線形作用素である．そこで，ϕ の掛け算ノルムを $\|\phi\|_{Mult} := \|M_\phi\|$ と定める．また，$Mult_1(H_k)$ をノルム 1 以下の掛け算作用素全体の集合とする．再生核 Hilbert 空間 H_k が Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ の場合は，

$$\mathscr{S}(\mathbb{D}) = Mult_1(H^2(\mathbb{D}))$$

であることがよく知られている [3, Theorem 3.24]．Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ の再生核は $k^s(z, w) = \frac{1}{1 - z\overline{w}}$ であるから，定理 2.1 は次のように翻訳できる．

定理 2.3. 有限個の点 $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{D}$, $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{C}$ に対して, 以下は同値である:

(1) $\phi \in Mult_1(H^2(\mathbb{D}))$ で $\phi(z_i) = w_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ を満たすものが存在する.

(2) *Pick* 行列
$$[(1 - w_i\overline{w_j})k^s(z_i, w_j)]_{i,j=1}^N$$
が半正定値である.

従って, より一般の再生核 Hilbert 空間に対しても, Pick の補間問題を考えることができる.

3 完全 Pick 空間

Pick の補間定理は 1967 年に Sarason[15] が作用素論的な証明を与え, 一般の再生核 Hilbert 空間に関しては Agler[1] が考察し, 十分条件を与えた. さらに, その条件は再生核 Hilbert 空間において行列値の Pick の補間定理が成り立つ為の必要十分条件であり ([10, 11, 13]), そのような空間を完全 Pick 空間という.

以降, 再生核 Hilbert 空間 H_k に次の条件を仮定する:

(1) H_k は可分である.

(2) H_k は既約である. 即ち, 任意の $z, w \in X$ に対して $k(z, w) \neq 0$ であり, $z \neq w$ ならば $k(\cdot, z)$ と $k(\cdot, w)$ は一次独立である.

(3) H_k は正規である. 即ち, 任意の $z \in X$ に対して, $k(z, w_0) = 1$ を満たすような $w_0 \in X$ が存在する.

条件 (3) における w_0 は Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ における単位円盤 $\mathbb{D}$ の原点 0 に対応する. また, 定理の主張が煩雑になるのを避けるために正規性を仮定するが, 本質的な条件ではない ([3, Section 2.6] または [8, Section 4,2] を見よ).

定義 3.1. 再生核 Hilbert 空間 H_k が $M_{r\times r}$-Pick 空間であるとは, X 上の有限個の点 $z_1, \ldots, z_N \in X$ と有限個の $r \times r$ 行列 $W_1, \ldots, W_N \in \mathbb{M}_r(\mathbb{C})$ から定まる $rN \times rN$ 行列 $[(I - W_iW_j^*)k(z_i, z_j)]_{i,j=1}^N$ が半正定値であるならば, $\Phi \in \mathbb{M}_r(Mult(H_k))$ で $\|\Phi\| \leq 1$ かつ $\Phi(z_i) = W_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ を満たすものが存在するときをいう. 特に, $M_{1\times 1}$-Pick 空間を単に Pick 空間という.

また, 再生核 Hilbert 空間 H_k が任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して $M_{r\times r}$-Pick 空間であるとき, H_k は**完全 Pick 空間**であるという.

この定義の逆は任意の再生核 Hilbert 空間で成り立つ．すなわち，$\|\Phi\| \leq 1$ かつ $\Phi(z_i) = W_i$ $(i = 1, \dots, N)$ を満たす $\Phi \in \mathbb{M}_r(Mult(H_k))$ が存在するとき．行列 $[(I - W_i W_j^*)k(z_i, z_j)]_{i,j=1}^N$ は半正定値である [3, Theorem 5.8].

完全 Pick 空間の例をいくつか紹介する.

例 3.2. (1) (Drury-Arveson 空間 H_d^2 [3, Theorem7.28], [4], [9])

$d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とする．d 次元開単位球 $\mathbb{B}_d$ を

$$\mathbb{B}_d := \{z \in \mathbb{C}^d \mid \|z\|_2 < 1\}$$

で定める．ただし $\| \cdot \|_2$ は Euclid ノルムであり，$d = \infty$ のときは $\mathbb{C}^\infty = \ell^2(\mathbb{N})$ と定める．さらに，Drury-Arveson 核 $k_d : \mathbb{B}_d \times \mathbb{B}_d \to \mathbb{C}$ を

$$k_d(z, w) := \frac{1}{1 - \langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^d}}$$

と定め，この再生核に関する再生核 Hilbert 空間を Drury-Arveson 空間と呼び，H_d^2 と書く．自明に $H_1^2 = H^2(\mathbb{D})$ である．Drury-Arveson 空間の性質は [8] に詳しくまとめられている.

(2) (Dirichlet space $\mathcal{D}$ [3, Corollary 7.41])

Dirichlet 空間 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}) \;\middle|\; \|f\|_{\mathcal{D}}^2 := \|f\|_{H^2(\mathbb{D})}^2 + \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dm < \infty \right\}$$

で定める．ここで，m は平面上の Lebesgue 測度である．Dirichlet 空間 $\mathcal{D}$ は再生核 Hilbert 空間であり，その再生核は

$$k_{\mathcal{D}}(z, w) = -\frac{1}{\overline{w}z} \log(1 - \overline{w}z)$$

で与えられる.

(3) (Sobolev 空間 W_1^2 [3, Theorem 7.43])

閉区間 $[0, 1]$ 上の絶対連続関数全体を $AC[0, 1]$ と表す．再生核 Hilbert 空間

$$W_1^2 := \left\{ f \in AC[0, 1] \;\middle|\; \|f\|_{W_1^2} := \int_0^1 |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 \, dx \right\}$$

を Sobolev 空間と呼ぶ．この空間の再生核は

$$k_{W_1^2}(x, y) = \begin{cases} u(x)v(y) & (y \leq x) \\ v(x)u(y) & (x \leq y) \end{cases}$$

で与えられる．ここで，$u(x) := c_0 \cosh(1-x)$，$v(y) := c_0 \cosh(y)$，$c_0 := \sqrt{\operatorname{cosech}(1)}$ である．また，この空間は正規ではないが，上で述べたように正規性は本質的な仮定ではない．

Pick 空間ではない再生核 Hilbert 空間の例として，開単位円盤上の Bergman 空間 $L^2_a(\mathbb{D})$ が挙げられる．Bergman 空間の再生核は $k_{L^2_a(\mathbb{D})}(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}$ であり，$Mult_1(L^2_a(\mathbb{D})) = \mathscr{S}(\mathbb{D}) (= Mult_1(H^2(\mathbb{D})))$ である．$z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $w_1 = 0$, $w_2 = \frac{\sqrt{7}}{4}$ とおくと，2×2 行列 $[(1 - w_i\overline{w_j})k_{L^2_a(\mathbb{D})}(z_i, z_j)]^2_{i,j=1}$ が半正定値であることは容易にわかる．一方，Schwarz の補題 [14, Theorem 12.2] により，$\phi(z_i) = w_i$ $(i = 1, 2)$ を満たす $\phi \in (\mathbb{D})$ は存在しない．従って，$L^2_a(\mathbb{D})$ は Pick 空間ではない．より一般に，与えた掛け算代数に対して，それを掛け算代数として持つ Pick 空間は高々一つしか存在しないことが知られている [7, Corollary 3.2]．

4 Drury-Arveson 空間の普遍性

Agler と McCarthy[2] による Drury-Arveson 空間の普遍性について述べる．これにより，任意の完全 Pick 空間は Drury-Arveson 空間の商空間として実現されることがわかる．

定理 4.1. (Drury-Arveson 空間の普遍性 [2]) 再生核 Hilbert 空間 H_k が完全 Pick 空間であるならば，$d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ と単射 $b : X \to \mathbb{B}_d$ が存在して，以下を満たす:

(1) H^2_d から H_k への線型作用素 $f \mapsto f \circ b$ の共役作用素は等長作用素である．特に，$f \mapsto f \circ b$ は全射である．

(2) 任意の $\Phi \in Mult(H_k)$ に対して，$\Phi = \phi \circ b$ かつ $\|\Phi\| = \|\phi\|$ となる $\phi \in Mult(H^2_d)$ が存在する．特に，$Mult(H^2_d)$ から $Mult(H_k)$ への線形写像 $\phi \mapsto \phi \circ b$ は全射である．

最後に，正則関数からなる再生核 Hilbert 空間で，Pick 空間だが完全 Pick 空間ではないものが存在するかどうかは未解明である．なお，可算集合上の関数からなる再生核 Hilbert 空間で，Pick 空間だが完全 Pick 空間ではないものが存在することは知られている [16]．

参考文献

[1] J. Agler, Some interpolation theorems of Nevanlinna-Pick type, Preprint, 1988

[2] J. Agler and J. E. McCarthy, Complete Nevanlinna-Pick kernels, *J. Funct. Anal.*

175, no. 1, 111-124, 2000

[3] J. Agler and J. E. McCarthy, *Pick interpolation and Hilbert Function Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 44, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[4] J. A. Ball, T. T. Trent, and V. Vinnikov, Interpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces, Operator theory and analysis (Amsterdam, 1997), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 122, Birkhäuser, Basel, pp. 89-138, 2001.

[5] A. Beurling, On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, *Acta Math.*, 81, 239-255, 1949.

[6] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, *Amer. J. Math.* 80, 921-930, 1958

[7] M. Hartz, On the isomorphism problem for multiplier algebras of Nevanlinna-Pick spaces, *Canad. J. Math.* 69, no. 1, 54-106, 2017.

[8] M. Hartz, An invitation to the Drury-Arveson space, preprint, `https://arxiv.org/abs/2204.01559`.

[9] G. Marx, The Complete Pick Property and Rerproducing Kernel Hilbert Spaces, Master's Thesis, Virginia Tech, 2013.

[10] S. McCullough, Carathéodory interpolation kernels, *Integral Equations Operator Theory* 15, no. 1, 43-71, 1992.

[11] S. McCullough, The local de Branges-Rovnyak construction and complete Nevanlinna-Pick kernels, *Algebraic methods in operator theory*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 15-24, 1994.

[12] G. Pick, Über die Beschränkungen analytischer Funktion, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden, *Math. Ann.* 77, 7-23, 1916.

[13] P. Quiggin, For which reproducing kernel Hilbert spaces is Pick' s theorem true?, *Integral Equations Operator Theory* 16, no. 2, 244-266, 1993.

[14] W. Rudin, *Real and Complex Analysis Third Edition*, McGraw-Hill, Singapore, 1987

[15] D. Sarason, Generalized interpolation in H^∞, *Trans. Amer. Math. Soc.* 127, 179-203, 1967

[16] A. Serra, New examples of non-complete Pick kernels, *Integral Equations Operator Theory* 53, no. 4, 553-572, 2005.