重み付き合成作用素の準 Banach 関数空間における有界性と力学系の安定性について

Bounded weighted composition operators on functional quasi-Banach spaces and stability of dynamical systems

石川 勲 *
愛媛大学・データサイエンスセンター †

Isao Ishikawa
Center for Data Science, Ehime University

概要

本稿では, 正則関数の空間に連続的に埋め込まれる準 Banach 関数空間を考察し, その上で定義される重み付き合成作用素の有界性について, 近年得られた結果について解説する. 本研究で得た進展として重要なのは, 正則関数の空間に連続的に埋め込まれる準 Banach 関数空間の性質をうまく用いることで, 重み付き合成作用素の解析に力学系理論を応用することが可能となった点にある. その帰結として, 任意の（非自明な）準 Banach 空間が 1 変数の整関数の空間に連続的に埋め込まれる時, 複素力学系が有界な合成作用素を誘導するのは, アフィン写像のみであることを証明した. また, 準 Banach 空間が無限次元の場合, かなり一般的な状況で有界重み付き合成作用素についても同様の結果が得られた. さらに, ある適当な技術的仮定の下では, 2 次元複素アフィン空間上の正則関数から成る準 Banach 空間において, 有界重み付き合成作用素を誘導する多項式自己同型は, アフィン変換を除いて存在しないことを証明した.

1 序

本稿では, 複素多様体上の正則関数の空間に連続的に含まれる準 Banach 空間上において, そこで定義される重み付き合成作用素を考察し, 重み付き合成作用素の有界性と元の力学系の性質との関連性について, 近年得られた結果を解説する. 本研究で判明したのは, 重み付き合成作用素に有界性があると, 元の力学系の固定点や周期点周りにおける挙動が安定したものになることである. その帰結として, 力学系の理論を応用することで, 合成作用素に関連するいくつかの非自明な定理を得ることができた.

以下では, いくつか必要な概念を導入して, 本稿の主結果を述べる. その他, 細かい記号はこの章の

* ishikawa.isao.zx@ehime-u.ac.jp
† 〒790-8577 松山市文京町 3 番

最後に説明してある. X を d 次元複素多様体とする. $\mathscr{A}(X)$ は X 上の正則関数の空間とし, $\mathscr{A}(X)$ には広義一様収束によって定義される位相を入れる. V を準 Banach 空間とする. 準 Banach 空間とは, 位相が準ノルムから定まり, その位相に関して完備な Hausdorff 位相線型空間のことである. ここで, 準ノルムとは $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で, 以下の 3 つの条件を満たす写像のことを言う：(1) $\|av\|_V = |a| \cdot \|v\|_V$, (2) $K \geq 1$ が存在して $\|v+w\|_V \leq K(\|v\|_V + \|w\|_V)$, 及び, (3) $\|v\|_V = 0$ ならば $v = 0$. ただし, $a \in \mathbb{C}$, 及び, $v, w \in V$ である. 本稿では常に **V が $\mathscr{A}(X)$ の部分集合**であり, **包含写像 $\iota : V \hookrightarrow \mathscr{A}(X)$ が連続**であると仮定する. V の典型的な例は再生核 Hilbert 空間（RKHS）, Hardy 空間, 及び, Bergman 空間である（例えば, 本稿の 3 章や [12] を参照）.

$f : X \to X$ を正則写像とし, $u \in \mathscr{A}(X)$ とする. 重み u の**重み付き合成作用素**は, V 上の線形作用素であって, $\{h \in V : u \cdot (h \circ f) \in V\}$ を定義域として, $uC_f h := u \cdot (h \circ f)$ と定義される. 特に, 重みが定数関数 1 の場合は**合成作用素**と呼ばれ, 古くから盛んに研究されている (合成作用素の標準的な文献は [11, 35] などが挙げられる). 一般の重み付き合成作用素も様々な研究があるが, $X = \mathbb{C}^d$ の場合, 準 Banach 空間上の重み付き合成作用素の有界性の特徴付けについて多くの研究が存在する. それらの研究は重み付き合成作用素の有界性から元の正則写像がアフィン写像であることが従うことを示している [1, 6, 7, 8, 17, 18, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 33, 34]. これらの研究は, $\mathbb{C}^d$ 上の正則関数からなる関数空間において「重み付き合成作用素が有界ならば写像がアフィン写像」という性質が, かなり一般的な状況下で成り立つ示唆しており, この性質が常に成り立つのかといった疑問が生じる. 以下の定理 1.2, 及び, 定理 1.3 で見るように, $d = 1$ の場合において, かなり一般的な状況でこの性質が成り立つことを示した. さらに, 定理 1.4 によって, 通常の合成作用素に対しては $d = 1$ の場合にこの問題を完全に解決した.

合成作用素は工学においても重要であり, 例えば信号処理 [2, 3, 9] では比較的古くから研究されており, また最近では機械学習やデータサイエンス [16, 19, 21] において Koopman 作用素として近年活発に研究されている.

主定理を述べるために, いくつか記号を導入する.

$$\mathscr{D}(\mathbb{C}^d) := \bigoplus_{n_1, \ldots, n_d \geq 0} \mathbb{C}\partial_{z_1}^{n_1} \cdots \partial_{z_d}^{n_d}$$

を $\mathscr{A}(\mathbb{C}^d)$ 上の正則微分作用素の空間とし, 各 $n \geq 0$ に対して,

$$\mathscr{D}_n(\mathbb{C}^d) := \bigoplus_{\substack{n_1, \ldots, n_d \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_d \leq n}} \mathbb{C}\partial_{z_1}^{n_1} \cdots \partial_{z_d}^{n_d}.$$

と定義する. $p \in X$ とし, p の開近傍から $\mathbb{C}^d$ の開部分集合への局所複素座標 ϕ を固定する. この時, 次のように単射線形写像 $\mathscr{D}(\mathbb{C}^d) \to \mathscr{A}(X)'$ を

$$\delta_{p,\phi}(D)(h) := D(h \circ \phi^{-1})(\phi(p))$$

と定義する. ここで, $D \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^d)$, $h \in \mathscr{A}(X)$ である. なお, 本稿では X が $\mathbb{C}^d$ の開部分集合の時, 常に局所座標 ϕ を標準的な包含写像として取り, $\delta_{p,\phi}$ の代わりに δ_p と書く. 正則微分作用素の空間から定まる $\mathscr{A}(X)'$ の部分空間を次のように定義する：

$$\mathscr{D}(X)_p := \delta_{p,\phi}(\mathscr{D}(\mathbb{C}^d)),$$
$$\mathscr{D}_n(X)_p := \delta_{p,\phi}(\mathscr{D}_n(\mathbb{C}^d)).$$

右辺の集合は局所座標 ϕ の取り方に寄らないことに注意する. 後に示すように（補題 2.3）, $f^*: h \mapsto h\circ f$ の双対作用素 $f_* := f^{*\prime}: \mathscr{A}(X)' \to \mathscr{A}(X)'$ は, p が f の固定点ならば, 有限次元部分空間 $\mathscr{D}_n(X)_p$ を保つ. 従って, f_* は $\mathscr{D}_n(X)_p/\mathscr{D}_{n-1}(X)_p$ 上の線形写像 $\mathrm{gr}^n_{f_*}$ を誘導する. $n \geq 0$ に対して, ι' によって誘導される全射線形写像を以下のように定義する：

$$\kappa_p^n \colon \mathscr{D}_n(X)_p/\mathscr{D}_{n-1}(X)_p \longrightarrow \iota'(\mathscr{D}_n(X)_p)/\iota'(\mathscr{D}_{n-1}(X)_p).$$

ここで, $\mathscr{D}_{-1}(X)_p := \{0\}$ と定義する.

以上の準備の下, 本稿の主結果である次の定理を得る：

定理 1.1. $p \in X$ を f の固定点とする. 次の条件を仮定する.

(1) uC_f が V 上の有界線形作用素となるような $u(p) \neq 0$ となる $u \in \mathscr{A}(X)$ が存在する.
(2) 無限個の $n \geq 0$ に対して, $\mathrm{Ker}(\kappa_p^n) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{gr}^n_{f_*})$.

この時, $\mathrm{d}f_p: T_p^{1,0}(X) \to T_p^{1,0}(X)$ の固有値 α は $|\alpha| \leq 1$ を満たす. ここで, $T_p^{1,0}(X)$ は X の p での複素接ベクトルの (1,0) 部分である.

条件 (2) はややテクニカルな条件だが, 実際, 様々な関数空間と複素力学系に対して成り立つ. 例えば, Fock 空間 [6], いくつかの特別な RKHS [18,25,26,30], あるいは, X がリーマン面で無限次元の V を考えると, 任意の複素力学系で条件 (2) が成立する. 任意の複素力学系で条件 (2) 成り立つ関数空間の例については 3 章で紹介する. 周期点でのヤコビ行列の固有値 α は力学系の理論において活発に研究されている対象であり, 定理 1.1 の不等式を満たさない周期点を, saddle 周期点, または, repelling 周期点と呼ぶ. 定理 1.1 から分かることは, 準 Banach 関数空間 $V \subset \mathscr{A}(X)$ 上で有界な合成作用素を誘導する力学系は, saddle または repelling な周期点を持つことができず, X 上でかなり穏やかな振る舞いをするということである. 証明は, $\{\iota'(\mathscr{D}_n(X)_p)\}_{n\geq 0}$ という, C_f' で不変な有限次元空間の昇鎖列の存在に基づいており, これと, V における準ノルムを用いて, ヤコビアンの固有値の情報を抽出することができる.

$X = \mathbb{C}$ の場合を考えると, 1 変数複素力学系の理論を援用することで以下の定理が成り立つ.

定理 1.2. $V \subset \mathscr{A}(\mathbb{C})$ を無限次元であるとする. ある零点を持たない $u \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$ が存在して, uC_f が V 上の有界線形作用素となるならば, ある $a,b \in \mathbb{C}$ が存在して, $f(z) = az + b$, かつ, $|a| \leq 1$ となる.

定理 1.3. $V \subset \mathscr{A}(\mathbb{C})$ を無限次元であるとする. $\mathbb{C}$ 上の多項式力学系 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ について, ある非零正則関数 $u \in \mathscr{A}(\mathbb{C})$ が存在して, uC_f が V 上の有界線形作用素となるならば, ある $a,b \in \mathbb{C}$ が存在して, $f(z) = az + b$, かつ, $|a| \leq 1$ となる.

重み付き合成作用素の有界性から力学系がアフィン写像になるという主張は, 1 次元の場合に限らず, 特別なケースで既にいくつか知られていた. 上の結果は, 1 次元の場合にはかなり一般的な状況においてにこれが真であることであることを意味している. なお, 定理 1.2, 及び, 定理 1.3 は V が有限次元の場合には成り立たない（例えば, $V = \mathbb{C}\mathrm{e}^z$, $f(z) = z^2 + z$, $u(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ を考えよ）. ところが, 次の定理 1.4 のように, 重みとして定数 1 を取る場合, すなわち, 通常の合成作用素の場合は V が有限次元であっても成り立つことが証明できる. 従って, 複素平面上の整関数からなる準 Banach 空間において,

通常の合成作用素の有界性の特徴付けの問題は完全に解決したと言える.

定理 1.4. $V \subset \mathscr{A}(\mathbb{C})$ が定数関数以外の整関数を含むとする. この時, 合成作用素 C_f が V 上の有界線形作用素であるならば, ある $a,b \in \mathbb{C}$ が存在して, $f(z) = az + b$ である. さらに, V が無限次元ならば, $|a| \leq 1$ である.

高次元の場合, 1 次元の場合と比較して問題はより複雑になる. $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ の部分半群 $\mathscr{G}_d(V)$ を, 正則行列 $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ であって, $b \in \mathbb{C}^d$, 及び, 零点を持たない $v \in \mathscr{A}(\mathbb{C}^d)$ が存在して, $vC_{A(\cdot)+b}$ が V 上で有界となるようなもの全体, として定義する. 2 次元の場合は次の定理が得られている：

定理 1.5. 次の *2* つ条件を仮定する：

(1) 有限個を除く全ての $p \in \mathbb{C}^2$, 及び, 無限個の $n \geq 0$ に対して, κ_p^n が単射である
(2) $\langle \mathscr{G}_2(V) \rangle_{\mathbb{C}} = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

この時, 任意の多項式自己同型 $f \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ に対して, 零点を持たない $u \in \mathscr{A}(\mathbb{C}^2)$ が存在して, uC_f が V 上の有界線形作用素となるならば, ある $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, 及び, $b \in \mathbb{C}^2$ が存在して, $f(z) = Az + b$ となる.

ここで, $f = (f_1, f_2) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ について, f_1 と f_2 が多項式である時, 多項式写像と呼ぶ. また, 多項式写像 f に対して, 別の多項式写像 $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ が存在して, $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ となる時, f を**多項式自己同型**と呼ぶ. 多項式自己同型全体は [15] によってその構造がよく調べられており, 定理 1.5 の証明において本質的である.

本研究のポイントは合成作用素の解析と力学系の理論の橋渡しを行い, 合成作用素の関数解析的な性質を力学系の理論を用いて解析できるようにした点である. 複素力学系の理論において saddle 周期点や repelling 周期点の存在は力学系の理論においても重要な問題であるが（例えば, [14, Question 2.16] を参照）, 上の定理によれば, 「複素力学系の saddle 周期点や repelling 周期点が無限個存在するか」というに問題が解けると自動的に「合成作用素の有界性から写像のアフィン性が出るか」という問題が解けることを意味している.

本稿の構成は以下の通りである. 2 章では, 基本的な概念やいくつかの予備的な補題を紹介し, 定理 1.1 を証明する. 3 章では, 定理 1.1 の条件 (2) を満たす V の具体的例をいくつか紹介する. 4 章では, $X = \mathbb{C}^d$ の場合に焦点を当て, $d = 1$ の場合の定理 1.2 と定理 1.3, 定理 1.4, そして, $d = 2$ の場合の定理 1.5 を証明し, 一般の d の場合に成り立つであろう予想を述べ, その現状などを紹介する.

記号

実数（resp. 複素数）の集合を $\mathbb{R}$（resp. $\mathbb{C}$）で表す. 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{R}$ に対して, $S_{>0}$（resp. $S_{\geq 0}$）は S の正（resp. 非負）の要素の集合を表す. $\mathbb{C}^d$ の開集合上の正則関数の j 番目の変数に関する偏微分を ∂_{z_j} で表す. サイズ d の正則複素行列（resp. 複素行列）全体の集合を $\mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$（resp. $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$）で表す. 複素線形空間 V の任意の部分集合 $S \subset V$ に対して, $\langle S \rangle_{\mathbb{C}}$ は S によって生成される線形部分空間を表す. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $(z_1, \ldots, z_d)$, 及び, $(\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_d})$ に対して, $z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \ldots z_d^{\alpha_d}$,

及び, $\partial_z^\alpha := \partial_{z_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{z_d}^{\alpha_d}$ と書く. 位相線型空間 W に対して, W' で強位相によって位相が定義された W の双対空間を表す. また, 位相線型空間間の連続線形作用素 $T : V \to W$ について, 双対作用素を $T' : W' \to V'$ とする.

2 重み付き合成作用素の有界性と力学系の安定性

この章では, 定理 1.1 を証明する. X を次元 d の複素多様体とし, $f : X \to X$ を正則写像とする. V を準ノルム $\|\cdot\|_V$ に関する完備な Hausdorff 位相線形である準 Banach 空間とする. ここで, 準ノルムは $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で, 以下の 3 つの条件を満たす写像である：(1) $\|av\|_V = |a| \cdot \|v\|_V$, (2) $K \geq 1$ が存在して $\|v+w\|_V \leq K(\|v\|_V + \|w\|_V)$, 及び, (3) $\|v\|_V = 0$ のとき $v = 0$, ただし $a \in \mathbb{C}$, 及び, $v, w \in V$ である. 準 Banach 空間は必ずしも局所凸であるとは限らないが, 準 Banach 空間上の有界線形作用素は Banach 空間でよく知られているものと同様の性質を持つことに注意する. 準 Banach 空間は 0 の有界近傍を持つ完備な Hausdorff 位相線形空間としても特徴付けられる（本稿の最後に付録として準 Banach 空間の基本的事項をまとめてある. さらなる詳細は [20] を参照されたい）. 最初に述べたように, $V \subset \mathscr{A}(X)$ として, 包含写像 $\iota : V \hookrightarrow \mathscr{A}(X)$ は連続であると仮定する. V の典型的な例については, 3 章で詳しく述べる.

補題 2.1. *$p \in \mathbb{C}^d$ とし, $U \subset \mathbb{C}^d$ を p の開近傍とする. $F : U \to \mathbb{C}^r$ を正則写像とし, $h, u : U \to \mathbb{C}$ を正則関数とする. すると, 任意の $\partial_{z_{i_1}} \cdots \partial_{z_{i_n}} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{C}^d)$ $(i_j \in \{1, \dots, d\})$ に対して, U から $\mathscr{D}_{n-1}(\mathbb{C}^d)$ への正則写像 $\mathbf{D}_n$ が存在し, すべての $p \in U$ に対して*

$$(\partial_{z_{i_1}} \cdots \partial_{z_{i_n}})(u \cdot (h \circ F))(p) - u(p) \left[\left(\prod_{j=1}^{n} \partial_{z_{i_j}} F_p \cdot \boldsymbol{\partial} \right) h \right] (F(p)) + (\mathbf{D}_n(p) h)(F(p)). \tag{2.1}$$

が成り立つ.

$$\partial_{z_j} F_p \cdot \boldsymbol{\partial} := \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial F^m}{\partial z_j}(p) \partial_{z_m} \in \mathscr{D}_1(\mathbb{C}^d),$$

ここで, $F = (F^1, \dots, F^r)$ であり, $F^j \in \mathscr{A}(U)$ $(j = 1, \dots, r)$ とする.

Proof. まず $u \equiv 1$ と仮定する. 一般の場合は, Leibniz 則からすぐに従う. 帰納法で証明する. $n = 1$ の場合, 連鎖律からすぐに導かれ, $\mathbf{D}_1 = 0$ となる. $n = k > 1$ の場合. $D = \partial_{z_{i_2}} \cdots \partial_{z_{i_k}}$ と置く. $p \in U$ を固定し, $p_t := p + t e_{i_1}$ とする. ここで $t \in \mathbb{C}$ であり, e_{i_1} は i_1 番目の成分が 1 で他の成分が 0 のベクトルである. すると, 帰納法の仮定により, 十分小さな t に対して,

$$D(h \circ F)(p_t) - \left[\left(\prod_{j=2}^{k} \partial_{z_{i_j}} F_{p_t} \cdot \boldsymbol{\partial} \right) h \right] (F(p_t)) + (\mathbf{D}_{k-1}(p_t) h)(F(p_t)). \tag{2.2}$$

となるような $\mathbf{D}_{k-1} : U \to \mathscr{D}_{k-2}(\mathbb{C}^d)$ が存在する. U から $\mathscr{D}_{k-1}(\mathbb{C}^d)$ への正則関数を

$$\mathbf{D}_k(p) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left\{ \mathbf{D}_{k-1}(p_t) - \prod_{j=1}^{k} \left(\partial_{z_{i_j}} F_{p_t} \cdot \boldsymbol{\partial} \right) \right\} \Bigg|_{t=0} + \left(\partial_{z_{i_1}} F_{p_t} \cdot \boldsymbol{\partial} \right) \cdot \mathbf{D}_{k-1}(p).$$

と定義する. 式 (2.2) に $\mathrm{d}/\mathrm{d}t|_{t=0}$ を適用し, 直接計算により, $n = k$ の場合の式 (2.1) が得られる. □

注意 2.2. なお上の補題は, 天下り的ではあるが, 多変数版の Faà di Bruno 公式 [10, Theorem 2.1] を用いた直接計算でも証明することができる.

$u \in \mathscr{A}(X)$ に対して, $uf^*(h) := u \cdot (h \circ f)$ によって uf^* を定義する. すると, uf^* は明らかに $\mathscr{A}(X)$ 上の連続線形作用素である. 従って, 双対作用素 $(uf^*)' : \mathscr{A}(X)' \to \mathscr{A}(X)'$ も連続線形作用素である. uC_f の定義域上では, $(uf^*)\iota = \iota(uC_f)$ であることに注意する.

補題 2.1 と Leibniz 則から次の主張が得られる：

補題 2.3. *$p \in X$ を f の固定点, すなわち, $f(p) = p$ とする. $\mathscr{A}(X)$ の u を固定する. ϕ を p の開近傍から $\mathbb{C}^d$ の開部分集合への双正則写像とする. この時, 任意の $\partial_{z_{i_1}} \cdots \partial_{z_{i_n}} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{C}^d)$ ($i_j \in \{1, \ldots, d\}$) に対して,*

$$(uf^*)'[\delta_{p,\phi}(\partial_{z_{i_1}} \cdots \partial_{z_{i_n}})] - \delta_{p,\phi}\left(u(p)\prod_{j=1}^{d}\left(\partial_{z_{i_j}} f^{\phi}_{\phi(p)} \cdot \boldsymbol{\partial}\right)\right) \in \mathscr{D}_{n-1}(X)_p. \tag{2.3}$$

ここで, $f^\phi := \phi \circ f \circ \phi^{-1}$ は $\phi(p)$ の十分小さい近傍で定義され, その他の記号は補題 2.1 に従う.

Proof. $h \in \mathscr{A}(X)$ とする. 定義により, $D \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^d)$ の場合,

$$\big((uf^*)'\delta_{p,\phi}(D)\big)(h) = D(u_\phi \cdot (h_\phi \circ f^\phi))(p),$$

ここで $()_\phi$ は $() \circ \phi^{-1}$ を表す. 従って, 補題 2.1 により, (2.3) が得られる. □

次の系が得られる:

系 2.4. *補題 2.3 と同じ記号を用いる. すると, 次の式が成り立つ:*

$$(uf^*)'(\mathscr{D}_n(X)_p) \subset \mathscr{D}_n(X)_p.$$

さらに, $\mathrm{gr}[\mathscr{D}(X)_p]$ 上で $\mathrm{gr}_{(uf^*)'} = u(p)\mathrm{gr}_{f_*}$ であり, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{gr}[\mathscr{D}(X)_p] & \xrightarrow[\mathrm{gr}_{(uf^*)'}]{} & \mathrm{gr}[\mathscr{D}(X)_p] \\ \uparrow\cong & & \uparrow\cong \\ \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_d] & \xrightarrow{u(p)S(\mathrm{d}f^{\phi}_{\phi(p)})} & \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_d] \end{array}$$

ここで, 垂直方向の矢印は対応 $t^\alpha \mapsto \delta_{p,\phi}(\partial_z^\alpha)$ によって定義され, $S(\mathrm{d}f^{\phi}_{\phi(p)})$ は対応 $t_i \mapsto \sum_{m=1}^{d} \frac{\partial f^\phi_m}{\partial x_i}(\phi(p))t_m$ によって定義される $\mathbb{C}[t_1, \ldots, t_d]$ 上の線形写像である.

Proof. 補題 2.3 により, $(uf^*)'(\mathscr{D}_n(X)_p) \subset \mathscr{D}_n(X)_p$ は明らかである. (2.3) により, $\mathrm{gr}_{(uf^*)'}$ は ∂_z^α を $u(p)(\partial_z f^{\phi}_{\phi(p)} \cdot \boldsymbol{\partial})^\alpha$ に写すため, 第二の主張も成り立つことが分かる. □

以上の準備の下, 定理 1.1 の証明を与える：

定理 1.1 の証明. 補題 2.4 により, 任意の $n \geq 0$ に対して, $0 \neq v_n \in \mathrm{gr}^n[\mathscr{D}(X)_p]$ が存在し,

$$\mathrm{gr}^n_{f_*}(v_n) = \alpha^n v_n.$$

$w_n := \kappa_p^n(v_n)$ とすると,

$$\mathrm{gr}^n_{(uC_f)'}(w_n) = \kappa_p^n \mathrm{gr}^n_{(uf^*)'}(v_n) = u(p)\alpha^n w_n,$$

が得られる. $v_n \notin \mathrm{Ker}(\mathrm{gr}^n_{f_*})$ であるため, 無限個の $n \geq 0$ で $w_n \neq 0$ となる. $\|(uC_f)'\| \geq \|\mathrm{gr}^n_{(uC_f)'}\|_0$ であることに注意する（命題 A.14 参照）. ここで, ノルム $\|\cdot\|$（resp. $\|\cdot\|_0$）は, V' における作用素ノルム（resp. κ_p^n の像における作用素ノルム）である, 従って, $w_n \neq 0$ となる任意の $n \geq 0$ に対して,

$$|u(p)|^{1/n} \cdot |\alpha| \leq \|(uC_f)'\|^{1/n}. \tag{2.4}$$

$u(p) \neq 0$ であり, (2.4) が無限個の n に対して成り立つため, $|\alpha| \leq 1$ が得られる. □

一般に定理 1.1 の (2) が成り立つかどうかは V に依る問題である. 3 章において, 重要な例をいくつか紹介するが, 1 次元連結複素多様体の場合は, V が無限次元という仮定のみで常に定理 1.1 の条件 (2) が成立することを以下で示す. まず, 準備として次の補題を証明する：

補題 2.5. *$V \subset \mathscr{A}(X)$ を連続包含写像 $\iota \colon V \hookrightarrow \mathscr{A}(X)$ を持つ準 Banach 空間とする. この時, V が無限次元であることと, 無限個の $n \geq 0$ に対して*

$$\iota'(\mathscr{D}_n(X)_p)/\iota'(\mathscr{D}_{n-1}(X)_p) \neq 0$$

が成立することが必要かつ十分である.

Proof. 十分性は明らかなので, 必要性のみ証明する. 任意の $n \geq k+1$ に対して,

$$\iota'(\mathscr{D}_n(X)_p)/\iota'(\mathscr{D}_{n-1}(X)_p) = 0.$$

となるような $k \geq 0$ が存在すると仮定する. すると,

$$\iota'(\mathscr{D}(X)_p) = \iota'(\mathscr{D}_k(X)_p). \tag{2.5}$$

となることが分かる. p における局所座標 ϕ を用いて $h^{(\alpha)}(p) := \delta_{p,\phi}(\partial_z^\alpha)(h)$ と定義し, 線形写像を

$$F : V \to \bigoplus_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} \\ |\alpha| \leq k}} \mathbb{C};\ h \mapsto \left(h^{(\alpha)}(p)\right)_{|\alpha| \leq k},$$

によって定義する. $F(h) = 0$ ならば, (2.5) により, F の p におけるテイラー展開が 0 になることが分かる. 従って, X が連結であるため, F が単射であることが示される. 故に, V は有限次元である. □

次のように, 1 次元の場合は V が無限次元ならば常に定理 1.1 の条件 (2) が成立する：

系 2.6. *X が 1 次元の連結な複素多様体であると仮定する. この時, V が無限次元ならば, 無限個の $n \geq 0$ に対して $\mathrm{Ker}(\kappa_p^n) = \{0\}$ が成り立つ.*

Proof. $\mathscr{D}_n(X)_p/\mathscr{D}_{n-1}(X)_p$ は常に 1 次元であり, κ_p^n は $\iota'(\mathscr{D}_n(X)_p)/\iota'(\mathscr{D}_{n-1}(X)_p)$ への全射線形写像であるため, κ_p^n が単射となるのは,

$$\iota'(\mathscr{D}_n(X)_p)/\iota'(\mathscr{D}_{n-1}(X)_p) \neq 0$$

となる場合に限る. 従って, この系は補題 2.5 から直ちに導かれる. □

3 正則関数の空間に連続的に含まれる関数空間

本節では, X 上の関数空間で $\mathscr{A}(X)$ に連続的に含まれるいくつかの重要かつ典型的な例を紹介する.

3.1 RKHS の理論

具体的な例を紹介する前に, RKHS の理論について簡単に復習をしておく. RKHS の理論は, $\mathscr{A}(X)$ に連続的に含まれる Hilbert 空間を構築できる典型的な理論的な枠組みの 1 つである. RKHS の理論そのものはかなり一般的な設定の下で展開されるが, ここでは本稿で必要な部分のみ紹介する. 詳細は, 例えば, [27] を参照されたい.

定義 3.1. X を任意の抽象的な空でない集合とし, $k : X \times X \to \mathbb{C}$ を写像とする. k が任意の有限個の $p_1, \ldots, p_n \in X$ に対して, 行列 $(k(p_i, p_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ が半正定値エルミート行列である時, k を**正定値カーネル**と呼ぶ.

Moore-Aronszajn の定理として知られている古典的な結果があり, 任意の正定値カーネル k に対して, 次の 2 つの条件が成立するような, X 上の $\mathbb{C}$ 値関数から成る Hilbert 空間 H_k が一意的に存在することが知られている.

(1) 任意の $p \in X$ に対して, 写像 $k_p := k(p, \cdot)$ は H_k の要素である.
(2) 任意の $p \in X$, 及び, $h \in H_k$ に対して, $\langle h, k_p \rangle_{H_k} = h(p)$ が成立する.

H_k を**再生核 Hilbert 空間** (reproducing kernel Hilbert space), 略して, RKHS と呼ぶ.

注意 3.2. 正定値カーネル k を一つ固定する. 抽象的な Hilbert 空間 H と $\langle \varphi(p), \varphi(p') \rangle_H = k(p, p')$ を満たす写像 $\varphi : X \to H$ が存在し, $\varphi(X)$ によって生成される線形部分空間が H で稠密であるとする. すると, 対応 $\varphi(p) \mapsto k_p$ は H から H_k への Hilbert 空間としての同型写像を定める. 従って, Hilbert 空間として, RKHS は「$\langle \varphi(p), \varphi(p') \rangle_H = k(p, p')$ を満たし, $\varphi(X)$ によって生成される線形部分空間が H で稠密である」という性質を満たす Hilbert 空間 H と写像 $\varphi : X \to H$ のペア (H, φ) としても特徴付けられる. φ はしばしば特徴写像と呼ばれる.

本稿では, 任意の $p \in X$ に対して $k_p \in \mathscr{A}(X)$ である時, 正定値カーネル k が**正則**であると言う. k が正則な正定値カーネルならば, k は $X \times X$ 上の関数として第 1 変数に関して反正則であることに注意する. H_k の各元は k の正則性を受け継ぐ, すなわち, 次の命題が成り立つ：

命題 3.3. X が複素多様体であり, $k : X \times X \to \mathbb{C}$ が正則な正定値カーネルであるとする. この時, H_k は $\mathscr{A}(X)$ に含まれる. さらに, 自然な包含写像 $H_k \hookrightarrow \mathscr{A}(X)$ は連続である.

Proof. [27, Theorem 2.6, 2.7] から導かれる. □

正則な正定値カーネルに付随する RKHS は, $\mathscr{A}(X)$ の部分空間として実現される Hilbert 空間として特徴付けられる. つまり, 次の命題が成り立つ.

命題 3.4. X を複素多様体とする．この時, $k \mapsto H_k$ による対応は, X 上の正則な正定値カーネルと, $\mathscr{A}(X)$ に連続的に含まれる *Hilbert* 空間との間の一対一対応を与える．

Proof. $k \mapsto H_k$ の逆対応を構成する．$H \subset \mathscr{A}(X)$ を, 包含 $H \hookrightarrow \mathscr{A}(X)$ が連続であるような Hilbert 空間とする．$p \in X$ に対して, H 上の線形汎関数 $h \mapsto h(p)$ は連続である．従って, Riesz の表現定理により， $k_p \in H$ が存在して $\langle h, k_p \rangle_H = h(p)$ を満たす．この時, $k(p, p') := \langle k_p, k_{p'} \rangle_H$ は明らかに X 上の正定値カーネルである．$H \subset \mathscr{A}(X)$ であるので, k は明らかに $X \times X$ 上の第 1 変数について反正則関数, 第 2 変数については正則である．RKHS の一意性により $H = H_k$ が成り立つ． □

H_k は Hilbert 空間であるため, Riesz の表現定理を用いて H_k' を H_k と同一視できる（この同一視は反線形であることに注意）．この同一視を用いて, $\iota'(\mathscr{D}(X)_p)$ の元は次の補題のように明示的に書くことができる：

命題 3.5. X を複素多様体とし, H_k を X 上の正則な正定値カーネル k に関連する *RKHS* とする．*Riesz* の表現定理を用いて H_k' を H_k と同一視する．$\iota \colon H_k \hookrightarrow \mathscr{A}(X)$ を包含写像とする．すると, 任意の $p \in X$, $D \in \mathscr{D}(X)_p$, 及び, $p_0 \in X$ に対して,

$$\iota'(D)(p_0) = \overline{D(k_{p_0})}.$$

となる．

Proof. 定義より, $\iota'(D)(p_0) = \langle \iota'(D), k_{p_0} \rangle_{H_k} = \overline{D(k_{p_0})}$ となる． □

3.2 形式的冪級数によって定義された正定値カーネル

ここでは, 形式的冪級数によって定義された正定値カーネルを考える．これはさまざまな典型的な正定値カーネルを含み, [26, 30] で扱われている RKHS のカーネルの拡張と見做せる．

$\Phi(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ を複素関数とし, $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ を 0 の開近傍とする．任意の $z \in \Omega$ に対して, 次の級数

$$\Phi(|z_1|^2, \cdots, |z_d|^2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d}^{\infty} c_\alpha |z|^{2\alpha},$$

が絶対収束し,

$$c_\alpha \geq 0 \text{ が任意の } \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d \text{ で成り立つ}. \tag{3.1}$$

と仮定する．この時, Ω 上の正則正定値カーネルを次のように定義できる：

$$k(z, w) := \Phi(\overline{z_1} w_1, \ldots, \overline{z_d} w_d). \tag{3.2}$$

注意 3.6. 実際, 条件 (3.1) は, (3.2) で定義される $k(z, w)$ の正定値性に対する必要十分条件である．すなわち, Ω 上の任意の正則関数に対して, $k(z, w) := \Phi(\overline{z_1} w_1, \ldots, \overline{z_d} w_d)$ が正定値カーネルとなるならば, 係数 $c_{n_1, \ldots, n_d}$ は非負である．実際, 十分に小さな正の数 $\varepsilon > 0$ を取り, $\mathbf{e}(\theta) := (\varepsilon \mathrm{e}^{i n_1 \theta}, \ldots, \varepsilon \mathrm{e}^{i n_d \theta})$ と置く．k が正定値ならば次が成り立つ：

$$c_{n_1, \ldots, n_d} = \frac{1}{4\pi^2 \varepsilon^{2 \sum_j n_j}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i \sum_j n_j (\theta - \phi)} k(\mathbf{e}(\theta), \mathbf{e}(\phi)) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \geq 0.$$

これは, 条件 (3.1) が成り立つことを意味する.

$\mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ の部分集合を

$$\mathscr{I}_\Phi := \{n \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0} : c_n \neq 0\}. \tag{3.3}$$

として, $\mathscr{I}_\Phi$ に対する次の仮定を考える：

仮定 3.7. 任意の真部分集合 $I \subsetneq \{1,\ldots,d\}$ と要素 $a \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ に対して, $x \in \mathscr{I}_\Phi$ であって, すべて $i \in I$ で $x_i = a_i$ となるものが無限個ある.

例えば, 超越的な整関数 ϕ に対する $\Phi(z) = \phi(z_1 + \cdots + z_d)$ は, この仮定を満たし, [26, 30] で扱われる正定値カーネルもこの形をしていることに注意する. また, 開球や多重円板上の Bergman カーネルもこの仮定を満たす. 次の命題により, 仮定 3.7 を満たすならば定理 1.1 の条件 2 が成立することが分かる：

命題 3.8. 上述の記号を用いる. 任意の $p \in \Omega$, 及び, $\alpha \in \mathbb{Z}^d_{\geq 0}$ に対して,

$$\iota'\left(\delta_p\left(\partial_z^\alpha\right)\right)(w) = w^\alpha\left(\partial_z^\alpha \Phi\right)(\overline{p_1}w_1,\ldots,\overline{p_d}w_d)$$

が成り立つ. ここで, Riesz の表現定理（反線形同型によって）$H_k' = H_k$ とみなしている. さらに, 集合 $\mathscr{I}_\Phi$ が仮定 3.7 を満たす場合, 任意の $p \neq 0$ に対して, $\iota'|_{\mathscr{D}(X)_p}$ は単射である（従って, 任意の $n \geq 0$ で κ_p^n は単射である）. 特に, Ω 上の任意の正則写像 f に対して, 定理 1.1 の条件 (2) が成り立つ.

Proof. 最初の式は命題 3.5 から導かれる. 次に, 第二の主張を証明する. $p \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ とする. 任意の $Q \in \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_d]$ に対して,

$$\iota'(\delta_p(Q(\partial_z)) = \sum_\alpha \overline{b_\alpha} w^\alpha (\partial_z^\alpha \Phi)(\overline{p_1}w_1,\ldots,\overline{p_d}w_d),$$

であるため, 仮定 3.7 を満たす任意の Φ と $Q(t) = \sum_\alpha b_\alpha t^\alpha \in \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_d]$ に対して,

$$\sum_\alpha b_\alpha w^\alpha (\partial_z^\alpha \Phi)(\overline{p_1}w_1,\ldots,\overline{p_d}w_d) = 0 \tag{3.4}$$

から $b_\alpha = 0$ が任意の α で成り立つことを示せば良い. d の帰納法によりこれを証明する. $d = 1$ の場合, 式 (3.4) は

$$c_m p_1^m \sum_\alpha b_\alpha m(m-1)\cdots(m-\alpha+1) = 0$$

がすべての $m \geq \alpha$ に対して成り立つことと同値である. 仮定 3.7 により, $p_1 \neq 0$, 及び, $c_m \neq 0$ となる p_1, c_m は無限個存在するため, $b_\alpha = 0$ が得られる. 次に, $d > 1$ の場合を考える. ここでは $p_1 \neq 0$ の場合のみを扱う. 他の場合も同様に証明される. $Q \neq 0$ と仮定する. すると, $Q_0(t_1,\ldots,t_{d-1},0) \neq 0$ であり, $Q = t_d^r Q_0$ となる $Q_0 \in \mathbb{C}[t_1,\ldots,t_d]$ が存在する. $Q_0 := \sum_\alpha b'_\alpha t^\alpha$ とおく. この時, 次の式が得られる.

$$\begin{aligned} w_d^r \sum_\alpha b'_\alpha w^\alpha (\partial_z^\alpha(\partial_{z_d}^r \Phi))(\overline{p_1}w_1,\ldots,\overline{p_d}w_d) &= \sum_\alpha b_\alpha w^\alpha (\partial_z^\alpha \Phi)(\overline{p_1}w_1,\ldots,\overline{p_d}w_d) \\ &= 0. \end{aligned}$$

従って, 次の式が得られる.

$$\sum_{\alpha} b'_\alpha w^\alpha (\partial_z^\alpha (\partial_{z_d}^r \Phi))(\overline{p_1} w_1, \ldots, \overline{p_d} w_d) = 0.$$

$\Psi(z_1, \ldots, z_{d-1}) := \partial_{z_d}^r \Phi(z_1, \ldots, z_{d-1}, 0)$ とおく. Ψ もまた仮定 3.7 を満たすことに注意する. 上記の式において w_d に 0 を代入すると, 次の式が得られる.

$$\sum_{\substack{\alpha \\ \alpha_d = 0}} b'_\alpha w^\alpha (\partial_z^\alpha \Psi)(\overline{p_1} w_1, \ldots, \overline{p_{d-1}} w_{d-1}) = 0.$$

この等式は, $\Phi = \Psi$, 及び, $Q = Q_0(t_1, \ldots, t_{d-1}, 0)$ の場合の (3.4) に対応する. 従って, 帰納法の仮定により, $\alpha_d \neq 0$ を持つ任意の $\alpha = 0$ に対して $b'_\alpha = 0$ となるが, これは $Q_0(t_1, \ldots, t_{d-1}, 0) \neq 0$ であることと矛盾する. □

3.3 測度のフーリエ変換から定義される正定値カーネル

ある $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d_{>0}$ に対して,

$$\int \prod_j \mathrm{e}^{a_j |\xi_j|} \mathrm{d}\mu(\xi) < \infty.$$

を満たす $\mathbb{R}^d$ 上のボレル測度 μ を考える. $\mathbb{I}_a := \{z = (z_j)_{j=1}^d \in \mathbb{C}^d : |\mathrm{Im}(z_i)| < a_i\}$ 上の正則な正定値カーネルを次のように定義する.

$$k(z, w) := \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i(z - \overline{w}) \cdot \xi} \mathrm{d}\mu(\xi).$$

ここで, $z, w \in \mathbb{C}^d$ に対して, $x \cdot y := z^\top w$ とする.

対応 $k_p \mapsto \mathrm{e}^{ip\cdot\xi}$ は同型（注意 3.2 参照）.

$$\rho : H_k \cong L^2(\mu); k_p \mapsto \mathrm{e}^{ip\cdot\xi}$$

を導くことに注意する. この時, 次の命題が成立する.

命題 3.9. *Riesz* の現定理（反線形同型を介して）を用いて H'_k を H_k とみなす. すると, 任意の $Q \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_d]$, 及び, $p \in \mathbb{I}_a$ に対して,

$$\rho \iota'(\delta_p(Q(\partial_z))) = \overline{Q}(i\tilde{\xi}) \mathrm{e}^{i\overline{p}\cdot\xi}. \tag{3.5}$$

ここで, $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_j)_j$ であり, 各 $\tilde{\xi}_j$ は $L^2(\mu)$ 内の ξ_j の同値類である. さらに, $\mathbb{C}[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ が $L^2(\mu)$ に単射に埋め込まれる時, すべての $p \in \mathbb{I}_a$ に対して $\iota'|_{\mathscr{D}(\mathbb{I}_a)_p}$ が単射となり, 任意の $n \geq 0$ に対して κ_p^n が単射である. 特に, 定理 *1.1* の条件 (2) が $\mathbb{I}_a$ 上の任意の正則写像 f に対して成り立つ.

Proof. まず, $h \in H_k$ に対して, $\rho(h)$ は

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(h)(\xi) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}\mu(\xi)$$

によって特徴づけられる $L^2(\mu)$ の元であることに注意する. $k(x,y)=\int e^{i(x-y)\cdot\xi}d\mu(\xi)$ であるから, 補題 3.5 により, 次が成り立つ：

$$\iota'(\delta_p(Q(\partial_x)))(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\overline{Q}(i\xi)e^{ip\cdot\xi}e^{-ix\cdot\xi}d\mu(\xi).$$

先の注意から (3.5) が成り立つことが分かる. 2 つ目の主張は明らかである. □

[7, 9, 17, 18, 25] においては, 上で紹介した RKHS における合成作用素が考察されている. また, [17, 25] で扱われている関数空間は, 上のタイプと本質的に等しい RKHS であり, μ を Dirac 測度の和で適切に定義して $z\mapsto iz$ と変数変換することで [17, 25] の取り扱うカーネルに変換することができる.

3.4 Fock 空間

ここでは, Hilbert 空間にならない準 Banach 空間の典型例として Fock 空間を紹介する. A を $\mathbb{C}^d$ 上の Lebesgure 測度とする. $\alpha>0$ のとき,

$$\Phi(z):=\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^d e^{\alpha z},$$

とし, (3.2) で定義された k を用いる. $0<q\le\infty$, 及び, $h\in\mathscr{A}(\mathbb{C}^d)$ に対して, 次のように定義する.

$$\|h\|_{q,\alpha}:=\begin{cases}\int_{\mathbb{C}^d}|h(z)|^q e^{-\alpha q|z|^2/2}dA(z)<\infty & \text{if } q<\infty,\\ \sup_{z\in\mathbb{C}^d}|h(z)|e^{-\alpha|z|^2/2} & \text{if } q=\infty.\end{cases}$$

そこで, $0<q\le\infty$ に対して,

$$F_\alpha^q:=\left\{h\in\mathscr{A}(\mathbb{C}^d):\|h\|_{q,\alpha}<\infty\right\}.$$

すると, 任意の $h\in F_\alpha^q$, 及び, $p\in\mathbb{C}^d$ に対して, 次の式が成り立つ（例えば, [24, Theorem 8] を参照）：

$$h(p)=\int_{\mathbb{C}^d}h(z)\overline{k_p(z)}e^{-\alpha|z|^2}dA(z).$$

特に, F_α^q は $\mathscr{A}(X)$ の連続的に含まれる部分空間であり, 任意の $Q\in\mathbb{C}[t_1,\dots,t_d]$ に対して,

$$Q(\partial_z)h(p)=\int_{\mathbb{C}^d}h(z)\overline{\overline{Q}(\alpha z)k_p(z)}e^{-\alpha|z|^2}dA(z) \tag{3.6}$$

が成り立つ. 特に, $\iota'(\delta_p(Q(\partial_z)))\in(F_\alpha^q)'$ は, (3.6) の右側の積分を介して関数 $\overline{Q}(\alpha z)k_p(z)$ によって表され, 従って, 次の命題が得られる：

命題 3.10. *$\alpha>0$, 及び, $0<q\le\infty$ とする. Fock 空間 F_α^q に対して, 線形写像 κ_p^n は, 任意の $p\in\mathbb{C}^d$, 及び, $n\ge0$ に対して単射である. 特に, $\mathbb{C}^d$ 上の任意の正則写像 f に対して, 定理 1.1 の条件 (2) が成り立つ.*

Proof. $\iota'|_{\mathscr{D}(X)_p}$ が単射であることを示せば十分である. $\iota'(\delta_p(Q(\partial_z)))=0$ は, $\overline{Q}(\alpha z)k_p(z)=0$ の場合に限られる. k_p は零点を持たないため, $\overline{Q}(\alpha z)k_p(z)=0$ は, $Q=0$ の場合に限られる. □

4　複素アフィン空間における重み付き有界合成作用素

本節では, $X=\mathbb{C}^d$ の場合に話を移し, 重み付き合成作用素の有界性に関する結果の証明を述べる. まず, 1 次元の場合の定理 1.2, 定理 1.3, そして, 定理 1.4 の証明を与える. 次に, 2 次元の場合の定理 1.5 の証明を与え, 最後に, 一般次元の場合についての予想を述べて本稿の結びとする.

4.1　1 次元の場合

この説では $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ を正則写像とする. $\mathscr{R}_r(f):=\{p\in\mathbb{C}: f^r(p)=p, |(f^r)'(p)|>1\}$ とする. さらに, $\mathscr{R}(f):=\cup_{r>0}\mathscr{R}_r(f)$ として, $J_f:=\overline{\mathscr{R}(f)}$ と定義する. J_f は f の Julia 集合と呼ばれる集合と一致することが知られており, さらに, f がアフィン写像でないならば J_f は孤立点を持たない非空閉集合であることが知られている（例えば, [4, Theorem 6.9.2], [29, Theorem 1.20] 参照）. この事実から, 次の命題が直ちに従う：

命題 4.1. $J_f=\emptyset$ であるための必要十分条件は $a,b\in\mathbb{C}$ が存在して, $f(z)=az+b$ かつ $|a|\leq 1$ である.

定理 1.1 と定理 2.6 を組み合わせることで直ちに次の補題を得る：

補題 4.2. V を無限次元とする. ある $u\in\mathscr{A}(\mathbb{C})$ と $r\geq 1$ に対して, uC_{f^r} が V 上の有界線形作用素であるならば

$$\mathscr{R}_r(f)\subset\{z\in\mathbb{C}: u(z)=0\}$$

が成り立つ.

補題 4.2 と命題 4.1 より, 定理 1.2, 及び, 定理 1.3 が証明できる：

定理 1.2 の証明. 補題 4.2 と命題 4.1 から直ちに従う. □

定理 1.3 の証明. $f(z)=az+b$ （$a,b\in\mathbb{C}$, $|a|\leq 1$）という形でないと仮定する. すると, $\mathscr{R}(f)$ は無限集合である. $u_r(z):=u(z)u(f(z))\cdots u(f^{r-1}(z))$ とおく. $(uC_f)^r=u_rC_{f^r}$ は V 上の有界線形作用素であるから, 補題 4.2 により, 任意の $r\geq 1$ に対して, $\mathscr{R}_r(f)$ の元は u_r の零点である. ここから, u は J_f に無限個のゼロ点を持つことが次の議論で分かる：実際, 任意の素数 q について, $p\in\mathscr{R}_q(f)\setminus\mathscr{R}_1(f)$ が存在して $u(p)=0$ を示せば良い. 任意の $p'\in\mathscr{R}_q(f)\setminus\mathscr{R}_1(f)$ について, $u_q(p')=0$ であり, 従って, ある $0\leq r<q-1$ が存在して $u(f^r(p'))=0$ となる. $f^r(p')\in\mathscr{R}_q(f)\setminus\mathscr{R}_1(f)$ であるから, $p=f^r(p')$ とすれば良い. 一方, f が多項式のならば J_f はコンパクトである（例えば, [13, (1)] を参照）. 故に, $u\equiv 0$ となり矛盾する. □

注意 4.3. ここでは, [22] の結果の別証明として, 補題 4.2 と命題 4.1, 及び, [32, Theorem1] を用いて, Fock 空間 $F^2_{1/2}$ 上で uC_f が有界性から f のアフィン性を証明する方法を紹介する. V を Fock 空間 $F^2_{1/2}$ とする. [32] において, uC_f が V 上で有界であるためには次の不等式を満たすことが必要かつ十分であることが示されている：

$$B_f(u):=\sup_{w\in\mathbb{C}}\int_{\mathbb{C}}|u(z)|^2|\mathrm{e}^{\overline{f(z)}w/2}|^2\mathrm{e}^{-|w|^2/2}\mathrm{e}^{-|z|^2/2}\mathrm{d}A(z)<\infty,$$

ここで dA は $\mathbb{C}$ 上の Lebesgue 測度である．f が $f(z)=az+b$（ただし $|a|\leq 1$）という形でないと仮定する．命題 4.1 より，ある $r\geq 1$ で $p\in\mathscr{R}_r(f)$ が存在する．この時，$j=0,\ldots,r-1$ に対して $v(f^j(p))\neq 0$ を満たす整関数 v が存在し，

$$u(z)=(z-p)^{m_1}(z-f(p))^{m_2}\cdots\left(z-f^{r-1}(p)\right)^{m_r}v(z)$$

が成り立つ．ただし，$m_1,\ldots,m_r$ は非負の整数である．$v_r(z):=v(z)v(f(z))\cdots v(f^{r-1}(z))$ とおく．すると，$B_f(v)<\infty$ が容易に分かり，vC_f が有界であることが分かる．従って，$(vC_f)^r=v_rC_{f^r}$ が有界である．$v_r(p)\neq 0$ となるが，これは，補題 4.2 に矛盾する．故に，$f(z)=az+b$（ただし $|a|\leq 1$）である．

最後に定理 1.4 を証明する．

定理 1.4 の証明. V が無限次元の場合には，定理 1.2 によって主張が成立するので，V が有限次元の場合を証明する．f がアフィン写像でないと仮定する．まず，V 内の定数でない整関数 h と $\lambda\in\mathbb{C}$ が存在し，$C_f[h]=\lambda h$ となると仮定する．ある $n\geq 1$ に対して $f^n(p)=p$, $h(p)\neq 0$ となる $p\in\mathbb{C}$ が存在する．そこで，$h(p)=h(f^n(p))=\lambda^n h(p)$ となり，$\lambda^n=1$ となる．f^n もアフィン写像でないから，[4, Theorem 4.2.7]，及び，[29, Theorem 1.7] より，ある $z\in\mathbb{C}$ が存在して，J_f は $\cup_{m\geq 0}f^{-mn}(\{z\})$ の閉包に含まれる．従って，$h(J_{f^n})\subset\{h(z)\}$ であり，h は定数関数となるので矛盾する．次に，定数関数以外の C_f の固有関数が存在しないと仮定する．すると，C_f の固有値は 1 のみであり，$(C_f-I)^2$ の核の元となる非定数関数 $g\in V$ であって，$(C_f-I)g$ が 1 となるものが存在する．$h:=(C_f-I)g$ とすると，$C_f[h]=h+1$ となる．f の周期点を $p\in\mathbb{C}$ とする．周期を $r>0$，すなわち，$f^r(p)=p$ とすると，$h(p)=C_f^r[h](p)=h(p)+r$ が得られるため，$r=0$ となり，再び矛盾が生じる． □

4.2 高次元の場合

まず，定理 1.5 を証明する：

定理 1.5 の証明. $\mathbb{C}^2$ 上のアフィン写像でない多項式同型 f を考える．[15] によれば，reduced word $(g_1,\ldots,g_n)$（[15, Definition, p.69] を参照）によって，$f=g_n\circ\cdots\circ g_1$ と書くことができる．ここで，各 g_i は上三角でない正則行列，または，初等変換（以下で説明する）のいずれかである．初等変換は多項式の自己同型であり，次の形をしているものである：

$$e_{Q,a,b,c}(x,y):=(ax+Q(y),by+c),$$

ここで，$a,b,c\in\mathbb{C}$ で $ab\neq 0$ であり，Q は次数が 1 より大きい多項式である．

もし n が偶数ならば，f は cyclically reduced な元と共役である [15, p.70]．従って，[15, Theorem 2.6] により，f は一般化 Hénon 写像の有限個の合成 $h_{Q_1,b_1}\circ\cdots\circ h_{Q_r,b_r}$ となる．ここで，$h_{Q,b}$ は次のように定義される：

$$h_{Q,b}(x,y)=(Q(x)-by,x).$$

ただし，$b\in\mathbb{C}$ で $ab\neq 0$ であり，Q は次数が 1 より大きい多項式である．[5, Theorem 3.4] により，周期 r の周期点 $p\in\mathbb{C}^2$ が無限に存在し，df_p^r の固有値の絶対値が 1 より大きくなる．従って，定理 1.1 より，f は零点を持たない u に対して，uC_f は V 有界線形作用素となり得ない．

次に, n が奇数であると仮定する．この時は, g_n が正則行列または初等変換である 2 つのケースを考える．最初に g_n が正則行列であると仮定する．もし g_1g_n が上三角行列でなければ, $g_n^{-1}fg_n$ は cyclically reduced な元に共役であり, 上記の議論と同様に, uC_f は有界になり得ない. 一方, g_1g_n が上三角行列であるとすると, g_n が次の形であると仮定できる：

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

任意の $A = (a_{ij})$ に対して,

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & -a_{21}\alpha^2 - \alpha(a_{11} - a_{22}) + s_{12} \\ * & * \end{pmatrix}$$

であるから, 後で証明する補題 4.4 により, $g_n^{-1}Ag_n$ が上三角行列でないような $A \in \mathscr{G}_2(V)$ が存在する．従って, ある零点を持たない $v \in \mathscr{A}(\mathbb{C}^2)$ と $b \in \mathbb{C}^2$ が存在して, vC_h が有界となる（ただし, $h(z) := Az + b$）. ここで, [15, Theorem 2.6] を用いると,

$$g_n^{-1} \circ h \circ f \circ g_n = (g_n^{-1} \circ h \circ g_n) \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ (g_2 \circ g_1 g_n)$$

が一般化 Hénon 写像の有限個の合成に共役であることが分かる. また, $(vC_h)(uC_f) = (vh^*(u))C_{h\circ f}$ であることにも注意する. 以上より, 定理 1.1 を用いると, $(vh^*(u))C_{h\circ f}$ は有界線形作用素になり得ないので, uC_f もまた有界線形作用素でないことが分かる. 次に, g_n が初等変換であると仮定する. 後で示す補題 4.4 により, $A = (a_{ij})$ で $a_{21} \neq 0$ となるような $A \in \mathscr{G}_2(V)$ が存在する．よって, ある零点を持たない $v \in \mathscr{A}(\mathbb{C}^2)$ と $b \in \mathbb{C}^2$ が存在して, vC_h が有界となる（ただし, $h(z) := Az + b$）. すると, $h \circ f$ は [15, 定理 2.6] により, 一般化 Hénon 写像の有限個の合成と共役となる. 従って, uC_f は上記と同様に有界線形作用素になり得ないことが分かる. □

次の補題は, 上の定理 1.5 の証明で用いる.

補題 4.4. $\mathscr{G} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ を部分半群とする. $S = (s_{ij}) \in \mathscr{G}$ に対して,

$$\mathfrak{A}_S := \left\{ \alpha \in \mathbb{C} : s_{21}\alpha^2 + (s_{11} - s_{22})\alpha - s_{12} = 0 \right\}$$

とする． この時, $\langle \mathscr{G} \rangle_{\mathbb{C}} = \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ が成立するための必要十分条件は, $\cap_{S\in\mathscr{G}} \mathfrak{A}_S = \emptyset$ であり, かつ, $B = (b_{ij}) \in \mathscr{G}$ で $b_{21} \neq 0$ となるものが存在することである.

Proof. $S = (s_{ij})$ について, α が方程式 $s_{21}\alpha^2 + (s_{11} - s_{22})\alpha - s_{12} = 0$ を満たすのは, $\lambda \neq 0$ であるような λ が存在して, $(1, \alpha)(S - \lambda) = 0$ が成立する場合に限る. 実際, α が先の方程式を満たすことは,

$$\begin{aligned} s_{21}\alpha^2 + (s_{11} - s_{22})\alpha - s_{12} &= \det \begin{pmatrix} s_{11} + s_{21}\alpha & s_{12} + s_{22}\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

と同値であるから, これは, ある $\lambda \neq 0$ が存在して

$$\lambda(1, \alpha) = (1, \alpha) \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}.$$

と同値である. 以下では, $\mathbb{C}^2$ の任意の要素を横ベクトルとみなす. まず, 必要性を証明する. $\cap_{S\in\mathscr{G}}\mathfrak{A}_S \neq \emptyset$ と仮定する. $\alpha \in \cap_{S\in\mathscr{G}}\mathfrak{A}_S$ を一つ固定する. すると, 任意の $B \in \langle\mathscr{G}\rangle_{\mathbb{C}}$ に対して,

$$(1,\alpha)B = \lambda_B(1,\alpha)$$

が成り立つ. ここから, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は $\langle\mathscr{G}\rangle_{\mathbb{C}}$ に含まれない, すなわち, $\langle\mathscr{G}\rangle_{\mathbb{C}} \neq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ が分かる. $B = (b_{ij}) \in \mathscr{G}$ で $b_{21} \neq 0$ となるものが存在しないならば, $\langle\mathscr{G}\rangle_{\mathbb{C}}$ の任意の元は上三角行列となるので, 同様に $\langle\mathscr{G}\rangle_{\mathbb{C}} \neq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ が分かる. 次に十分性を証明する. $\cap_{S\in\mathscr{G}}\mathfrak{A}_S = \emptyset$ と仮定し, さらに, $B = (b_{ij}) \in \mathscr{G}$ で $b_{21} \neq 0$ となるものを 1 つとって固定する. $\mathfrak{A}_B \neq \emptyset$ は線形代数の一般論からすぐに分かるので, $\alpha \in \mathfrak{A}_B$ を取り, $v := (1,\alpha)$ とし, さらに, $vB = \lambda v$ となるような $\lambda \in \mathbb{C}$ を取る. $\alpha \in \cap_{A\in\mathbb{C}+\mathbb{C}B}\mathfrak{A}_A$ であるから, $\cap_{S\in\mathscr{G}}\mathfrak{A}_S = \emptyset$ より, $C \in \mathscr{G}$ で $C \notin \mathbb{C}+\mathbb{C}B$ となるものが存在する. $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ は 2 次元であるから $D \in \mathscr{G}$ であって, $D \notin \mathbb{C}+\mathbb{C}B+\mathbb{C}C$ となる D が存在することを示せば十分である. 仮に, $BC \notin \mathbb{C}+\mathbb{C}B+\mathbb{C}C$ であれば, BC を D とすれば良い. そこで, $BC = a+bB+cC$ となるような $a,b,c \in \mathbb{C}$ の存在を仮定する. この時,

$$vBC = \lambda vC = av + b\lambda v + cvC$$

が成り立ち, 従って,

$$(\lambda - c)vC = (a+b\lambda)v$$

となる. $\lambda \neq c$ ならば, $vC = (\lambda-c)^{-1}(a+b\lambda)v$ より, $\alpha \in \mathfrak{A}_C$ となり, $\alpha \in \mathfrak{A}_B \cap \mathfrak{A}_C$ となる. $\lambda = c$ の場合, $a = -b\lambda$ となることが分かり, 次の式が得られる：

$$(\lambda - B)(b - C) = 0.$$

$w = b_{21}^{-1}(0,1)(\lambda - B) = (1,\beta)$ とする. すると, $w(b-C) = 0$, すなわち, $\beta \in \mathfrak{A}_C$ であり, $w(\lambda - B) \in \mathbb{C}w$ または $C = b$ が成り立つ. 以上から, β, または, α は $\mathfrak{A}_B \cap \mathfrak{A}_C$ に含まれることが分かる. 従って, $\mathfrak{A}_B \cap \mathfrak{A}_C \neq \emptyset$ が導かれる. 故に, 任意の $C' \in \mathbb{C}+\mathbb{C}B+\mathbb{C}C$ に対して, $\mathfrak{A}_B \cap \mathfrak{A}_C \cap \mathfrak{A}_{C'} \neq \emptyset$ であるが, 仮定 $\cap_{S\in\mathscr{G}}\mathfrak{A}_S = \emptyset$ より, $D \in \mathscr{G}$ で $D \notin \mathbb{C}+\mathbb{C}B+\mathbb{C}C$ となるものが存在することが分かる. □

定理 1.5 の高次元版が, 多項式自己同型だけでなく, 任意の複素力学系の場合にも成り立つかどうかは興味深い問題である. 一般には未解決であるが, 次の予想が成り立つと期待している：

予想 4.5. $V \subset \mathscr{A}(\mathbb{C}^d)$ を準 *Banach* 空間とし, 包含写像が連続であるとする. 次の条件を仮定する：

(1) 任意の有限個を除く $p \in \mathbb{C}^d$ と無限個の $n \geq 0$ に対して, κ_p^n が単射である.
(2) $\mathrm{M}_d(\mathbb{C}) = \langle\mathscr{G}_d(V)\rangle_{\mathbb{C}}$.

この時, 任意の複素力学系 $f\colon \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ に対して, 零点を持たない $u \in \mathscr{A}(\mathbb{C}^d)$ が存在して uC_f が有界であれば, ある $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$, 及び, $b \in \mathbb{C}^d$ が存在して, $f(z) = Az + b$ となる.

予想 4.5 の解決には, 複素力学系の理論が非常に有効なアプローチと考えられ, この予想に関連する複素力学系の問題として「$\mathbb{C}^d$ 上のアフィン写像でない複素力学系に適当な正則行列を合成すると, 無限個の repelling または saddle 周期点を持つか」というものが考えられる. この問題はまだ未解決で

あると思われるが, 複素力学系がいつ repelling または saddle 周期点を持つかというのは重要な問題でもある（[14, Question 2.16] 参照）.

予想 4.5 は特別な準 Banach 空間で実際に証明されていることにも注意する. V が Fock 空間の場合, [33, 34] において, 重み付き合成作用素が可逆またはユニタリであるという仮定の下で証明されている. また, 合成作用素, すなわち, $u \equiv 1$ の場合はさらに多くの結果が知られている. 例えば, [6, 8] では, Fock 空間と Fock-Sobolev 空間について予想を証明しており, [26, 30] では, RKHS であってカーネルが整関数 Φ を用いて $k(z,w) = \Phi({}^t\bar{z}w)$ となる形のものについてこの予想を証明している（この RKHS は 3.2 章で取り扱ったカーネルの特別な形である）. 本稿執筆者も共著に加わっている [18] では, 3.3 章で紹介した RKHS について考察し, ある技術的な仮定を満たす場合に, 複素力学系の理論を用いずに予想を証明している. そこでは, 条件 $\langle \mathscr{G}_d(V) \rangle_{\mathbb{C}} = \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ も現れるが, 別の文脈でこの条件を導入していることに注意する. 予想 4.5 が正しければ, その論文の主結果 [18, Theorem 1] を大幅に拡張することができ, 特に, [18] で Assumption (B) と呼ばれる技術的仮定を外すことができる.

謝辞

本研究は JST CREST Grant, Number JPMJCR1913, 及び, JST ACTX Grant, Number JPMJAX2004 の助成を受けている.

参考文献

[1] A. V. Abanin and T. I. Abanina. Composition operators on Hilbert spaces of entire function. *Russ Math.*, 61:1–4, 2017.

[2] Shahrnaz Azizi. Reproducing kernel structure and sampling on time-warped spaces with application to warped wavelets. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 48(3):789 – 790, 2001.

[3] Shahrnaz Azizi, Douglas Cochran, and John N. McDonald. On the preservation of bandlimitedness under non-affine time warping. In *Proceedings of the International Workshop on Sampling Theory and Applications*, Lon Norway, August 1999.

[4] Alan F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*, volume 132. Springer-Verlag New York, 1991.

[5] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$. *Mathematische Annalen*, 294(1):395–420, 1992.

[6] Brent J. Carswell, Barbara D. MacCluer, and Alex Schuster. Composition operators on the Fock space. *Acta Sci. Math.*, 69:871–887, 2003.

[7] Gerardo A. Chacón, Gerardo R. Chacón, and José Giménez. Composition operators on spaces of entire functions,. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135:2205–2218, 2007.

[8] Hong Rae Cho, Boo Rim Choe, and Hyungwoon Koo. Linear combinations of composition operators on the Fock-Sobolev spaces. *Potential Analysis*, 41(4):1223–1246, 2014.

[9] James J. Clark and Douglas Cochran. Time-warped bandlimited signals: Sampling, bandlimitedness, and uniqueness of representation. In *Proceedings, IEEE International Symposium on Information Theory*, pages 331–331, San Antonio, TX, USA, 1993.

[10] G. M. Constantine and T. H. Savits. A multivariate faa di bruno formula with applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(2):503–520, 1996.

[11] Carl C. Cowen and Barbara D. Maccluer. *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*. CRC Press, Boca Raton, 1995.

[12] Peter Duren and Alexander Schuster. *Bergman spaces*, volume 100. Mathematical Surveys and Monographs, 2004.

[13] A. E. Eremenko. On the iteration of entire functions. *Banach Center Publications*, 23(1):339–345, 1989.

[14] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Some open problems in higher dimensional complex analysis and complex dynamics. *Publicacions Matemàtiques*, 45(2):529–547, 2001.

[15] Shmuel Friedland and John Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 9(1):67–99, 1989.

[16] Yuka Hashimoto, Isao Ishikawa, Masahiro Ikeda, and Yoshinobu Kawahara. Krylov subspace method for nonlinear dynamical systems with random noises. *J. Mach. Learn. Res.*, 21:1–29, 2020.

[17] Xiaolu Hou, Bingyang Hu, and Le Hai Khoi. Hilbert spaces of entire Dirichlet series and composition operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 401(1):416–429, 2013.

[18] Masahiro Ikeda, Isao Ishikawa, and Yoshihiro Sawano. Boundedness of composition operators on reproducing kernel Hilbert spaces with analytic positive definite functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 511(1):126048, 2022.

[19] Isao Ishikawa, Keisuke Fujii, Masahiro Ikeda, Yuka Hashimoto, and Yoshinobu Kawahara. Metric on nonlinear dynamical systems with perron–frobenius operators. *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, 31:911–919, 2018.

[20] N. J. Kalton, N. T. Peck, and James W. Roberts. *An F-space Sampler*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1984.

[21] Yoshinobu Kawahara. Dynamic mode decomposition with reproducing kernels for Koopman spectral analysis. *Adv. Neural Inf. Process. Syst.*, 29, 2016.

[22] Trieu Le. Normal and isometric weighted composition operators on the fock space. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 46:847–856, 07 2014.

[23] V. V. Lebedev. On L^2-functions with bounded spectrum. *Sb. Math.*, 203(11):1647–1653, 2012.

[24] Youqi Liu and Xiaofeng Wang. Duality of large fock spaces in several complex variables and compact localization operators. *Journal of Function Spaces*, 2021, 2021.

[25] Doan Luan and Le Hai Khoi. Complete characterization of bounded composition operators on the general weighted Hilbert spaces of entire Dirichlet series. *North-W. Eur. J. of Math.*, 6:91–106, 2020.

[26] Doan Luan, Le Hai Khoi, and Trieu Le. Composition operators on Hilbert spaces of entire functions of several variables. *Integral Equations and Operator Theory*, 88(3):301–330, 2017.

[27] S. Saitoh and Y. Sawano. Theory of reproducing kernel Hilbert spaces. *Development of Mathematics*, 44, 2016.

[28] Amit Samanta and Santanu Sarkar. Boundedness of composition operator on several variable paley-wiener space. *Linear Algebra and its Applications*, 660:66–79, 2023.

[29] Dierk Schleicher. Dynamics of entire functions. In G. Gentili, J. Guenot J, and G. Patrizio, editors, *Holomorphic Dynamical Systems*, volume 1998, pages 295–339. Springer, Berlin, Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2010.

[30] Jan Stochel and Jerzy Bartlomiej Stochel. Composition operators on Hilbert spaces of entire functions with analytic symbols. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 454(2):1019–1066, 2017.

[31] François Tréves. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*. Dover Publications, 2006.

[32] Sei-ichiro Ueki. Weighted composition operator on the fock space. *Proceedings of The American Mathematical Society*, 135:1405–1411, 05 2007.

[33] Liankuo Zhao. Unitary weighted composition operators on the fock space of $\mathbb{C}^n$. *Complex Analysis and Operator Theory*, 8:581–590, 02 2014.

[34] Liankuo Zhao. Invertible weighted composition operators on the fock space of $\mathbb{C}^n$. *Journal of Function Spaces*, 2015:250358, Jun 2015.

[35] Kahe Zhu. *Operator theory in Function spaces: second edition*, volume 138. Mathematical Surveys and Monographs, 2007.

A 準 Banach 空間

ここでは, 準 Banach 空間の定義とその基本的な性質をまとめる. ここでは, 常に $\mathbb{C}$ 上の線形空間を考える. 準 Banach 空間理論のさらなる詳細については, [20] を参照されたい.

定義 A.1. V を Hausdorff 位相線形空間とする. V が 0 の有界近傍を持つ場合, V は**局所有界空間**であると言う. ここで, 部分集合 $S \subset V$ は, 任意の 0 の近傍 U に対して, $S \subset aV$ となるような $a > 0$ が存在する時, S は**有界**であると言う.

注意 A.2. [20, Corollary, p.5] より, 局所有界空間は距離化可能であることが知られている.

ここで,

定義 A.3. V を線形空間とする. V の**準ノルム**とは, $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で, 以下の 3 つの条件を満たす写像である：(1) $\|av\|_V = |a| \cdot \|v\|_V$, (2) $K \geq 1$ が存在して $\|v+w\|_V \leq K(\|v\|_V + \|w\|_V)$, 及び, (3) $\|v\|_V = 0$ のとき $v = 0$, ただし $a \in \mathbb{C}$, 及び, $v, w \in V$ である.

準ノルムを用いると, $\{\{v \in V : \|v\| < R\} : R > 0\}$ を 0 の開近傍系として, V に位相線形空間の構造が定められる. 位相線形空間 V の位相が, ある準ノルム $\|\cdot\|_V$ によるものと一致する時, V は**準ノルム空間**であると言う. 準ノルム空間は明らかに Hausdorff 局所有界空間であるが, 逆も成立する. すなわち, 次の命題が成り立つ：

命題 A.4. *Hausdorff* 位相線形空間 V が局所有界空間であることと V が準ノルム空間であることは必

要かつ十分である.

Proof. 必要性を示す. すべての $|a| \le 1$ に対して, $aB \subset B$ を満たす 0 の有界近傍 $B \subset V$ を取る. すると, $\|v\| := \inf\{\lambda > 0 : \lambda^{-1}v \in B\}$ は V 上の準ノルムとなる. 実際, B の定義により, 第一, 及び, 第三の条件は明らかである. 第二の条件は, $B + B \subset KB$ を満たす正の数 $K > 0$ を考えれば良い. □

次の命題はほぼ自明であるが注意しておく：

命題 A.5. V を準ノルム空間とし, $\|\cdot\|_V$ を V の準ノルムとする. 別の準ノルム $\|\cdot\|$ が V の同じ位相を定めるための必要十分条件は, $c_1, c_2 > 0$ が存在して, 任意の $v \in V$ に対して $c_1\|v\| \le \|v\|_V \le c_2\|v\|$ である.

準 Banach 空間の定義は次の通りである：

定義 A.6. 完備な準ノルム空間を**準 *Banach* 空間**であるという.

注意 A.7. 命題 A.4 より, 準 Banach 空間は, 準ノルムを用いなくてもより内在的的な位相の言葉を用いて, 完備局所有界空間とも定義できる.

この節の残りの部分では, 常に V を準 Banach 空間と仮定し, 準ノルムを $\|\cdot\|_V$ と書く. 準 Banach 空間は, 通常の Banach 空間と類似した性質を多く持っており, 以下ではそれらについて概説する. なお, 一般に Hahn-Banach の定理は成立しないことが知られている.

命題 A.8. 準 *Banach* 空間 V と閉部分空間 $W \subset V$ を考える. この時, W, 及び, V/W もまた準 *Banach* 空間である.

Proof. 注意 A.7 より, 完備かつ局所有界であることを示せば良い. W, 及び, V/W の局所有界性は明らかである. W が閉であるため, W の完備性はただちに導かれる. [31, Exercise 8.6] によれば, V が距離化可能であるため, V/W も完備である. □

注意 A.9. 閉部分空間 $W \subset V$ を考える. この時, 準ノルム $\|\cdot\|_V$ を用いて, 準ノルム $\|\cdot\|_W$, 及び, $\|\cdot\|_{V/W}$ を次のように定義することができる:

$$\|w\|_W := \|w\|_V,$$
$$\|\overline{v}\|_{V/W} := \inf_{w \in W} \|v + w\|_V,$$

ここで, $w \in W$ であり, $\overline{v}$ は V/W における $v \in V$ の同値類である.

位相線形空間において, 線形写像が**有界**であるとは, 任意の有界集合の像が有界集合である場合を言う. 準 Banach 空間の線形写像が連続であるための必要十分条件は有界であることである, すなわち, 次の命題が成立する.

命題 A.10. V, 及び, W を準 *Banach* 空間とし, それぞれの準ノルムを $\|\cdot\|_V$, 及び, $\|\cdot\|_W$ とする. また, $T : V \to W$ を線形写像とする. この時, 次の *3* つの条件は同値である：

(1) T は連続である,
(2) T は有界である,

(3) ある $C > 0$ が存在して, $\|Tv\|_W \leq C\|v\|_V$ が成り立つ.

これは, Banach 空間の時の場合と同様に証明できる. 次に, 準 Banach 空間の連続線形写像に対する準ノルムを定義する：

定義 A.11. V, 及び, W を準 Banach 空間とし, それぞれの準ノルムを $\|\cdot\|_V$, 及び, $\|\cdot\|_W$ とする. また, $T\colon V \to W$ を連続線形写像とする. この時,

$$\|T\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}.$$

と定義する.

$\|\cdot\|$ は, V から W への連続線形写像の空間に準ノルム構造を与える. この準ノルムは V, 及び, W の準ノルムの選択に依存するが, 連続線型写像の空間に定まる位相には影響しないことに注意する. $W = \mathbb{C}$ の場合, 次の命題が成り立つ.

命題 A.12. V を準 *Banach* 空間とする. この時, V' もまた準 *Banach* 空間である.

作用素のノルムの定義から直ちに次の命題が得られる：

命題 A.13. V_1, V_2, V_3 を準 *Banach* 空間とし, それらの準ノルムを固定する. $S: V_1 \to V_2$, $T: V_2 \to V_3$ を連続線形写像とする. この時,

$$\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

が成り立つ.

商空間に誘導される線形作用素の準ノルムと元のものとの関係は次の命題で与えられる：

命題 A.14. V_1, V_2 を準 *Banach* 空間とし, $W_1 \subset V_1$, $W_2 \subset V_2$ を閉部分空間とする. V_1, V_2 の準ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_{V_1}$, $\|\cdot\|_{V_2}$ とする. $T: V_1 \to V_2$ を $T(W_1) \subset W_2$ を満たす連続線形写像とする. この時,

$$\|\overline{T}\| \leq \|T\|,$$

が成り立つ. ここで, $\overline{T}\colon V_1/V_2 \to V_2/W_2$ は T によって誘導される自然な連続線形写像であり, 商空間に準ノルムは注意 *A.9* の通りである.

Proof. $\overline{v} \in V_1/W_1$ を V_1 の元 v の同値類とする. この時, 次が得られる：

$$\begin{aligned}
\|\overline{T}\overline{v}\|_{V_2/W_2} &= \inf_{w_2 \in W_2} \|Tv + w_2\|_{V_2} \\
&\leq \inf_{w_1 \in W_1} \|Tv + Tw_1\|_{V_2} \\
&\leq \|T\| \inf_{w_1 \in W_1} \|v + w_1\|_{V_1} = \|T\|\|\overline{v}\|_{V_1/W_1}.
\end{aligned}$$

従って, $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$ が成り立つ. □

最後に, 定義域が全体である合成作用素が連続となることを紹介しておく.

命題 A.15. 集合 X と, 準 *Banach* 空間 $V \subset \mathbb{C}^X$ を考える. 任意の $x \in X$ に対して, $V \ni h \mapsto h(x) \in \mathbb{C}$ が連続線形写像であると仮定する. 写像 $f : X \to X$ について, 任意の $h \in V$ に対して, $h \circ f \in V$ が成り立つならば, C_f は V 上の有界線形作用素である.

Proof. [20, Corollary 1.7] によれば, $\Gamma = \{(h, h \circ f) : h \in V\}$ のグラフが $V \times V$ の閉部分空間であることを示せば十分である. $g \in V$ を取り, $n \to \infty$ で $h_n \to 0$, かつ, $h_n \circ f \to g$ となるような V 内の数列 $\{h_n\}_{n \leq 0}$ を取る. ある $C_1, C_2 > 0$ が存在して

$$
\begin{aligned}
|g(x)| &\leq |h_n \circ f(x) - g(x)| + |h_n(f(x))| \\
&\leq C_1 \|h_n \circ f - g\| + C_2 \|h_n\|
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 最後の項が $n \to 0$ で 0 に収束するため, 任意の $x \in X$ に対して $g(x) = 0$ であり, すなわち, $g = 0$ である. 従って, グラフ Γ は閉集合である. □