Chevalley formula in the equivariant quantum K-theory of partial flag manifolds

早稲田大学・基幹理工学部数学科 河野 隆史 *
Takafumi Kouno
Department of Mathematics, Faculty of Science and Engineering,
Waseda University

概要

Chevalley 公式は，一般旗多様体のトーラス同変量子 K 環の代数構造を決定する等式である．旗多様体のトーラス同変量子 K 環における Chevalley 公式は，Lenart，内藤，佐垣によって組合せ論的に記述された．これを利用すると，一般旗多様体に対する Chevalley 公式の記述が得られる．しかし，この記述には cancellation が発生する．本研究では，A，C 型の極大放物型部分群に対応する一般旗多様体，また A 型 2 ステップ旗多様体に対して，これらの cancellation を決定した．本稿では，そのうち A 型 2 ステップ旗多様体の場合の結果を紹介する．本研究は，Cristian Lenart，内藤聡，佐垣大輔との共同研究である．また，本稿では論文 [KLNS] の内容を扱う．

1 Introduction

G を連結かつ単連結な複素単純代数群とし，$H \subset G$ をその極大トーラス，$(H \subset)B \subset G$ を Borel 部分群とする．また，I を G の Dynkin 図形の頂点集合とし，$(B \subset)P_J \subset G$ を集合 $J \subset I$ に対応する G の放物型部分群とする．このとき，商 G/B は旗多様体 (flag manifold)，商 G/P_J は一般旗多様体 (partial flag manifold) と呼ばれる．Schubert calculus では，これらの多様体 G/B, G/P_J を組合せ論の立場から研究する．例えば，コホモロジー環 $H^*(G/P_J)$ や K 環 $K(G/P_J)$ などの積の構造を組合せ論的に記述することは，Schubert calculus の一つの目標である．

Schubert calculus において最近扱われている代数として，一般旗多様体 G/P_J のトーラス同変量子 K 環 $QK_H(G/P_J)$ が挙げられる．量子 K 環は，Givental ([G]) および Lee ([Lee]) によって 2000 年代前半に導入された．これは，トーラス H の表現環を $R(H)$ と書き，$K_H(G/P_J)$ を G/P_J の H-同変 K 環とするとき，$R(H)$-加群として

$$QK_H(G/P_J) := K_H(G/P_J) \otimes_{R(H)} R(H)[Q_k \mid k \in I \setminus J]$$

と定義される．$QK_H(G/P_J)$ には，“K 理論版の Gromov-Witten 不変量” を用いて積が定義され

---

* 日本学術振興会特別研究員 PD

る．Schubert calculus では，この代数構造を組合せ論的に記述することを目標とする．

いま, W を G の Weyl 群, $W_J = W_{P_J}$ を W の P_J に対応する放物型部分群とし, $W^J = W^{P_J} \simeq W/W_J$ を商 W/W_J の minimal coset representative の集合とする．このとき，各 $v \in W^J$ に対して Schubert 類 $[\mathcal{O}^v] \in QK_H(G/P_J)$ が定義される．Schubert 類全体の集合 $\{[\mathcal{O}^v] \mid v \in W^J\}$ は, $QK_H(G/P_J)$ の $R(H)[Q_k \mid k \in I \setminus J]$-加群としての自由基底である．(以下 $R(H)[Q_k \mid k \in I \setminus J]$ を $R(H)[Q]$ と略記する．) そのため，各 $v, w, u \in W^J$ に対して

$$[\mathcal{O}^v] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{u \in W^J} c^u_{v,w} [\mathcal{O}^u] \tag{1.1}$$

で定まる構造定数 $c^u_{v,w} \in R(H)[Q]$ を組合せ論的に記述することで，$QK_H(G/P_J)$ の代数構造を組合せ論的に理解できる．しかし，一般の $v, w, u \in W^J$ に対しては構造定数の組合せ論的な記述が発見されていない.

一方，特に v が W^J の単純鏡映 s の場合の (具体的な) 展開式

$$[\mathcal{O}^s] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{u \in W^J} c^u_{s,w} [\mathcal{O}^u] \tag{1.2}$$

は Chevalley 公式と呼ばれる．Chevalley 公式は，展開式 (1.1) の特別な場合である．しかし，Buch, Chaput, Mihalcea, Perrin は次の定理を証明した.

定理 1.1 ([BCMP, Corollary 5.14])**.** R を，以下の条件を満たす $R(H)[Q]$-代数とする．

- 自由 $R(H)[Q]$-加群としての自由基底 $\{\sigma_v \mid v \in W^J\} \subset R$ が存在する．
- 自由基底 $\{\sigma_v \mid v \in W^J\}$ は Chevalley 公式を満たす．すなわち，$\sigma_1 \cdot \sigma_1 = \sigma_1$ および任意の単純鏡映 $s \in W^J$ および任意の $w \in W^J$ に対し

  $$\sigma_s \cdot \sigma_w = \sigma_w \cdot \sigma_s = \sum_{u \in W^J} c^u_{s,w} \sigma_u$$

  が成り立つ．ただし，$c^u_{s,w} \in R(H)[Q]$ は式 (1.2) と同一である．

このとき，$\sigma_v \mapsto [\mathcal{O}^v]$ $(v \in W^J)$ によって定まる $R(H)[Q]$-加群の準同型写像 $R \to QK_H(G/P_J)$ は環同型である.

よって，$QK_H(G/P_J)$ の代数構造は，Chevalley 公式によって決定される．そこで，Chevalley 公式の組合せ論的記述を考える．以下，ϖ_k $(k \in I)$ を G の基本ウェイトとし，$-\varpi_k$ $(k \in J)$ に対応する G/P_J 上の直線束を $\mathcal{O}(-\varpi_k)$ と書く．まずは $J = \emptyset$，すなわち $P_J = B$ である場合を考える．このとき，$G/P_J = G/B$ は旗多様体である．Lenart，内藤，佐垣は，$QK_H(G/B)$ における次の記述を証明した.

定理 1.2 ([LNS, Theorem 49])**.** $k \in I$，$w \in W$ とし，reduced $(-\varpi_k)$-chain Γ をひとつ固定する．$QK_H(G/B)$ において

$$[\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{A \in \mathcal{A}(w,\Gamma)} (-1)^{|A|} Q^{\mathrm{down}(A)} e^{-\mathrm{wt}(A)} [\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}] \tag{1.3}$$

が成り立つ．

定理 1.2 における reduced $(-\varpi_k)$-chain，$\mathcal{A}(w,\Gamma)$，$Q^{\mathrm{down}(A)}$，$\mathrm{wt}(A)$，$\mathrm{end}(A)$ の定義はここでは述べないが，量子 alcove モデルという組合せ論的な理論で用いられるものである．定理 1.2 は，内藤，Orr，佐垣によって記述された半無限旗多様体の結果 ([NOS]) から従う．式 (1.3) における $[\mathcal{O}(-\varpi_k)]$ については

$$[\mathcal{O}(-\varpi_k)] = e^{\varpi_k}(1 - [\mathcal{O}^{s_k}])$$

という 1 次関係式が知られている．そのため，式 (1.3) は Chevalley 公式 (1.2) と等価である．

続いて，一般旗多様体 G/P_J を考える．$\alpha_i^\vee$ $(i \in I)$ を G の単純余ルート，$Q^\vee = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ を G の余ルート格子とし，$\xi = \sum_{i\in I} c_i\alpha_i^\vee \in Q^\vee$ $(c_i \in \mathbb{Z})$ に対して $[\xi] := \sum_{i\in I\setminus J} c_i\alpha_i^\vee$ と定める．また，$w \in W$ に対し，w の W/W_J における minimal coset representative を $\lfloor w \rfloor$ と書く．加藤は，旗多様体の H-同変量子 K 環 $QK_H(G/B)$ と一般旗多様体の H-同変量子 K 環 $QK_H(G/P_J)$ の間に，次のような関係があることを証明した．

定理 1.3 ([K, Theorem 2.18])**.** $R(H)$-加群の全射準同型写像

$$\Phi_J : QK_H(G/B) \twoheadrightarrow QK_H(G/P_J)$$

であって

- $\xi \in Q^{\vee,+} = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i^\vee$ および $w \in W$ に対し，$\Phi_J(Q^\xi[\mathcal{O}^w]) = Q^{[\xi]}[\mathcal{O}^{\lfloor w \rfloor}]$
- $\Phi_J([\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot \bullet) = [\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot \Phi_J(\bullet)$

となるものが存在する．

よって，$QK_H(G/B)$ における Chevalley 公式 (1.3) の両辺を全射 Φ_J で写すことで，$QK_H(G/P)$ における Chevalley 公式が得られる．しかし，このように得られた Chevalley 公式には，全射 Φ_J の核に応じて cancellation が発生する．本研究の目的は，この cancellation をすべて決定し，Chevalley 公式の cancellation-free な表示を得ることである．

Chevalley 公式の cancellation-free な記述は，G/P_J が “cominuscule” の場合は Buch, Chaput, Mihalcea, Perrin によって得られている ([BCMP])．また，旗多様体 G/B に対しては，Lenart, 内藤，佐垣による定理 1.2 で記述されている．G が A，D，E，B 型で，$J = I \setminus \{k\}$ という形 (すなわち P_J が極大放物型部分群) の場合で，かつ ϖ_k が minuscule であるときは，筆者および内藤，佐垣によって記述された ([KNS])．本研究では，G が A，C 型で P_J が極大放物型部分群のとき，また G が A 型で，$J = I \setminus \{k_1, k_2\}$ $(k_1 \neq k_2)$ という形 (このとき，G/P_J を **2 ステップ旗多様体**という) のときに cancellation-free な Chevalley 公式の表示を得た ([KLNS])．本稿では，そのうち G/P_J が A 型 2 ステップ旗多様体のときの cancellation-free Chevalley 公式を紹介する．

以下，$G = SL_n(\mathbb{C})$ とし，$I = \{1, \ldots, n-1\}$ とみなす．$k_1, k_2 \in I$ を $k_1 < k_2$ となるようにとり，$J = I \setminus \{k_1, k_2\}$ とする．

記号

- Δ: G のルート系
- $\Delta^+ \subset \Delta$: 正ルート全体の集合
- $\rho := (1/2)\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$
- α_i $(i \in I)$: 単純ルート
- $\alpha^\vee$ $(\alpha \in \Delta)$: α に対応する余ルート
- $|\beta| := \begin{cases} \beta & \text{if } \beta \in \Delta^+ \\ -\beta & \text{if } \beta \in -\Delta^+ \end{cases}$ $(\beta \in \Delta)$: β の絶対値
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}$ 上の自然なペアリング ($\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$)
- $s_\alpha \in W$ $(\alpha \in \Delta^+)$: α に対応する鏡映
- $s_i = s_{\alpha_i}$ $(i \in I)$: α_i に対応する単純鏡映
- ℓ: W 上の長さ関数

2 量子 alcove モデルと Chevalley 公式

量子 alcove モデルは，整ウェイトを 1 つ決めるごとに定まる組合せ論的理論である．優整ウェイトに対する量子 alcove モデルは，Lenart，Lubovsky ([LL]) によって，1 列の Young 図形に対応するいくつかの Kirillov-Reshetikhin クリスタルのテンソル積を実現するモデルとして考案された．その後，量子 alcove モデルは，Lenart，内藤，佐垣 ([LNS]) により，優整とは限らない一般の整ウェイトに対して拡張され，Chevalley 公式の組合せ論的記述に現れた．本節では，本稿で使う必要最低限な分に絞って，量子 alcove モデルを導入する．一般の量子 alcove モデルについての詳細は，[LNS] を参照されたい．

量子 alcove モデルの理論では，Brenti，Fomin，Postnikov によって導入された量子 Bruhat グラフを用いる．

定義 2.1 ([BFP, Definition 6.1])**.** 次のように定まるラベル付き有向グラフ $\mathrm{QBG}(W)$ を**量子 Bruhat グラフ**という．

- 頂点集合：W
- ラベルの集合：Δ^+
- 辺：$x \xrightarrow{\alpha} y$ $(x, y \in W,\ \alpha \in \Delta^+) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} y = xs_\alpha$ であり，次のいずれか一方が成り立つ：
  (i) $\ell(y) = \ell(x) + 1$ (このとき，辺 $x \xrightarrow{\alpha} y$ を **Bruhat 辺**という)
  (ii) $\ell(y) = \ell(x) - 2\langle\rho, \alpha^\vee\rangle + 1$ (このとき，辺 $x \xrightarrow{\alpha} y$ を**量子辺**という)

与えられた 2 元 $x, y \in W$ に対して，$\mathrm{QBG}(W)$ において辺 $x \to y$ が存在するかを判定する方法を考える．まず，W は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ と同型である．この同型のもと，各 $w \in W$ を置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

と同一視する．また，各 $1 \le i < j \le n$ に対して $(i,j) := \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{j-1}$ と定めると，$\Delta^+ = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n\}$ である．混乱の恐れがないときは，同じ記号 (i,j) で正ルート $(i,j) \in \Delta^+$ に対応する鏡映 $s_{(i,j)} \in W$ を表すことにする．求める判定法は以下の通りである．

補題 2.2 ([Len, Proposition 3.6])**.** $w \in W$，$1 \le i < j \le n$ とする．

(1) $w \xrightarrow{(i,j)} w(i,j)$ が Bruhat 辺であるための必要十分条件は，以下の 2 条件が成り立つことである．
   - $w(i) < w(j)$
   - $w(i) < w(k) < w(j)$ となる $i < k < j$ が存在しない

(2) $w \xrightarrow{(i,j)} w(i,j)$ が量子辺であるための必要十分条件は，以下の 2 条件が成り立つことである．
   - $w(i) > w(j)$
   - すべての $i < k < j$ に対して $w(j) < w(k) < w(i)$

量子 alcove モデルの理論では，整ウェイト λ に対して定まる "λ-chain" を用いる．λ-chain は，λ に応じて作られるルートの列である．ここでは，基本ウェイトの (-1) 倍 $-\varpi_k$ $(k \in I)$ に対して，特定の $(-\varpi_k)$-chain $\Gamma(k)$ を導入する．

定義 2.3 ([Len, (3.1)] (cf. [LP, Corollary 15.4]))**.** ルートの列 $\Gamma(k)$ を

$$\begin{aligned} \Gamma(k) := (\, &-(1,n), && -(1,n-1), && \cdots, && -(1,k+1), \\ &-(2,n), && -(2,n-1), && \cdots, && -(2,k+1), \\ &&&&& \cdots \\ &-(k,n), && -(k,n-1), && \cdots, && -(k,k+1)\,). \end{aligned}$$

で定める．

上で定めた $\Gamma(k)$ に，$\Gamma(k) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ と添字をつける．量子 alcove モデルの理論では，次に定義する admissible subset を主な対象として扱う．

定義 2.4 ([LNS, Definition 17])**.** $w \in W$ とする．添字集合 $\{1, \ldots, m\}$ の部分集合 $A = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_s\} \subset \{1, \ldots, m\}$ に対して

$$\Pi(A) : w = w_0 \xrightarrow{|\beta_{j_1}|} w_1 \xrightarrow{|\beta_{j_2}|} \cdots \xrightarrow{|\beta_{j_s}|} w_s$$

が $\mathrm{QBG}(W)$ における道であるとき，A は **w-admissible** であるという．w-admissible である $\{1, \ldots, m\}$ の部分集合全体の集合を $\mathcal{A}(w, \Gamma(k))$ と書く．

定義 2.5 ([LNS, (11), (13)])**.** $w \in W$ とする．各 $A = \{j_1, \ldots, j_s\} \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k))$ に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{end}(A) &:= w s_{|\beta_{j_1}|} s_{|\beta_{j_2}|} \cdots s_{|\beta_{j_s}|} (= w_s), \\ \mathrm{down}(A) &:= \sum_{\substack{1 \le t \le s \\ w_{t-1} \to w_t \text{ は量子辺}}} |\beta_{j_t}|^{\vee} \end{aligned}$$

と定める．

注意 2.6. admissible subset $A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k))$ に対して，上で定めた $\mathrm{end}(A)$ と $\mathrm{down}(A)$ の他に，$\mathrm{wt}(A)$ という整ウェイトが定まる ([LNS, (12)])．本稿では，その定義を省略する．なお，今回の設定においては，常に $\mathrm{wt}(A) = -w\varpi_k$ となる．

Lenart，内藤，佐垣は，この admissible subset を用いて，$QK_H(G/B)$ における Chevalley 公式 (式 (1.3)) を記述した．ここでは，上で定義した $\Gamma(k)$ を使って，改めて式を書き下す．非負整数 $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i \in I)$ に対して $Q^{\sum_{i\in I} m_i\alpha_i^\vee} := \prod_{i\in I} Q_i^{m_i}$ と定める．

定理 2.7 ([LNS, Theorem 49])**.** $k \in I$，$w \in W$ とする．$QK_H(G/B)$ において，以下が成り立つ．

$$[\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{A \in \mathcal{A}(w,\Gamma(k))} (-1)^{|A|} Q^{\mathrm{down}(A)} e^{w\varpi_k} [\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}] \tag{2.1}$$

一方，加藤による定理 1.3 により，よい全射 $\Phi_J : QK_H(G/B) \twoheadrightarrow QK_H(G/P_J)$ が存在する．そこで，式 (2.1) の両辺を全射 Φ_J で写すことで，以下の定理を得る．これは，$QK_H(G/P_J)$ における Chevalley 公式の組合せ論的記述を与える．

定理 2.8. $k \in I \setminus J = \{k_1, k_2\}$，$w \in W^J$ とする．$QK_H(G/P_J)$ において，以下が成り立つ．

$$[\mathcal{O}(-\varpi_k)] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{A \in \mathcal{A}(w,\Gamma(k))} (-1)^{|A|} Q^{[\mathrm{down}(A)]} e^{w\varpi_k} [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A) \rfloor}] \tag{2.2}$$

この式には，次の例のように cancellation が発生する．

例 2.9. $n = 6$ とする．$G = SL_6(\mathbb{C})$ は A_5 型である．$J = \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{2, 4\}$ に対し，対応する 2 ステップ旗多様体 G/P_J を考える．$w = s_5s_1s_2s_3s_4s_3s_2 \in W^J$ とするとき，式 (2.1) を計算することで，$QK_H(G/B)$ における等式

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}(-\varpi_2)] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_2}(&[\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4s_3s_2}] - [\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4s_3s_1s_2}] \\
&- Q_2Q_3Q_4[\mathcal{O}^{s_5s_1}] - Q_2[\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4s_3}] \\
&+ Q_2Q_3Q_4[\mathcal{O}^{s_5s_2s_1}] + Q_2[\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4s_3s_1}] \\
&+ Q_2Q_3Q_4[\mathcal{O}^{s_5s_1s_2}] - Q_2Q_3Q_4[\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_1}])
\end{aligned}$$

を得る．一方，この両辺を全射 Φ_J で写す (または式 (2.2) を用いる) ことで，$QK_H(G/P_J)$ における等式

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}(-\varpi_2)] \cdot [\mathcal{O}^w] &= e^{w\varpi_2}([\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4s_3s_2}] - [\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4s_3s_1s_2}] \\
&\quad - Q_2Q_4[\mathcal{O}^{e}] - Q_2[\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4}] \\
&\quad + Q_2Q_4[\mathcal{O}^{s_2}] + Q_2[\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4}] \\
&\quad + Q_2Q_4[\mathcal{O}^{s_1s_2}] - Q_2Q_4[\mathcal{O}^{s_1s_2}]) \\
&= e^{w\varpi_2}([\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4s_3s_2}] - [\mathcal{O}^{s_5s_1s_2s_3s_4s_3s_1s_2}] \\
&\quad - Q_2Q_4[\mathcal{O}^{e}] + Q_2Q_4[\mathcal{O}^{s_2}])
\end{aligned}$$

を得る．この式では，確かに cancellation が発生していることがわかる．

3　2 ステップ旗多様体に対する cancellation-free Chevalley 公式

式 (2.2) では，例 2.9 でみたように cancellation が発生する．この cancellation を記述し，cancellation-free な Chevalley 公式を書き下すことが，本研究の目的である．本節では，その結果を紹介し，証明の方法を説明する．

まず，結果の記述に必要ないくつかの条件を整理する．まず，$w \in W$ に対し

$$\mathcal{A}_{\lessdot}(w, \Gamma(k)) := \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k)) \mid \Pi(A) \text{ の辺はすべて Bruhat 辺 }\}$$

と定める．次に，$w \in W^J$ に対し，条件 (Q) および (Full) を，以下のように定める．

(Q) $w(k_1) > w(k_2) > w(k_1+1) > w(k_2+1)$

(Full) 以下のすべてが成り立つ：

(i) $w(k_2+1)$ は $\{w(1), \ldots, w(n)\}$ の中で最小である．

(ii) $w(k_1+1)$ は $\{w(1), \ldots, w(k_2)\}$ の中で最小である．

(iii) $w(k_1)$ は $\{w(1), \ldots, w(n)\}$ の中で最大である．

注意 3.1. $w \in W^J$ とする．判定法 (補題 2.2) を用いると, 以下のことがわかる．ただし, $w \in W^J$ より，不等式

- $w(1) < w(2) < \cdots < w(k_1)$
- $w(k_1+1) < w(k_1+2) < \cdots < w(k_2)$
- $w(k_2+1) < w(k_2+2) < \cdots < w(n)$

が成り立っていることに注意する (例えば [BB, Lemma 2.4.7] 参照).

(1) 条件 (Q) と，$w \xrightarrow{(k_1,k_2+1)} w(k_1, k_2+1)$ が量子辺であることは同値である．

(2) $w(k_1) > w(k_1+1)$ であることと，$w \xrightarrow{(k_1,k_1+1)} w(k_1, k_1+1)$ が量子辺であることは同値である．

(3) $w \xrightarrow{(i,j)} w(i,j)$ ($i \le k_1$，$j \ge k_1+1$) が量子辺ならば，(i,j) は (k_1, k_1+1) または (k_1, k_2+1) のいずれかである．

以下，cancellation-free な Chevalley 公式の記述を紹介する．

定理 3.2 ([KLNS, Theorems 18, 20, 22])**.** $w \in W^J$ とする．

(1) 条件 (Full) が成り立つとき，次の cancellation-free な等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} \Big(&[\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}] - Q_{k_1}[\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A) s_{k_1} \rfloor}] \\ &- Q_{k_1}Q_{k_2}\Big([\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A)(k_1,k_2+1) \rfloor}] - [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A)(k_1,k_2+1)s_{k_1} \rfloor}]\Big)\Big)\end{aligned}$$

(2) 条件 $w(k_1) < w(k_1+1)$ が成り立つとき，次の cancellation-free な等式が成り立つ．

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}]$$

(3) 条件 $w(k_1) > w(k_1+1)$ が成り立っているとし，さらに条件 (Q) が成り立たないと仮定する．

(i) 条件 $w(1) < w(k_1+1)$ または条件 $w(k_1) < w(k_2)$ が成り立つとき，次の cancellation-free な等式が成り立つ．

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}]$$

(ii) 条件 $w(1) > w(k_1+1)$ かつ条件 $w(k_1) > w(k_2)$ が成り立つとき，次の cancellation-free な等式が成り立つ．

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} \left([\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}] - Q_{k_1} [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A) s_{k_1} \rfloor}] \right)$$

(4) 条件 (Q) が成り立つと仮定し，さらに条件 $w(k_1) < w(n)$ が成り立つとする．

(i) 条件 $w(1) < w(k_1+1)$ が成り立つならば，次の cancellation-free な等式が成り立つ．

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}]$$

(ii) 条件 $w(1) > w(k_1+1)$ が成り立つならば，次の cancellation-free な等式が成り立つ．

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} \left([\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}] - Q_{k_1} [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A) s_{k_1} \rfloor}] \right)$$

(5) 条件 (Q) が成り立つと仮定し，さらに条件 $w(k_1) > w(n)$ が成り立つとする．

(i) 条件 $w(1) < w(k_2+1)$ が成り立つならば，次の cancellation-free な等式が成り立つ．

$$[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] = e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}]$$

(ii) 条件 $w(k_2+1) < w(1) < w(k_1+1)$ が成り立つならば，次の cancellation-free な等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{O}(-\varpi_{k_1})] \cdot [\mathcal{O}^w] \\
&= e^{w\varpi_{k_1}} \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} \left([\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}] - Q_{k_1} Q_{k_2} [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A)(k_1,k_2+1) \rfloor}] \right)
\end{aligned}$$

注意 3.3. $k = k_2$ の場合の積 $[\mathcal{O}(-\varpi_{k_2})] \cdot [\mathcal{O}^w]$ も，定理 3.2 に Dynkin 図形の自己同型 $I \to I,\ i \mapsto n-i$ を適用することで得られる．

定理の証明は，以下のような流れで行われる．

1. 式 (2.2) において，$k = k_1$ とする．この右辺の和を，$A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w, \Gamma(k_1))$ にわたる部分和

$$S_1 := \sum_{A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} e^{w\varpi_{k_1}} [\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}]$$

と，それ以外の項の和

$$S_2 := \sum_{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \setminus \mathcal{A}_{\lessdot}(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} Q^{[\mathrm{down}(A)]} e^{w\varpi_{k_1}} [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A) \rfloor}]$$

に分ける．なお，$A \in \mathcal{A}_{\lessdot}(w, \Gamma(k_1))$ に対しては，$\lfloor \mathrm{end}(A) \rfloor = \mathrm{end}(A)$ (例えば [BB, Corollary 2.5.2] 参照), $\mathrm{down}(A) = 0$ が成り立つことに注意する．また, 和 S_1 は cancellation-free である ([KLNS, Remark 6] 参照).
2. 集合 $\mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \setminus \mathcal{A}_{\lessdot}(w, \Gamma(k_1))$ の構造を調べる．
3. 和 S_2 の cancellation の様子を調べる．

ステップ 2 では，以下の補題を用いる．

補題 3.4 ([KLNS, Lemma 17])**.** $w \in W^J$ とする．$A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1))$ に対し，道 $\Pi(A)$ が量子辺を含むとき，$\Pi(A)$ は以下のいずれかの形である．ただし，$\underset{\mathsf{B}}{\longrightarrow}$ は Bruhat 辺，$\underset{\mathsf{Q}}{\longrightarrow}$ は量子辺を表す．

(1) $\Pi(A) : w = w_0 \underset{\mathsf{B}}{\longrightarrow} \cdots \underset{\mathsf{B}}{\longrightarrow} w_{r-1} \xrightarrow[\mathsf{Q}]{(k_1, k_1+1)} w_r$

(2) $\Pi(A) : w = w_0 \underset{\mathsf{B}}{\longrightarrow} \cdots \underset{\mathsf{B}}{\longrightarrow} w_{r-1} \xrightarrow[\mathsf{Q}]{(k_1, k_2+1)} w_r$

(3) $\Pi(A) : w = w_0 \underset{\mathsf{B}}{\longrightarrow} \cdots \underset{\mathsf{B}}{\longrightarrow} w_{r-2} \xrightarrow[\mathsf{Q}]{(k_1, k_2+1)} w_{r-1} \xrightarrow[\mathsf{B}]{(k_1, k_1+1)} w_r$

よって，この補題にしたがって

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1(w, \Gamma(k_1)) &:= \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \mid \Pi(A) \text{ は } (1) \text{ の形 }\} \\
\mathcal{A}_2(w, \Gamma(k_1)) &:= \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \mid \Pi(A) \text{ は } (2) \text{ の形 }\} \\
\mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1)) &:= \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \mid \Pi(A) \text{ は } (3) \text{ の形 }\}
\end{aligned}$$

と定めると

$$\mathcal{A}(w, \Gamma(k_1)) \setminus \mathcal{A}_{\lessdot}(w, \Gamma(k_1)) = \mathcal{A}_1(w, \Gamma(k_1)) \sqcup \mathcal{A}_2(w, \Gamma(k_1)) \sqcup \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))$$

である．この分解を用いて，ステップ 3 の cancellation を調べる．例えば，和

$$\sum_{A \in \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} Q^{[\mathrm{down}(A)]} e^{w\varpi_{k_1}} [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A) \rfloor}]$$

の cancellation は，以下のように調べられる．まず，補題 3.4 より，各 $A \in \mathcal{A}_3(w, \Gamma(k_1))$ に対し $[\mathrm{down}(A)] = [(k_1, k_2+1)^\vee] = [\alpha_{k_1}^\vee + \cdots + \alpha_{k_2}^\vee] = \alpha_{k_1}^\vee + \alpha_{k_2}^\vee$ である．よって $Q^{[\mathrm{down}(A)]} = Q_{k_1} Q_{k_2}$ である．いま, 条件 (Q) が成り立つことを仮定し，ある $1 \leq l \leq k_1$ が存在して $w(k_2+1) < w(l) < w(k_1+1)$ となるとする．このとき，$w(p) < w(k_1+1)$ となる最小の $1 \leq p \leq k_1$ をとると，補題

2.2 を用いて $\mathcal{A}_3(w,\Gamma(k_1))$ 上の符号を反転する対合 $A \leftrightarrow A \sqcup \{(p, k_1+1)\}$ を定義できる．この対合は $\lfloor \mathrm{end}(A) \rfloor$ を保つ．したがって

$$\begin{aligned}
&\sum_{A\in\mathcal{A}_3(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} Q^{[\mathrm{down}(A)]} e^{w\varpi_{k_1}} [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A) \rfloor}] \\
&= e^{w\varpi_{k_1}} Q_{k_1} Q_{k_2} \sum_{A\in\mathcal{A}_3(w,\Gamma(k_1))} (-1)^{|A|} [\mathcal{O}^{\lfloor \mathrm{end}(A) \rfloor}] \\
&= 0
\end{aligned}$$

が成り立つ．このように，場合分けの条件に応じて，符号を反転する対合を構成することで，cancellation を記述することができる．

謝辞

RIMS 共同研究「組合せ論的表現論における最近の展開」にて貴重な講演の機会を頂き，ありがとうございました．また，共同研究者である Cristian Lenart 氏，内藤聡氏，佐垣大輔氏に感謝いたします．本研究において，筆者は JSPS 科研費 20J12058 および 22J00874 の助成を受けています．

参考文献

[BB] A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, volume 231 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2005.

[BCMP] A.S. Buch, P.-E. Chaput, L.C. Mihalcea, and N. Perrin, A Chevalley formula for the equivariant quantum K-theory of cominuscule varieties, *Algebr. Geom.* **5** (2018), no. 5, 568–595.

[BFP] F. Brenti, S. Fomin, and A. Postnikov, Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups, *Int. Math. Res. Not.* **1999** (1999), no. 8, 419–441.

[G] A. Givental, On the WDVV equation in quantum K-theory, *Michigan Math. J.* **48** (2000), 295–304.

[K] S. Kato, On quantum K-groups of partial flag manifolds, arXiv:1906.09343.

[KLNS] T. Kouno, C. Lenart, S. Naito, and D. Sagaki, Quantum K-theory Chevalley formulas in the parabolic case, arXiv:2109.11596.

[KNS] T. Kouno, S. Naito, and D. Sagaki, Chevalley formula for anti-dominant minuscule fundamental weights in the equivariant quantum K-group of partial flag manifolds, *J. Combin. Theory Ser. A* **192** (2022), Paper No. 105670.

[Lee] Y.-P. Lee, Quantum K-theory, I: Foundations, *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 3, 389–424.

[Len] C. Lenart, From Macdonald polynomials to a charge statistic beyond type A, *J. Combin. Theory Ser. A* **119** (2012), no. 3, 683–712.

[LL] C. Lenart and A. Lubovsky, A generalization of the alcove model and its applications, *J. Algebr. Comb.* **41** (2015), no. 3, 751–783.

[LNS] C. Lenart, S. Naito, and D. Sagaki, A general Chevalley formula for semi-infinite flag manifolds and quantum K-theory, arXiv:2010.06143.

[LP] C. Lenart and A. Postnikov, Affine Weyl groups in K-theory and representation theory, *Int. Math. Res. Not.* **2007** (2007), no. 12, Art. ID rnm038.

[NOS] S. Naito, D. Orr, and D. Sagaki, Chevalley formula for anti-dominant weights in the equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds, *Adv. Math.* **387** (2021), Paper No. 107828.