

Rogers-Ramanujan 恒等式のフィボナッチ変種

(A Fibonacci variant of the Rogers-Ramanujan identities)

東京工業大学情報理工学院 土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*

Department of Mathematical and Computing Science, School of Computing, Tokyo Institute of Technology

1 はじめに

Rogers-Ramanujan 恒等式 (以下, RR 恒等式)

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q, q^4; q^5)_\infty}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_\infty}$$

を思い出す. ここで q -Pochhammer 記号

$$(a; q)_n = (1-a)(1-aq) \cdots (1-aq^{n-1}), \quad (a_1, \dots, a_m; q)_n = (a_1; q)_n \cdots (a_m; q)_n$$

を用いた. RR 恒等式の「フィボナッチ変種」を得たので, 2022 年 11 月の RIMS 研究集会「組合せ論的表現論における最近の展開」で発表させていただいた.

定理 1 ([12, Theorem 1.1]). $b_0^{(2)} = 1, b_1^{(1)} = q, b_1^{(2)} = 0$ を初期条件とし, $b_{n+2}^{(i)} = q^{n+2}b_n^{(i)} - q^{n+1}b_{n+1}^{(i)}$ で定まる q -holonomic 列 $(b_n^{(1)})_{n \geq 0}$ と $(b_n^{(2)})_{n \geq 0}$ について, 以下が成り立つ.

$$\sum_{n \geq 0} \frac{b_n^{(1)}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q, q^4; q^5)_\infty}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{b_n^{(2)}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_\infty}.$$

例 2. 分子 $(b_n^{(i)})_{n \geq 0}$ の数項は以下のようになる ($i = 1, 2$).

$$\begin{aligned} b_2^{(1)} &= 0, & b_3^{(1)} &= q^4, & b_4^{(1)} &= -q^7, & b_5^{(1)} &= q^9(1+q^2), \\ b_6^{(1)} &= -q^{13}(1+q+q^3), & b_7^{(1)} &= q^{16}(1+q^2+q^3+q^4+q^6), \\ b_2^{(2)} &= q^2, & b_3^{(2)} &= -q^4, & b_4^{(2)} &= q^6(1+q), & b_5^{(2)} &= -q^9(1+q+q^2), \\ b_6^{(2)} &= -q^{12}(1+q+q^2+q^3+q^4), & b_7^{(2)} &= -q^{16}(1+q+2q^2+q^3+q^4+q^5+q^6). \end{aligned}$$

これからも分かるように, $b_n^{(i)}$ は, (0 でなければ) 符号が揃っていて, (符号を除くと) フィボナッチ数の q 類似 (つまり $q = 1$ を代入するとフィボナッチ数になる) になっている. RR 恒等式とフィボナッチ数の関係は, これまでも [1, 3] などが知られていた. 定理 1 は, これらの先行研究とは異なる関係を示している.

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University, the TSUBAME3.0 supercomputer at Tokyo Institute of Technology, JSPS Kakenhi Grant 20K03506, the Inamori Foundation, JST CREST Grant Number JPMJCR2113, Japan and Leading Initiative for Excellent Young Researchers, MEXT, Japan.

2 研究の動機：Kleshchev 多重分割を用いた第2RR 恒等式の証明

Lepowsky-Milne は、RR 恒等式の無限積が

$$\frac{1}{(q; q^2)_\infty} \frac{1}{(q, q^4; q^5)_\infty} = \text{ch } V(2\Lambda_0 + \Lambda_1), \quad \frac{1}{(q; q^2)_\infty} \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_\infty} = \text{ch } V(3\Lambda_0) \quad (1)$$

のように、アフィン・リー環 $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{g}(A_1^{(1)})$ のレベル3 標準加群の指標に現れることを発見した [7]. この観察はその後、頂点作用素を用いた証明に格上げされた [8].

[11] では、柏原クリスタルを用いて (1) (の后者) から第2RR 恒等式の証明を与えた. 大まかな方針は次のようになる. ここで $|b|$ とは、 b の深さである (つまり、 B の最高ウェイト元 b_0 から $b = \tilde{f}_{i_1} \dots \tilde{f}_{i_m} b_0$ と得られるとき $|b| = m$ とする).

標準加群 $V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ の実現 $B(\cong B(\lambda))$ を取り、「長さ関数」 $\ell : B \rightarrow \mathbb{Z}$ を、母関数 $F(x, q) = \sum_{b \in B} x^{\ell(b)} q^{|b|}$ が、 q 差分方程式を満たすように定義する.

[11] では、 $A_1^{(1)}$ 型最高ウェイトクリスタル $B(3\Lambda_0)$ の実現として「 $\emptyset^{\otimes 3} \in \text{Str}^{\otimes 3}$ の連結成分」を採用した. ここで Str はストリクト分割 (つまり $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ で $\lambda_1 > \dots > \lambda_\ell \geq 1$ となる分割) の集合で、 Str は [9] によって $B(\Lambda_0)$ の実現になる. 連結成分については、以下の特徴付けが知られている. より一般の命題については、[2, 4] を参照されたい.

定理 3 ([2, Proposition 9.7]). $k \geq 1$ とする. $\emptyset^{\otimes k} \in \text{Str}^{\otimes k}$ の連結成分 S_k は、次で与えられる.

$$S_k = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}) \in \text{Str}^k \mid \ell(\lambda^{(i)}) \geq (\lambda^{(i+1)})_1 \text{ for } 1 \leq i < k\}.$$

そこで、「長さ関数」 $\ell : \text{Str}^k \rightarrow \mathbb{Z}$ を $\ell(\boldsymbol{\lambda}) = \ell(\lambda^{(1)}) + \dots + \ell(\lambda^{(k)})$ と定義する (ここで $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}) \in \text{Str}^k$). 右辺の ℓ は分割の長さ (ヤング図形の行数) である. 深さ $|\boldsymbol{\lambda}|$ は、 $|\boldsymbol{\lambda}| = |\lambda^{(1)}| + \dots + |\lambda^{(k)}|$ と与えられる. 右辺の絶対値記号は、分割のサイズ (ヤング図形の箱の数) である. 初等的な議論で、 $F(x, q)$ の「Andrews-Gordon 型の」無限和表示が得られる.

定理 4 ([11, Theorem 2.2]).

$$\sum_{\boldsymbol{\lambda} \in S_k} x^{\ell(\boldsymbol{\lambda})} q^{|\boldsymbol{\lambda}|} = \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 0} \frac{q^{\sum_{a=1}^k a \binom{1+i_a}{2} + \sum_{1 \leq a < b \leq k} a i_a i_b}}{(q; q)_{i_1} \cdots (q; q)_{i_k}} x^{\sum_{a=1}^k a i_a}.$$

この表示式から、定理4の左辺 ($F_k(x, q)$ とする) は、 q 差分方程式を満たすことが分かり、(固定した k については) Sister Celine の技法の q 類似によって自動的に求めることができる [13, §7.1]. そのアルゴリズムを

$$F_3(x, q) = \sum_{s, t, u \geq 0} \frac{q^{\binom{s+1}{2} + 2\binom{t+1}{2} + 3\binom{u+1}{2} + st + su + 2tu} x^{s+2t+3u}}{(q; q)_s (q; q)_t (q; q)_u}$$

について実行すると、 q 差分方程式

$$F_3(x, q) = (1 + xq)(1 + x^2q^2 + x^2q^3)F_3(xq, q) - x^4q^7(1 + xq)(1 + xq^2)F_3(xq^2, q) \quad (2)$$

が得られる [11, Proposition 4.2]. なお (2) を得るための、 q -Chu-Vandermonde を用いた簡明な方法もある (O.Warnaar による [11, Remark 4.4]). (2) を標準的な方法で解く. $F_3(x, q) = (-xq; q)_\infty G(x, q)$ とすると、(2) から「 $(1 + xq)$ と $(1 + xq)(1 + xq^2)$ が消えてきて」

$$G(x, q) = (1 + x^2q^2 + x^2q^3)G(xq, q) - x^4q^7G(xq^2, q)$$

が得られる。一方で,

$$H(x, q) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n} x^{2n}}{(q; q)_n}$$

も, 同じ差分方程式を満たすことは容易に確認でき [11, Proposition 4.1], $F_3(x, q) = (-xq; q)_\infty H(x, q)$ が分かる. $F_3(1, q) = \text{ch } V(3\Lambda_0)$ であるから, (1) から第 2RR 恒等式が示された.

3 京都パス模型に対する長さ関数の例

アフィン GCM $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ について, $A \neq A_{2n}^{(2)}$ ならば $i_0 = 0$ で, $A = A_{2n}^{(2)}$ ならば $i_0 = n$ とする. レベル ℓ 完全 A クリスタル C を考える [6, Definition 1.1.1]. つまり, 以下が成立している.

1. 結晶 (pseudo) 基底が C と同型になるような有限次元 $U'_q(A)$ 加群が存在する.
2. $C \otimes C$ は連結.
3. 古典ウェイト $\lambda_0 \in P_{\text{cl}}$ が存在して, $|C_{\lambda_0}| = 1$ かつ $\text{wt}(C) \subseteq \lambda_0 + \sum_{i \neq i_0} \mathbb{Z}_{\leq 0} \text{cl}(\alpha_i)$.
4. 任意の $b \in C$ について, $\langle c, \varepsilon(b) \rangle_{\text{cl}} \geq \ell$.
5. $\varepsilon, \varphi : C \rightarrow P_{\text{cl}}^+$ を, $C_{\min} = \{b \in C \mid \langle c, \varepsilon(b) \rangle_{\text{cl}} = \ell\}$ へ制限すると, $(P_{\text{cl}}^+)_\ell = \{\lambda \in P_{\text{cl}}^+ \mid \langle c, \lambda \rangle_{\text{cl}} = \ell\}$ への全単射になる. ここで $\varepsilon(b) = \sum_{i \in I} \varepsilon_i(b) \Lambda_i$, $\varphi(b) = \sum_{i \in I} \varphi_i(b) \Lambda_i$ である.

定義 5 ([5, §4.1]). $H : C \otimes C \rightarrow \mathbb{Z}$ がエネルギー関数であるとは,

$$H(\tilde{\varepsilon}_i(b \otimes b')) = \begin{cases} H(b \otimes b') & (i \neq i_0), \\ H(b \otimes b') + 1 & (\varphi_{i_0}(b) \geq \varepsilon_{i_0}(b')), \\ H(b \otimes b') - 1 & (\varphi_{i_0}(b) < \varepsilon_{i_0}(b')), \end{cases}$$

が, 任意の $b, b' \in C$ と $i \in I$ について成り立つことである.

定理 6 ([5, Proposition 4.6.4]). レベル ℓ 支配的整ウェイト $\lambda = \sum_{i \in I} k_i \Lambda_i$ (つまり $\sum_{i \in I} a_i^\vee k_i = \ell$) について, ground state path $\mathbf{g} = \cdots \otimes g_2 \otimes g_1 \in C^{\otimes \infty}$ を, $\varphi(g_1) = \lambda$ かつ $\varphi(g_{k+1}) = \varepsilon(g_k)$ で定める ($k \geq 1$). このとき, λ -path の集合

$$P(\lambda) = \{\cdots \otimes b_2 \otimes b_1 \in C^{\otimes \infty} \mid \text{有限個の } k \text{ を除いて } b_k = g_k\}$$

に A クリスタル構造が定義され, 最高ウェイトクリスタル $B(\lambda)$ と同型になる (京都パス模型).

$P(\lambda)$ へのクリスタル構造の定義は省略するが, エネルギー関数 H が用いられる. それを参考に H -length $\ell_H : P(\lambda) \rightarrow \mathbb{Z}$ を, 以下で定める.

$$\ell_H(\cdots \otimes b_2 \otimes b_1) = \sum_{k \geq 1} (H(b_{k+1} \otimes b_k) - H(g_{k+1} \otimes g_k)).$$

定理 7 ([12, Proposition 2.1]). ground state path \mathbf{g} が周期的 ($d \geq 1$ で $\forall k \geq 1, g_{d+k} = g_k$ となるものが存在する) のとき, 任意の $\text{ht}(\delta)d$ の約数 D と, 任意の関数 $m : C \rightarrow \mathbb{Z}$ について, 母関数

$$F^{(D,m)}(x, q) = \sum_{\mathbf{b} \in P(\lambda)} x^{D\ell_H(\mathbf{b})+m(b_1)} q^{|\mathbf{b}|}$$

は, (非自明な) q 差分方程式を満たす. ここで $\mathbf{b} = \cdots \otimes b_2 \otimes b_1$ である.

これを $A_1^{(1)}$ 完全クリスタル $B^{1,3}$ に適用する [12, §3]. $B^{1,3} = \{0, 1, 2, 3\}$ のクリスタルグラフは $0 \xrightarrow{1} 1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{3} 3$ であり (ここで, 右向きの厚めの矢印が 1 矢印で, 左向きの細めの矢印が 0 矢印である), $H(a \otimes b) = \max(a - 3, -b)$ とできる. $\lambda = 3\Lambda_0$ のとき, ground state path は $\mathbf{g} = \cdots \otimes 0 \otimes 3$ である. $D = 2$, 「補正の関数」を $m : B^{1,3} \rightarrow \mathbb{Z}, a \mapsto a - 3$ とすると, q 差分方程式

$$qF^{(D,m)}(x, q) = (1 + xq)(1 + q - xq + x^2q^3)F^{(D,m)}(xq, q) - (1 + xq^2)(1 - x^2q^2)F^{(D,m)}(xq^2, q)$$

が得られる (計算には [10, Appendix B] も用いる). これを標準的な方法で解いたものが, 冒頭の定理 1 の $i = 2$ の場合である. $\lambda = 2\Lambda_0 + \Lambda_1$ のときも同様であり, それが $i = 1$ の場合になる.

4 まとめ

本稿では $A_1^{(1)}$ 最高ウェイトクリスタル $B(3\Lambda_0)$ への 2 通りの「長さ関数」の定義と, その応用を述べた. これらの長さを統一するような定義ができると望ましい. 他のアフィン型やレベルへの適用も今後の課題である. 講演の機会を与えてくださった池田岳さんに感謝いたします. ありがとうございました.

参考文献

- [1] G.E. Andrews, *Fibonacci numbers and the Rogers-Ramanujan identities*, Fibonacci Quart. **42** (2004), 3-19.
- [2] S. Ariki, V. Kreiman and S. Tsuchioka, *On the tensor product of two basic representations of $U_q(\mathfrak{sl}_e)$* , Adv.Math. **218** (2008), 28-86.
- [3] J. Cigler, *q -Fibonacci polynomials and the Rogers-Ramanujan identities*, Ann.Comb. **8** (2004), 269-285.
- [4] N. Jacon, *Kleshchev multipartitions and extended Young diagrams*, Adv.Math. **339** (2018), 367-403.
- [5] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Internat. J. Modern Phys. A **7**, Suppl. 1A (1992), 449-484.
- [6] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, Duke Math.J. **68** (1992), 499-607.
- [7] J. Lepowsky and S. Milne, *Lie algebraic approaches to classical partition identities*, Adv.Math. **29** (1978), 15-59.
- [8] J. Lepowsky and R. Wilson, *The structure of standard modules. I. Universal algebras and the Rogers-Ramanujan identities*, Invent.Math. **77** (1984), 199-290.
- [9] K. Misra and T. Miwa, *Crystal base for the basic representation of $U_q(\mathfrak{sl}(n))$* , Comm.Math.Phys. **134** (1990), 79-88.
- [10] M. Takigiku and S. Tsuchioka, *A proof of conjectured partition identities of Nandi*, to appear in the American journal of Mathematics, arXiv:1910.12461.
- [11] S. Tsuchioka, *A proof of the second Rogers-Ramanujan identity via Kleshchev multipartitions*, Proc.Japan Acad.Ser.A Math.Sci. 99 (2023) no.3, 23-26.
- [12] S. Tsuchioka, *A Fibonacci variant of the Rogers-Ramanujan identities via crystal energy*, arXiv:2211.04296
- [13] S. Tsuchioka, *An example of A_2 Rogers-Ramanujan bipartition identities of level 3*, arXiv:2205.04811