Coproduct for affine Yangians and parabolic induction for rectangular W-algebras

千葉大学　小寺 諒介
Ryosuke Kodera
Chiba University

Abstract

筆者は，上田衛さんとの共同研究 [KU] で，アファインヤンギアンから長方形 W 代数への代数射を構成した．この結果について解説する．

1　イントロダクション

始めに [KU] の動機を述べる．まだ完成していない研究の目標は「Brundan-Kleshchev の同型のアファイン版」である．ここで，「Brundan-Kleshchev の同型」とは以下で述べるものである．複素一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_N$ と，その冪零元 f のペアに対して，有限 W 代数が定義される．Brundan-Kleshchev [BK] は，シフトヤンギアンから有限 W 代数への全射代数射を構成し，その核を決定した．この結果により，有限 W 代数がシフトヤンギアンの具体的な両側イデアルによる商として実現され，特に生成元と関係式による表示を得る．これが「Brundan-Kleshchev の同型」である．

この結果のアファイン版として，シフトアファインヤンギアンから（アファイン）W 代数への代数射を構成し，双方の表現論に応用したい．できているのは，冪零元 f が長方形型（冪零元の Jordan タイプを表す Young 図形が長方形のもの）の場合で，シフトのないアファインヤンギアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ からの代数射を構成した．構成にはアファインヤンギアンの余積と evaluation 写像を使う．この結果 [KU] について解説する．

なお [U] では，アファインヤンギアンの生成元に対して長方形 W 代数の元を定め，それが関係式を満たすことを直接チェックして主定理 4.1.2 と同じ結果を証明している．

代数学シンポジウムの報告集 [K2] もほぼ同じ内容ですが，今回はややマニアックな注を付け加えました．

2　長方形 W 代数

2.1　アファイン Lie 代数

長方形 W 代数はアファイン Lie 代数の一般化である．また，その定義にアファイン Lie 代数を使うので，この節で必要なことをまとめる．

$\mathfrak{gl}_n = \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ を $\mathbb{C}$ 上の一般線型 Lie 代数とする．(i,j) 成分が 1 で他の成分が 0 の行列を $e_{i,j}$ とし，$I_n = \sum_{i=1}^{n} e_{i,i}$ とする．

$$\mathfrak{sl}_n = \{X \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathrm{tr}\, X = 0\}, \quad \mathfrak{z}_n = \mathbb{C} I_n$$

とすれば，

$$\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{sl}_n \oplus \mathfrak{z}_n$$

と分解する．それぞれのアファイン Lie 代数を

$$\hat{\mathfrak{sl}}_n = \mathfrak{sl}_n[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c, \quad \hat{\mathfrak{z}}_n = \mathfrak{z}_n[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c'$$

とする．Lie ブラケットは trace フォームを使って

$$\begin{aligned} [Xt^m, Yt^{m'}] &= [X,Y]t^{m+m'} + m\delta_{m+m',0}\, \mathrm{tr}(XY)c, \quad (X, Y \in \mathfrak{sl}_n) \\ [I_n t^m, I_n t^{m'}] &= m\delta_{m+m',0} n c' \end{aligned}$$

で与える．c, c' は中心元である．

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$U(\hat{\mathfrak{sl}}_n^{\alpha}) = U(\hat{\mathfrak{sl}}_n)/(c - \alpha), \quad U(\hat{\mathfrak{z}}_n^{\alpha+n}) = U(\hat{\mathfrak{z}}_n)/(c' - (\alpha + n))$$

とし，

$$U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha}) = U(\hat{\mathfrak{sl}}_n^{\alpha}) \otimes U(\hat{\mathfrak{z}}_n^{\alpha+n})$$

とする．以下では Xt^m のことを $X(m)$ と表す．

$\hat{\mathfrak{sl}}_n$ の部分と $\hat{\mathfrak{z}}_n$ の部分の中心の値をずらすのには二つの理由がある．一つ目の理由は，後で述べる定理 3.2.2（evaluation 写像の存在）が成り立つようにするためである．論文 [K1] を書いたときはこの点を間違えていて，出版時に訂正を出した（arXiv 版は修正してある）．二つ目の理由は，このようにレベルをシフトすると，W 代数の Miura 写像や放物誘導と整合的になるためである（後の 2.3 節の，W 代数のレベルについての注 (2.3.1) も参照）．主結果（定理 4.1.2）でアファインヤンギアンから長方形 W 代数への代数射を構成するときに evaluation 写像を使うので，この二つの理由は関係している．

一般に $A=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} A_d$ を次数付き代数としたとき

$$A_{\mathrm{comp}}=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \varprojlim_{m}\left(A_d/\sum_{r>m} A_{d-r}A_r\right)$$

と定義する（[A, A.2] を参照．A の standard degree-wise completion と呼ばれる）．以降で使う次数に関する完備化は，すべてこのようにして定義する．$U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})$ の次数付けを $\deg X(m)=m$ で定め，完備化を $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})_{\mathrm{comp}}$ と表す．同様に，テンソル積 $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})^{\otimes l}$ の次数に関する完備化を $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$ と表す．次の 2.2 節で，$U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$ の中に部分代数 $\mathcal{W}_l$ を定義する．

2.2　長方形 W 代数の定義と生成元

長方形 W 代数 $\mathcal{W}_l$ を定義する．これから述べる定義は普通のものとは違っていて，両者が一致するのは荒川-Molev [AM] の結果（定理 2.3.1）である．2.3 節で本来の定義との関係を説明する．

l と n を 1 以上の整数とし，$N=ln$ とする．レベルと呼ばれるパラメータ $k\in\mathbb{C}$ を固定し，$\alpha\in\mathbb{C}$ を $\alpha=k+N-n$ とする．以降では α を基本的なパラメータとして扱う．各 $s=1,\dots,l$ に対して

$$e^{[s]}_{i,j}(m)=1^{\otimes(s-1)}\otimes e_{i,j}(m)\otimes 1^{\otimes(l-s)}\in U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})^{\otimes l}$$

とし，

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{[s]}_{i,j}(m)z^{-m-1}\in U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})^{\otimes l}[[z,z^{-1}]]$$

という元を (i,j) 成分とする $n\times n$ 行列を $A^{[s]}(z)$ と表す．τ を

$$[A^{[s]}(z),\tau]=\alpha\partial_z A^{[s]}(z)$$

を満たす形式的な元として

$$(\tau+A^{[1]}(z))(\tau+A^{[2]}(z))\cdots(\tau+A^{[l]}(z))=\tau^l+\sum_{r=1}^{l}\tau^{l-r}W^{(r)}(z)$$

によって $W^{(r)}(z)$ を定義する．$W^{(r)}(z)$ は $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}[[z,z^{-1}]]$ の元を成分とする行列である．$W^{(r)}(z)$ の (i,j) 成分を $W^{(r)}_{i,j}(z)$ とし，$W^{(r)}_{i,j}(z)$ の z^{-m-r} の係数を $W^{(r)}_{i,j}(m)$ $(m\in\mathbb{Z})$ とする．まとめると

$$W^{(r)}(z)=\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} W^{(r)}_{i,j}(m)z^{-m-r}\right)_{i,j=1,\dots,n}$$

である．

定義 2.2.1 $W_{i,j}^{(r)}(m)$ $(i,j=1,\dots,n$ および $r=1,\dots,l$ および $m\in\mathbb{Z})$ によって位相的に生成される $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\mathrm{comp}}^{\otimes l}$ の部分代数を $\mathcal{W}_l$ とする．

$\mathcal{W}_l$ は，l 以外に n と α にも依存するが，記号にはそれを含めないことにする．

例 2.2.2

$$W_{i,j}^{(1)}(m)=\sum_{s=1}^{l}e_{i,j}^{[s]}(m),$$
$$W_{i,j}^{(2)}(m)=\sum_{\substack{m_1,m_2\in\mathbb{Z}\\ m_1+m_2=m}}\sum_{1\le s_1<s_2\le l}\sum_{a=1}^{n}e_{i,a}^{[s_1]}(m_1)e_{a,j}^{[s_2]}(m_2)-(m+1)\alpha\sum_{s=1}^{l}(l-s)e_{i,j}^{[s]}(m)$$

である．$r=1$ の生成元 $W_{i,j}^{(1)}(m)$ $(i,j=1,\dots,n$ および $m\in\mathbb{Z})$ はアファイン Lie 代数を生成する．特に，$l=1$ のとき
$$\mathcal{W}_1=U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)_{\mathrm{comp}}$$
である．

また，$n=1$ のとき $\mathcal{W}_l$ はプリンシパル W 代数と呼ばれる（正確にはプリンシパル W 代数を Heisenberg 代数の中に実現したもの）．但し，主結果では $n\geq 3$ とするので，プリンシパル W 代数は対象外である（$n=1$ の場合は Schiffmann-Vasserot の論文 [SV] を見てください）．

次の命題 2.2.3 は，アファインヤンギアンから長方形 W 代数への代数射が $\alpha\neq 0$ のとき全射であることを示すのに必要になる．

命題 2.2.3（上田 [U] Appendix） $n\geq 2$ とする．$\alpha\neq 0$ のとき，$\mathcal{W}_l$ は $W_{i,j}^{(1)}(m)$ と $W_{i,j}^{(2)}(m)$ $(i,j=1,\dots,n$ および $m\in\mathbb{Z})$ によって位相的に生成される．

注意 2.2.4（パラメータ α についてのコメント） $\alpha=0$ のとき，$\mathcal{W}_l$ の生成元の形は $\alpha\neq 0$ に較べてずっと簡単になる．$\alpha=0$ はレベル $k=n-N$ に対応している．これは，$n=1$ のプリンシパル W 代数の場合には self-dual レベルと呼ばれている値である．$n=1$ かつ $l=2$ のとき，$\mathcal{W}_2$ は Virasoro 代数と Heisenberg 代数のテンソル積で，この場合 $\alpha=0$ は Virasoro の中心電荷 1 に対応する．

2.3 本来の長方形 W 代数との関係

$\mathcal{W}_l$ と本来の長方形 W 代数との関係を述べる．まず，本来の長方形 W 代数は頂点代数である．$N = ln$ とする．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N, \quad f = \begin{bmatrix} O & & & & O \\ I_n & O & & & \\ & I_n & \ldots & & \\ & & & O & \\ O & & & I_n & O \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}$$

のペアおよび複素数 k から BRST 複体をつくり，その 0 次コホモロジーをとることで頂点代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ が定義される（[FF, KRW]）．正確には，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_N$ の中心 $\mathfrak{z}_N = \mathbb{C}I_N$ が定める Heisenberg 代数の部分のレベルを指定する必要があり，ここでは

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = \mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_N, f) \otimes V^{k+N}(\mathfrak{z}_N) \tag{2.3.1}$$

となるようにする．$V^{k+N}(\mathfrak{z}_N)$ はレベル $k+N$ の Heisenberg 頂点代数である．2.1 節と同様にレベルをずらしている．

ここでは頂点代数の定義はしないが，頂点代数 V に対してそのカレント代数 $\mathfrak{U}(V)$ という位相的に完備な結合代数を定義できることに注意する（[A, Section 3.11]）．頂点代数の表現（加群）とはそのカレント代数の表現（加群）と同じことである．

$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の話にもどる．$V^\alpha(\mathfrak{sl}_n)$ をレベル α の普遍アファイン頂点代数とし，$V^{\alpha+n}(\mathfrak{z}_n)$ をレベル $\alpha + n$ の Heisenberg 頂点代数とすると，

$$\nu\colon \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \to \Big(V^\alpha(\mathfrak{sl}_n) \otimes V^{\alpha+n}(\mathfrak{z}_n)\Big)^{\otimes l}$$

という頂点代数の単射代数射が存在する．ν を Miura 写像と呼ぶ．そのカレント代数版

$$\nu\colon \mathfrak{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \to \mathfrak{U}\left(\Big(V^\alpha(\mathfrak{sl}_n) \otimes V^{\alpha+n}(\mathfrak{z}_n)\Big)^{\otimes l}\right) \cong U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$$

も同じ記号 ν で表す．

定理 2.3.1（荒川-Molev [AM] Corollary 3.2） Miura 写像 $\nu\colon \mathfrak{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \to U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$ の像は $\mathcal{W}_l$ と一致する．

定理 2.3.1 によって $\mathcal{W}_l$ を $\mathfrak{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f))$ と同一視し，（やや不正確だが）以下では長方形 W 代数と呼ぶ．この代数とアファインヤンギアンを関連付けることが目標である．

2.4 放物誘導

長方形 W 代数の放物誘導について述べる．この操作は，アファインヤンギアンのテンソル積表現に対応する（系 4.3.1）．

l_1, l_2 を $l = l_1 + l_2$ を満たす 1 以上の整数とする．それぞれに対して長方形 W 代数 $\mathcal{W}_{l_1}, \mathcal{W}_{l_2}$ が定義される．$\mathcal{W}_{l_1}, \mathcal{W}_{l_2}$ はそれぞれ $U(\hat{\mathfrak{gl}}^{\alpha}_n)^{\otimes l_1}_{\mathrm{comp}}, U(\hat{\mathfrak{gl}}^{\alpha}_n)^{\otimes l_2}_{\mathrm{comp}}$ の部分代数なので，$\mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\mathrm{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$ は $U(\hat{\mathfrak{gl}}^{\alpha}_n)^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$ の部分代数となる．2.2 節で述べた長方形 W 代数の生成元の記述から，$\mathcal{W}_l$ は $\mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\mathrm{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$ に含まれることがわかる．この包含写像を

$$\Delta_{l_1,l_2} \colon \mathcal{W}_l \to \mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\mathrm{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$$

と表す．$\mathcal{W}_{l_1}$ の表現 M_1 と $\mathcal{W}_{l_2}$ の表現 M_2 が与えられれば，Δ_{l_1,l_2} を通じて $M_1 \otimes M_2$ は $\mathcal{W}_l$ の表現となる．この操作を長方形 W 代数の表現の放物誘導と呼ぶ．

より一般に，$l = l_1 + \cdots + l_m$ と m 個の 1 以上の整数の和に分けた場合も，同様に

$$\Delta_{l_1,\ldots,l_m} \colon \mathcal{W}_l \to \mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\mathrm{comp}} \cdots \otimes_{\mathrm{comp}} \mathcal{W}_{l_m}$$

という包含写像を得る．$\mathcal{W}_1$ は $U(\hat{\mathfrak{gl}}^{\alpha}_n)_{\mathrm{comp}}$ であるから，一番細かく分けた場合の $\Delta_{1,\ldots,1}$ が Miura 写像

$$\nu \colon \mathfrak{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \cong \mathcal{W}_l \subset U(\hat{\mathfrak{gl}}^{\alpha}_n)^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$$

に対応している．

より一般の W 代数の放物誘導については，元良 [Ge] の結果がある．

3 アファインヤンギアン

3.1 アファインヤンギアンの定義関係式

これ以降，$n \geq 3$ を仮定する．a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき} \\ -1 & i = j \pm 1 \mod n \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定める．$(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ は $A^{(1)}_{n-1}$ 型 Cartan 行列である．但し，通常 0 と書く添字をここでは n とした．

定義 3.1.1　アファインヤンギアン $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ はパラメータ $\hbar, \varepsilon \in \mathbb{C}$ を持ち，次の生成元と関係式で定義される $\mathbb{C}$ 上の結合代数である．

生成元：$E_i^{(r)}$, $F_i^{(r)}$, $H_i^{(r)}$ $(i=1,\dots,n$ および $r\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$

定義関係式：すべての i,j について

$$
\begin{aligned}
&[H_i^{(r)},H_j^{(s)}]=0,\\
&[E_i^{(r)},F_j^{(s)}]=\delta_{ij}H_i^{(r+s-1)},\\
&[H_i^{(1)},E_j^{(s)}]=a_{ij}E_j^{(s)},\quad [H_i^{(1)},F_j^{(s)}]=-a_{ij}F_j^{(s)};
\end{aligned}
$$

$i\neq j,j\pm 1 \mod n$ について

$$
[H_i^{(r)},E_j^{(s)}]=0,\quad [H_i^{(r)},F_j^{(s)}]=0,\quad [E_i^{(r)},E_j^{(s)}]=0,\quad [F_i^{(r)},F_j^{(s)}]=0;
$$

$i=j\pm 1 \mod n$ について

$$
\begin{aligned}
&[E_i^{(r_1)},[E_i^{(r_2)},E_j^{(s)}]]+[E_i^{(r_2)},[E_i^{(r_1)},E_j^{(s)}]]=0,\\
&[F_i^{(r_1)},[F_i^{(r_2)},F_j^{(s)}]]+[F_i^{(r_2)},[F_i^{(r_1)},F_j^{(s)}]]=0;
\end{aligned}
$$

すべての i について

$$
\begin{aligned}
&[H_i^{(r+1)},E_i^{(s)}]-[H_i^{(r)},E_i^{(s+1)}]=\hbar\left(H_i^{(r)}E_i^{(s)}+E_i^{(s)}H_i^{(r)}\right),\\
&[H_i^{(r+1)},F_i^{(s)}]-[H_i^{(r)},F_i^{(s+1)}]=-\hbar\left(H_i^{(r)}F_i^{(s)}+F_i^{(s)}H_i^{(r)}\right),\\
&[E_i^{(r+1)},E_i^{(s)}]-[E_i^{(r)},E_i^{(s+1)}]=\hbar\left(E_i^{(r)}E_i^{(s)}+E_i^{(s)}E_i^{(r)}\right),\\
&[F_i^{(r+1)},F_i^{(s)}]-[F_i^{(r)},F_i^{(s+1)}]=-\hbar\left(F_i^{(r)}F_i^{(s)}+F_i^{(s)}F_i^{(r)}\right);
\end{aligned}
$$

$i\neq n$ について

$$
\begin{aligned}
&[H_i^{(r+1)},E_{i+1}^{(s)}]-[H_i^{(r)},E_{i+1}^{(s+1)}]=-\hbar H_i^{(r)}E_{i+1}^{(s)},\\
&[H_i^{(r+1)},F_{i+1}^{(s)}]-[H_i^{(r)},F_{i+1}^{(s+1)}]=\hbar F_{i+1}^{(s)}H_i^{(r)},\\
&[H_{i+1}^{(r+1)},E_i^{(s)}]-[H_{i+1}^{(r)},E_i^{(s+1)}]=-\hbar E_i^{(s)}H_{i+1}^{(r)},\\
&[H_{i+1}^{(r+1)},F_i^{(s)}]-[H_{i+1}^{(r)},F_i^{(s+1)}]=\hbar H_{i+1}^{(r)}F_i^{(s)},\\
&[E_i^{(r+1)},E_{i+1}^{(s)}]-[E_i^{(r)},E_{i+1}^{(s+1)}]=-\hbar E_i^{(r)}E_{i+1}^{(s)},\\
&[F_{i+1}^{(r+1)},F_i^{(s)}]-[F_{i+1}^{(r)},F_i^{(s+1)}]=\hbar F_{i+1}^{(r)}F_i^{(s)};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[H_n^{(r+1)},E_1^{(s)}]-[H_n^{(r)},E_1^{(s+1)}]=-\hbar H_n^{(r)}E_1^{(s)}+(n\hbar+\varepsilon)[H_n^{(r)},E_1^{(s)}],\\
&[H_n^{(r+1)},F_1^{(s)}]-[H_n^{(r)},F_1^{(s+1)}]=\hbar F_1^{(s)}H_n^{(r)}-(n\hbar+\varepsilon)[F_1^{(s)},H_n^{(r)}],\\
&[H_1^{(r+1)},E_n^{(s)}]-[H_1^{(r)},E_n^{(s+1)}]=-\hbar E_n^{(s)}H_1^{(r)}+(n\hbar+\varepsilon)[E_n^{(s)},H_1^{(r)}],\\
&[H_1^{(r+1)},F_n^{(s)}]-[H_1^{(r)},F_n^{(s+1)}]=\hbar H_1^{(r)}F_n^{(s)}-(n\hbar+\varepsilon)[H_1^{(r)},F_n^{(s)}],\\
&[E_n^{(r+1)},E_1^{(s)}]-[E_n^{(r)},E_1^{(s+1)}]=-\hbar E_n^{(r)}E_1^{(s)}+(n\hbar+\varepsilon)[E_n^{(r)},E_1^{(s)}],\\
&[F_1^{(r+1)},F_n^{(s)}]-[F_1^{(r)},F_n^{(s+1)}]=\hbar F_1^{(r)}F_n^{(s)}-(n\hbar+\varepsilon)[F_1^{(r)},F_n^{(s)}]
\end{aligned}
\tag{3.1.1}
$$

$Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ は，アファイン Lie 代数の普遍包絡代数 $U(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ とヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ を部分代数として含む．より正確に言うと，$r=1$ に対する生成元 $E_i^{(1)}$, $F_i^{(1)}$, $H_i^{(1)}$ $(i=1,\dots,n)$ は $U(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ と同型な部分代数を生成し，$i \neq n$ に対する生成元 $E_i^{(r)}$, $F_i^{(r)}$, $H_i^{(r)}$ $(i=1,\dots,n-1$ および $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ は $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ と同型な部分代数を生成する．但し，自然な代数射が同型であることは [Gu2, Theorem 6.1], [GRW, Theorem 6.9] の PBW 型定理から従う．

以下では，$e_{i,j}(m)=e_{i,j}t^m$ などの $\hat{\mathfrak{sl}}_n$ の元と，対応する $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の元を同じ記号で表す．

注意 3.1.2 **(パラメータについてのコメント)**　後で述べる定理 3.2.2（evaluation 写像の存在）は，アファインヤンギアンの二つのパラメータ $\hbar,\varepsilon$ とアファイン Lie 代数のレベル α の間に

$$\alpha+n=-\frac{\varepsilon}{\hbar}$$

という条件を課すときに成立する．この条件について以下のことが観察される：まず $\alpha=0$ は，アファインヤンギアンでは $n\hbar+\varepsilon=0$ に対応する．このとき定義関係式 (3.1.1) の右辺の余計な項がなくなって少し簡単になる．また，$\alpha=-n$（クリティカルレベル）はアファインヤンギアンでは $\varepsilon=0$ に対応する．

注意 3.1.3　定義 3.1.1 では，生成元の取り方を [KU, Definition 6.1] とは少し変えたため，定義関係式が一見異なっている（Guay の [Gu1, Definition 3.3], [Gu2, Definition 2.3] とも違う）．定義を変えたので，定理 3.2.2 の evaluation 写像の式が少しだけ短くなった．

[KU] でのアファインヤンギアンの生成元の記号は $X_{i,r}^+$, $X_{i,r}^-$, $H_{i,r}$ $(i=0,1,\dots,n-1$ および $r\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$ である．次のように生成元の母函数を定義する．

$$E_i(z)=\hbar\sum_{r\geq 1}E_i^{(r)}z^{-r},\quad F_i(z)=\hbar\sum_{r\geq 1}F_i^{(r)}z^{-r},\quad H_i(z)=1+\hbar\sum_{r\geq 1}H_i^{(r)}z^{-r},$$

$$X_i^+(z)=\hbar\sum_{r\geq 0}X_{i,r}^+z^{-r-1},\quad X_i^-(z)=\hbar\sum_{r\geq 0}X_{i,r}^-z^{-r-1},\quad H_i'(z)=1+\hbar\sum_{r\geq 0}H_{i,r}z^{-r-1}$$

[KU] の生成元との関係は次で与えられる．$i=1,\dots,n-1$ について

$$E_i(z)=X_i^+\left(z-\frac{i}{2}\hbar\right),\quad F_i(z)=X_i^-\left(z-\frac{i}{2}\hbar\right),\quad H_i(z)=H_i'\left(z-\frac{i}{2}\hbar\right);$$

$$E_n(z)=X_0^+\left(z-(n\hbar+\varepsilon)\right),\ F_n(z)=X_0^-\left(z-(n\hbar+\varepsilon)\right),\ H_n(z)=H_0'\left(z-(n\hbar+\varepsilon)\right)$$

アファインヤンギアンからの代数射を定義に従って構成しようとすると，定義関係式をすべて確かめる必要があり，大変である（というか，不可能なこともある）．しかし，Guay [Gu2], Guay-中島-Wendlandt [GNW] による次の定理があるため，実際には $r=1,2$ に対する生成元の間の関係式だけを確かめればよい．

定理 3.1.4（Guay [Gu2] Proposition 2.1, Guay-**中島**-Wendlandt [GNW] Theorem 2.13, Section 7） $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ は，$E_i^{(1)}$, $E_i^{(2)}$, $F_i^{(1)}$, $F_i^{(2)}$, $H_i^{(1)}$, $H_i^{(2)}$ $(i=1,\ldots,n)$ を生成元とし，次の関係式で定義される $\mathbb{C}$ 代数と同型である．

すべての i,j について

$$\begin{aligned}
&[H_i^{(1)},H_j^{(1)}]=0, \qquad [H_i^{(2)},H_j^{(1)}]=0, \qquad [H_i^{(2)},H_j^{(2)}]=0,\\
&[E_i^{(1)},F_j^{(1)}]=\delta_{ij}H_i^{(1)}, \qquad [E_i^{(2)},F_j^{(1)}]=\delta_{ij}H_i^{(2)},\\
&[H_i^{(1)},E_j^{(1)}]=a_{ij}E_j^{(1)}, \qquad [H_i^{(1)},F_j^{(1)}]=-a_{ij}F_j^{(1)};
\end{aligned}$$

$i\neq j, j\pm 1 \mod n$ について

$$\begin{aligned}
&[H_i^{(2)},E_j^{(1)}]=0, \qquad [H_i^{(2)},F_j^{(1)}]=0,\\
&[E_i^{(1)},E_j^{(1)}]=0, \qquad [F_i^{(1)},F_j^{(1)}]=0,\\
&[E_i^{(2)},E_j^{(1)}]=[E_i^{(1)},E_j^{(2)}], \qquad [F_i^{(2)},F_j^{(1)}]=[F_i^{(1)},F_j^{(2)}];
\end{aligned}$$

$i=j\pm 1 \mod n$ について

$$[E_i^{(1)},[E_i^{(1)},E_j^{(1)}]]=0, \qquad [F_i^{(1)},[F_i^{(1)},F_j^{(1)}]]=0;$$

すべての i について

$$\begin{aligned}
&[\widetilde{H}_i^{(2)},E_i^{(1)}]=2E_i^{(2)}, \qquad [\widetilde{H}_i^{(2)},F_i^{(1)}]=-2F_i^{(2)},\\
&[E_i^{(2)},E_i^{(1)}]=\hbar\left(E_i^{(1)}\right)^2, \qquad [F_i^{(2)},F_i^{(1)}]=-\hbar\left(F_i^{(1)}\right)^2;
\end{aligned}$$

$i\neq n$ について

$$\begin{aligned}
&[\widetilde{H}_i^{(2)},E_{i+1}^{(1)}]=-E_{i+1}^{(2)}+\frac{\hbar}{2}E_{i+1}^{(1)}, \qquad [\widetilde{H}_i^{(2)},F_{i+1}^{(1)}]=F_{i+1}^{(2)}-\frac{\hbar}{2}F_{i+1}^{(1)},\\
&[\widetilde{H}_{i+1}^{(2)},E_i^{(1)}]=-E_i^{(2)}-\frac{\hbar}{2}E_i^{(1)}, \qquad [\widetilde{H}_{i+1}^{(2)},F_i^{(1)}]=F_i^{(2)}+\frac{\hbar}{2}F_i^{(1)},\\
&[E_i^{(2)},E_{i+1}^{(1)}]-[E_i^{(1)},E_{i+1}^{(2)}]=-\hbar E_i^{(1)}E_{i+1}^{(1)},\\
&[F_{i+1}^{(2)},F_i^{(1)}]-[F_{i+1}^{(1)},F_i^{(2)}]=\hbar F_{i+1}^{(1)}F_i^{(1)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[\widetilde{H}_n^{(2)},E_1^{(1)}]=-E_1^{(2)}+\Big(\frac{\hbar}{2}-(n\hbar+\varepsilon)\Big)E_1^{(1)}, \quad [\widetilde{H}_n^{(2)},F_1^{(1)}]=F_1^{(2)}-\Big(\frac{\hbar}{2}-(n\hbar+\varepsilon)\Big)F_1^{(1)},\\
&[\widetilde{H}_1^{(2)},E_n^{(1)}]=-E_n^{(2)}-\Big(\frac{\hbar}{2}-(n\hbar+\varepsilon)\Big)E_n^{(1)}, \quad [\widetilde{H}_1^{(2)},F_n^{(1)}]=F_n^{(2)}+\Big(\frac{\hbar}{2}-(n\hbar+\varepsilon)\Big)F_n^{(1)},\\
&[E_n^{(2)},E_1^{(1)}]-[E_n^{(1)},E_1^{(2)}]=-\hbar E_n^{(1)}E_1^{(1)}+(n\hbar+\varepsilon)[E_n^{(1)},E_1^{(1)}],\\
&[F_1^{(2)},F_n^{(1)}]-[F_1^{(1)},F_n^{(2)}]=\hbar F_1^{(1)}F_n^{(1)}-(n\hbar+\varepsilon)[F_1^{(1)},F_n^{(1)}]
\end{aligned}$$

但し

$$\widetilde{H}_i^{(2)}=H_i^{(2)}-\frac{\hbar}{2}\Big(H_i^{(1)}\Big)^2$$

とする．

注意 3.1.5　[GNW, Theorem 2.13] には

$$[E_i^{(1)}, F_j^{(2)}] = \delta_{ij} H_i^{(2)}, \quad [H_i^{(1)}, E_j^{(2)}] = a_{ij} E_j^{(2)}, \quad [H_i^{(1)}, F_j^{(2)}] = -a_{ij} F_j^{(2)}$$

に相当する関係式も書いてあるが，これらは他の関係式から出る（[K1, Lemma 2.3, 2.4]）.

以降では $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の完備化も必要になる．$Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ の次数付けを

$$\deg E_n^{(r)} = 1, \quad \deg F_n^{(r)} = -1, \quad \text{他の生成元は次数 } 0$$

で定め，完備化を $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathrm{comp}}$ と表す．同様に，テンソル積 $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)^{\otimes l}$ の次数に関する完備化を $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$ と表す.

この次数付けは，アファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_n$ のループ部分による次数付けと整合的である．ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ と同型な部分代数は次数 0 部分に含まれる.

3.2　余積と evaluation 写像

余積と evaluation 写像を導入する．4.1 節でこれらを組み合わせて代数射を構成する．まず余積である．$\square(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ という記号を使う.

定理 3.2.1（Guay [Gu2] Section 6, pp. 462, Guay-中島-Wendlandt [GNW] Definition 4.6, Theorem 4.9, Proposition 5.18, Section 7, Proposition 4.24）　次を満たす代数射 $\Delta\colon Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n) \to Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)^{\otimes 2}_{\mathrm{comp}}$ が存在する.

すべての i について

$$\Delta(E_i^{(1)}) = \square(E_i^{(1)}), \qquad \Delta(F_i^{(1)}) = \square(F_i^{(1)}), \qquad \Delta(H_i^{(1)}) = \square(H_i^{(1)});$$

$i = 1, \dots, n-1$ について

(3.2.1)

$$\begin{aligned}\Delta(E_i^{(2)}) = \square(E_i^{(2)}) + \hbar\Bigg(&\sum_{a=1}^{i} e_{a,i+1} \otimes e_{i,a} - \sum_{a=i+1}^{n} e_{i,a} \otimes e_{a,i+1} \\ &+ \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^{n} \Big(e_{a,i+1}(m) \otimes e_{i,a}(-m) - e_{i,a}(m) \otimes e_{a,i+1}(-m) \Big) \Bigg),\end{aligned}$$

(3.2.2)

$$\begin{aligned}\Delta(F_i^{(2)}) = \square(F_i^{(2)}) + \hbar\Bigg(&\sum_{a=1}^{i} e_{a,i} \otimes e_{i+1,a} - \sum_{a=i+1}^{n} e_{i+1,a} \otimes e_{a,i} \\ &+ \sum_{m \geq 1} \sum_{a=1}^{n} \Big(e_{a,i}(m) \otimes e_{i+1,a}(-m) - e_{i+1,a}(m) \otimes e_{a,i}(-m) \Big) \Bigg),\end{aligned}$$

(3.2.3)

$$\Delta(H_i^{(2)}) = \square(H_i^{(2)}) + \hbar\Bigg(- e_{i,i}\otimes e_{i+1,i+1} - e_{i+1,i+1}\otimes e_{i,i}$$

$$+ \sum_{a=1}^{i}\Big(e_{a,i}\otimes e_{i,a} - e_{a,i+1}\otimes e_{i+1,a}\Big) - \sum_{a=i+1}^{n}\Big(e_{i,a}\otimes e_{a,i} - e_{i+1,a}\otimes e_{a,i+1}\Big)$$

$$+ \sum_{m\geq 1}\sum_{a=1}^{n}\Big(e_{a,i}(m)\otimes e_{i,a}(-m) - e_{a,i+1}(m)\otimes e_{i+1,a}(-m)$$

$$- e_{i,a}(m)\otimes e_{a,i}(-m) + e_{i+1,a}(m)\otimes e_{a,i+1}(-m)\Big)\Bigg);$$

$$\Delta(E_n^{(2)}) = \square(E_n^{(2)}) + \hbar\Bigg(e_{n,1}(1)\otimes c$$

$$+ \sum_{m\geq 0}\sum_{a=1}^{n}\Big(e_{a,1}(m+1)\otimes e_{n,a}(-m) - e_{n,a}(m+1)\otimes e_{a,1}(-m)\Big)\Bigg),$$

$$\Delta(F_n^{(2)}) = \square(F_n^{(2)}) + \hbar\Bigg(c\otimes e_{1,n}(-1)$$

$$+ \sum_{m\geq 0}\sum_{a=1}^{n}\Big(e_{a,n}(m)\otimes e_{1,a}(-m-1) - e_{1,a}(m)\otimes e_{a,n}(-m-1)\Big)\Bigg),$$

$$\Delta(H_n^{(2)}) = \square(H_n^{(2)})$$

$$+\hbar\Bigg(- e_{n,n}\otimes e_{1,1} - e_{1,1}\otimes e_{n,n} + e_{n,n}\otimes c + c\otimes e_{n,n} - e_{1,1}\otimes c - c\otimes e_{1,1} + c\otimes c$$

$$+ \sum_{m\geq 0}\sum_{a=1}^{n}\Big(e_{a,n}(m)\otimes e_{n,a}(-m) - e_{a,1}(m+1)\otimes e_{1,a}(-m-1)$$

$$- e_{n,a}(m+1)\otimes e_{a,n}(-m-1) + e_{1,a}(m)\otimes e_{a,1}(-m)\Big)\Bigg)$$

さらに Δ は余結合律 $(\Delta\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = (\mathrm{id}\otimes\Delta)\circ\Delta$ を満たす.

次に evaluation 写像を導入する.

定理 3.2.2 (Guay [Gu2] Section 6, pp. 462–463, **小寺** [K1] Theorem 3.8)　パラメータの条件 $\alpha + n = -\varepsilon/\hbar$ の下で，次を満たす代数射 $\mathrm{ev}\colon Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n) \to U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^{\alpha})_{\mathrm{comp}}$ が存在する.

$i = 1,\ldots,n-1$ について

$$\mathrm{ev}(E_i^{(1)}) = e_{i,i+1}, \qquad \mathrm{ev}(F_i^{(1)}) = e_{i+1,i}, \qquad \mathrm{ev}(H_i^{(1)}) = e_{i,i} - e_{i+1,i+1};$$

$$\mathrm{ev}(E_n^{(1)}) = e_{n,1}(1), \qquad \mathrm{ev}(F_n^{(1)}) = e_{1,n}(-1), \qquad \mathrm{ev}(H_n^{(1)}) = e_{n,n} - e_{1,1} + \alpha;$$

$i=1,\dots,n-1$ について

$$\mathrm{ev}(E_i^{(2)})=\hbar\Bigg(\sum_{a=1}^{i}e_{i,a}e_{a,i+1}+\sum_{m\geq 1}\sum_{a=1}^{n}e_{i,a}(-m)e_{a,i+1}(m)\Bigg), \tag{3.2.4}$$

$$\mathrm{ev}(F_i^{(2)})=\hbar\Bigg(\sum_{a=1}^{i}e_{i+1,a}e_{a,i}+\sum_{m\geq 1}\sum_{a=1}^{n}e_{i+1,a}(-m)e_{a,i}(m)\Bigg), \tag{3.2.5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}(H_i^{(2)})=\hbar\Bigg(&-e_{i,i}e_{i+1,i+1}+\sum_{a=1}^{i}\Big(e_{i,a}e_{a,i}-e_{i+1,a}e_{a,i+1}\Big)\\&+\sum_{m\geq 1}\sum_{a=1}^{n}\Big(e_{i,a}(-m)e_{a,i}(m)-e_{i+1,a}(-m)e_{a,i+1}(m)\Big)\Bigg);\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$\mathrm{ev}(E_n^{(2)})=\hbar\sum_{m\geq 0}\sum_{a=1}^{n}e_{n,a}(-m)e_{a,1}(m+1),$$

$$\mathrm{ev}(F_n^{(2)})=\hbar\sum_{m\geq 0}\sum_{a=1}^{n}e_{1,a}(-m-1)e_{a,n}(m),$$

$$\mathrm{ev}(H_n^{(2)})=\hbar\Bigg(-e_{n,n}(e_{1,1}-\alpha)+\sum_{m\geq 0}\sum_{a=1}^{n}\Big(e_{n,a}(-m)e_{a,n}(m)-e_{1,a}(-m-1)e_{a,1}(m+1)\Big)\Bigg)$$

注意 3.2.3 ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ の余積および evaluation 写像と，定理 3.2.1 および定理 3.2.2 との関係についてコメントする．

定理 3.2.1 の余積 Δ を $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ と同型な部分代数に制限したものは, $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ の余積とは**一致しない**．そもそも，像が $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)^{\otimes 2}$ に入らない．しかし，$i\neq n$ かつ $r=2$ の式 (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) のループの次数が 0 の部分を取り出したものは，$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ の余積 Δ_{fin} の式に一致する．Δ_{fin} は次のようになる．

$$\Delta_{\mathrm{fin}}\colon Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)\to Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)^{\otimes 2},$$

$$\Delta_{\mathrm{fin}}(E_i^{(2)})=\square(E_i^{(2)})+\hbar\Bigg(\sum_{a=1}^{i}e_{a,i+1}\otimes e_{i,a}-\sum_{a=i+1}^{n}e_{i,a}\otimes e_{a,i+1}\Bigg),$$

$$\Delta_{\mathrm{fin}}(F_i^{(2)})=\square(F_i^{(2)})+\hbar\Bigg(\sum_{a=1}^{i}e_{a,i}\otimes e_{i+1,a}-\sum_{a=i+1}^{n}e_{i+1,a}\otimes e_{a,i}\Bigg),$$

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathrm{fin}}(H_i^{(2)})=\square(H_i^{(2)})+\hbar\Bigg(&-e_{i,i}\otimes e_{i+1,i+1}-e_{i+1,i+1}\otimes e_{i,i}\\&+\sum_{a=1}^{i}\Big(e_{a,i}\otimes e_{i,a}-e_{a,i+1}\otimes e_{i+1,a}\Big)-\sum_{a=i+1}^{n}\Big(e_{i,a}\otimes e_{a,i}-e_{i+1,a}\otimes e_{a,i+1}\Big)\Bigg)\end{aligned}$$

但し，上の式では $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ の生成元をアファインヤンギアンと同じ記号を使って書いた．

evaluation 写像についても同様である．定理 3.2.2 の代数射 ev を $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ と同型な部分代数に制限したものは，$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ の evaluation 写像とは**一致しない**が，式 (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) のループの次数が 0 の部分を取り出すと，$Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ の evaluation 写像 $\mathrm{ev}_{\mathrm{fin}}$ の式に一致する．すなわち

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{fin}}\colon Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n),$$

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{fin}}(E_i^{(2)}) = \hbar\sum_{a=1}^{i} e_{i,a}e_{a,i+1}, \qquad \mathrm{ev}_{\mathrm{fin}}(F_i^{(2)}) = \hbar\sum_{a=1}^{i} e_{i+1,a}e_{a,i},$$

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{fin}}(H_i^{(2)}) = \hbar\Bigg(-e_{i,i}e_{i+1,i+1} + \sum_{a=1}^{i}\Big(e_{i,a}e_{a,i} - e_{i+1,a}e_{a,i+1}\Big)\Bigg)$$

である．

4 アファインヤンギアンと長方形 W 代数

4.1 主結果：代数射の構成

W 代数のレベル k とパラメータ α との関係は $\alpha = k + N - n$ だった．さらに，アファインヤンギアンの evaluation 写像を定義するための関係式 $\alpha + n = -\varepsilon/\hbar$ を課す．従って

$$k + N = \alpha + n = -\varepsilon/\hbar$$

である．

$\beta \in \mathbb{C}$ に対して $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)$ の代数自己同型射 η_β を

$$e_{i,j}(m) \mapsto e_{i,j}(m) + \delta_{m,0}\delta_{i,j}\beta \tag{4.1.1}$$

で定義する．さらに $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$ の代数自己同型射 $\eta^{(l)}$ を

$$\eta^{(l)} = \eta_{(l-1)\alpha} \otimes \eta_{(l-2)\alpha} \otimes \cdots \otimes \eta_\alpha \otimes \mathrm{id}$$

で定義する．$\Delta^{l-1}\colon Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathrm{comp}} \to Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$ を

$$\Delta^0 = \mathrm{id}, \qquad \Delta^1 = \Delta, \qquad \Delta^{l-1} = (\Delta \otimes \mathrm{id}^{\otimes l-2}) \circ \Delta^{l-2}$$

で定義する．

定義 4.1.1

$$\Phi_l = \eta^{(l)} \circ \mathrm{ev}^{\otimes l} \circ \Delta^{l-1}$$

と定義する．Φ_l は $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathrm{comp}}$ から $U(\hat{\mathfrak{gl}}_n^\alpha)^{\otimes l}_{\mathrm{comp}}$ への代数射である．

次が主定理である．

定理 4.1.2（**小寺-上田** [KU] Theorem 9.2） Φ_l の像は $\mathcal{W}_l$ に含まれる．つまり，Φ_l は $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathrm{comp}}$ から $\mathcal{W}_l$ への代数射を定める．さらに $\alpha = k + N - n \neq 0$ ならば Φ_l は全射である．

系 4.1.3（**小寺-上田** [KU] Corollary 9.4） $M = \bigoplus_{\gamma\in\mathbb{C}} M_\gamma$ を次数付き $\mathcal{W}_l$ 加群で，各 γ に対して十分大きな $d \in \mathbb{Z}$ をとれば $M_{\gamma+d} = 0$ となるものとする．このとき Φ_l を通じて M は $Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)$ 加群となる．さらに，各 M_γ は $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_n)$ 加群となる．

4.2 長方形 W 代数の可換部分代数

主結果である定理 4.1.2 により，$\Phi_l(H_i^{(r)})$ $(i = 1,\dots,n$ および $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ は $\mathcal{W}_l$ の可換部分代数を生成する．これは $U(\mathfrak{gl}_n)$ の Gelfand-Zetlin 代数の類似物である．

この可換部分代数の元の具体的な表示は，$r = 1, 2$ の部分以外はわかっていない．$r = 1$ の部分は簡単である．以下で $r = 2$ の場合を紹介する．$\mathcal{W}_l$ の元 D_i $(i = 1,\dots,n)$ を次のように定義する．

$$D_i = W_{i,i}^{(2)}(0) - \left(\sum_{a=1}^{i-1} W_{i,a}^{(1)}(0)W_{a,i}^{(1)}(0) + \sum_{m\geq 1}\sum_{a=1}^{n} W_{i,a}^{(1)}(-m)W_{a,i}^{(1)}(m)\right)$$

次の命題 4.2.1 は，実質的には上田 [U] の主定理の証明中に書いてあるが， [KU] にも再掲した.

命題 4.2.1（**小寺-上田** [KU] Proposition 11.1, Appendix B） D_i と D_j は可換.

$\Phi_l(H_i^{(2)})$ は次のようになる．$i = 1,\dots,n-1$ のとき

$$\Phi_l(H_i^{(2)}) = (-\hbar)\Big(D_i - D_{i+1} - W_{i,i}^{(1)}(0)^2 + W_{i,i}^{(1)}(0)W_{i+1,i+1}^{(1)}(0)\Big);$$

$i = n$ のとき

$$\Phi_l(H_n^{(2)}) = (-\hbar)\times$$
$$\Big(D_n - D_1 - (l-1)\alpha\Big(W_{n,n}^{(1)}(0) - W_{1,1}^{(1)}(0) + l\alpha\Big) - W_{n,n}^{(1)}(0)^2 + W_{n,n}^{(1)}(0)\Big(W_{1,1}^{(1)}(0) - \alpha\Big)\Big)$$

4.3　余積と放物誘導

最後に，アファインヤンギアンの余積と長方形 W 代数の放物誘導との関係を述べる．2.4 節で，包含写像

$$\Delta_{l_1,l_2}\colon \mathcal{W}_l \to \mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\mathrm{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$$

について説明した．余積 Δ との対応を正確に述べるためには，次のように Δ_{l_1,l_2} を少しだけ修正する必要がある．(4.1.1) の自己同型射 η_β ($\beta \in \mathbb{C}$) を使って

$$\widetilde{\Delta}_{l_1,l_2} = (\eta_{-l_2\alpha}^{\otimes l_1} \otimes \mathrm{id}^{\otimes l_2}) \circ \Delta_{l_1,l_2}$$

と定義する．簡単な計算で，$\widetilde{\Delta}_{l_1,l_2}$ は Δ_{l_1,l_2} と同様に $\mathcal{W}_l$ から $\mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\mathrm{comp}} \mathcal{W}_{l_2}$ への単射代数射を定めることがわかる．

系 4.3.1（小寺-上田 [KU] Corollary 10.2）　代数射 $\Phi_l\colon Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathrm{comp}} \to \mathcal{W}_l$ は次の図式を可換にする．

$$\begin{tikzcd}
Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)_{\mathrm{comp}} \arrow[r, "\Phi_l"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{W}_l \arrow[d, "\tilde{\Delta}_{l_1,l_2}"] \\
Y(\hat{\mathfrak{sl}}_n)^{\otimes 2}_{\mathrm{comp}} \arrow[r, "\Phi_{l_1}\otimes\Phi_{l_2}"] & \mathcal{W}_{l_1} \otimes_{\mathrm{comp}} \mathcal{W}_{l_2}
\end{tikzcd}$$

以上より，アファインヤンギアンのテンソル積表現と長方形 W 代数の表現の放物誘導（但し $\widetilde{\Delta}_{l_1,l_2}$ を通じて定義する）とが，代数射 Φ_l を通じて対応することがわかった．

謝辞

筆者は科研費（課題番号：21K03155）のサポートを受けています．

参考文献

[A]　Tomoyuki Arakawa, *Representation theory of $\mathscr{W}$-algebras*, Invent. Math. **169** (2007), no. 2, 219–320.

[AM]　Tomoyuki Arakawa and Alexander Molev, *Explicit generators in rectangular affine $\mathcal{W}$-algebras of type A*, Lett. Math. Phys. **107** (2017), no. 1, 47–59.

[BK]　Jonathan Brundan and Alexander Kleshchev, *Shifted Yangians and finite W-algebras*, Adv. Math. **200** (2006), no. 1, 136–195.

[FF]　Boris Feigin and Edward Frenkel, *Quantization of the Drinfel′d-Sokolov reduction*, Phys. Lett. B **246** (1990), no. 1-2, 75–81.

[Ge] Naoki Genra, *Screening operators and parabolic inductions for affine $\mathcal{W}$-algebras (with an appendix by Shigenori Nakatsuka)*, Adv. Math. **369** (2020), 107179, 62 pages.

[Gu1] Nicolas Guay, *Cherednik algebras and Yangians*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 57, 3551–3593.

[Gu2] ———, *Affine Yangians and deformed double current algebras in type A*, Adv. Math. **211** (2007), no. 2, 436–484.

[GNW] Nicolas Guay, Hiraku Nakajima, and Curtis Wendlandt, *Coproduct for Yangians of affine Kac-Moody algebras*, Adv. Math. **338** (2018), 865–911.

[GRW] Nicolas Guay, Vidas Regelskis, and Curtis Wendlandt, *Vertex representations for Yangians of Kac-Moody algebras*, J. Éc. polytech. Math. **6** (2019), 665–706.

[KRW] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto, *Quantum reduction for affine superalgebras*, Comm. Math. Phys. **241** (2003), no. 2-3, 307–342.

[K1] Ryosuke Kodera, *On Guay's evaluation map for affine Yangians*, Algebr. Represent. Theory **24** (2021), no. 1, 253–267, correction 269–272, arXiv:1806.09884.

[K2] 小寺 諒介, *Affine Yangians and rectangular W-algebras*, 第 66 回代数学シンポジウム報告集 (2021), 238–252.

[KU] Ryosuke Kodera and Mamoru Ueda, *Coproduct for affine Yangians and parabolic induction for rectangular W-algebras*, Lett. Math. Phys. **112** (2022), no. 1, Paper No. 3, 37 pages.

[SV] Olivier Schiffmann and Eric Vasserot, *Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on* $\mathbf{A}^2$, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 213–342.

[U] Mamoru Ueda, *Affine super Yangians and rectangular W-superalgebras*, J. Math. Phys. **63** (2022), no. 5, Paper No. 051701, 34 pages.