2 被約 Schur 関数と Schur の Q 関数に関する予想について

熊本大学大学院先端科学研究部　西山　雄太
Yuta Nishiyama
Faculty of Advanced Science and Technology,
Kumamoto University

1　導入

Korteweg–de Vries (KdV) 方程式は 2 つの変数 t_0, t_1 を持つ未知関数 $u = u(t_0, t_1)$ に関する非線形偏微分方程式

$$u_{t_1} = u_{t_0t_0t_0} + 6uu_{t_0} \tag{1}$$

であり，ソリトン解を持つことが良く知られている（添え字の変数は微分を表す）．さらに KdV 方程式は KdV 方程式系と呼ばれる無限個の微分方程式の系列に属することが知られている．KdV 方程式系は，無限個の変数 $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ を持つ未知関数 $u = u(t)$ に関する方程式系である．また，変形 KdV 方程式

$$v_{t_1} = v_{t_0t_0t_0} - 6v^2 v_{t_0}$$

もソリトン解を持つ非線形偏微分方程式であり，KdV 方程式と同様に変形 KdV 方程式系と呼ばれる系列に属することが知られている．これらの方程式系の解の振る舞いを議論するために，佐藤–毛織 [5] はある対称関数の族を導入した．

中島 [7] は水川裕司，山田裕史との共同研究に基づき，この対称関数の 2 被約 Schur 関数 $S_\lambda(x)$ および Littlewood–Richardon 係数 $c^\lambda_{\mu\nu}$ を用いた表示を与えた．彼らはさらに，この対称関数が Schur の Q 関数 $Q_\lambda(x, x)$ に等しいことを予想している．すなわち，整数

$n \geq 1$ について長さ n 以下の分割全体の集合を $\mathscr{P}^{(n)}$ と書くとき，$\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}$ について

$$\sum_{\mu,\nu \in \mathscr{P}^{(n)}} c^{\lambda}_{\mu\nu} S_{2\mu+\Delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x) = 2^{-n} Q_{2\lambda+2\Delta_n}(x,x),$$
$$\sum_{\mu,\nu \in \mathscr{P}^{(n)}} c^{\lambda}_{\mu\nu} S_{2\mu+\delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x) = 2^{-n} Q_{2\lambda+\Delta_n+\delta_n}(x,x)$$

が成り立つと予想している（それぞれの記号の定義は第 3 節で与える）．中島 [7] はこの予想の $n = 1$ の場合，さらに $n = 2$ かつ $l(\lambda) \leq 1$ の場合の証明を与えている．

本稿では，この予想の一般の場合についての考察を述べ，その後 $n = 2$ の場合の証明を与える．具体的には長さ 2 の分割に対応する Schur の Q 関数の新しい表示を与え，予想を Kostka 行列の逆行列の組合せ論に帰着させる．まず第 2 節および第 3 節で KdV 方程式系および対称多項式（対称関数）に関する事項を述べたのち，第 4 節で佐藤–毛織の導入した対称関数とその理論を紹介する．その後第 5 節で中島らの予想を紹介し，第 6 節および第 7 節でこの予想についての考察および $n = 2$ の場合の証明を与える．なお，本稿の主な内容はプレプリント [3] に基づくものである．

2　KdV 方程式系

この節では，KdV 方程式 (1) を含む微分方程式の系列である KdV 方程式系を，[6] を参考に擬微分作用素を用いて構成する．

無限個の変数 $t = (t_0, t_1, \ldots)$ を用意し，$\partial := \dfrac{\partial}{\partial t_0}$ とおく．

$$\sum_{i=0}^{d} a_i(t)\partial^i, \quad d \geq 0, \quad a_i(t) : t \text{ の関数}$$

の形で表される微分作用素の全体は環をなし，その積は

$$\partial^n \cdot a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (\partial^k a(t)) \partial^{n-k} \quad (n \geq 0)$$

で与えられる．これにならって，

$$\sum_{i=-\infty}^{d} a_i(t)\partial^i, \quad d \in \mathbb{Z}, \quad a_i(t) : t \text{ の関数}$$

の形で表される作用素（擬微分作用素と呼ばれる）を導入し，その積を

$$\partial^n \cdot a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (\partial^k a(t)) \partial^{n-k} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

で定める．ここで

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

である．

t の関数 $u = u(t)$ をとり，この u を用いて微分作用素 $L = \partial^2 + u$ を考える．このとき，

$$(L^{1/2})^2 = L \tag{2}$$

なる擬微分作用素 $L^{1/2}$ が存在する．$L^{1/2} = l_1(t)\partial + l_0(t) + l_{-1}(t)\partial^{-1} + \cdots$ とおくと (2) の両辺の 2 次の係数から $l_1(t) = \pm 1$ がわかり，$l_1(t)$ の符号を選ぶと $l_0(t), l_{-1}(t), \ldots$ が順次求められる．$l_1(t) = 1$ とすると，以下の表示が得られる：

$$L^{1/2} = \partial + \frac{1}{2}u\partial^{-1} - \frac{1}{4}u_{t_0}\partial^{-2} + \left(\frac{1}{8}u_{t_0t_0} - \frac{1}{8}u^2\right)\partial^{-3} + \cdots.$$

さらに，$L^{3/2}, L^{5/2}, \ldots$ が以下のように計算できる：

$$L^{3/2} = L \cdot L^{1/2} = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u_{t_0} + \left(\frac{1}{8}u_{t_0t_0} + \frac{3}{8}u^2\right)\partial^{-1} + \cdots,$$

$$L^{5/2} = L \cdot L^{3/2} = \partial^5 + \frac{5}{2}u\partial^3 + \frac{15}{4}u_{t_0}\partial^2 + \left(\frac{25}{8}u_{t_0t_0} + \frac{15}{8}u^2\right)\partial + \frac{15}{16}u_{t_0t_0t_0} + \frac{15}{8}uu_{t_0} + \cdots.$$

擬微分作用素

$$P = a_d(t)\partial^d + a_{d-1}(t)\partial^{d-1} + \cdots + a_i(t)\partial^i + \cdots$$

について，その微分作用素部分 P_+ を

$$P_+ \coloneqq a_d(t)\partial^d + a_{d-1}(t)\partial^{d-1} + \cdots + a_1(t)\partial + a_0(t)$$

で定める．さらに，微分作用素 A, B について $[A, B] = AB - BA$ と定める．このとき $\dfrac{\partial L}{\partial t_1} = \dfrac{\partial(\partial^2 + u)}{\partial t_1} = u_{t_1}$，$[4(L^{3/2})_+, L] = u_{t_0t_0t_0} + 6uu_{t_0}$ となるから，未知関数 u に関する KdV 方程式 (1) は L に関する Lax 方程式の形で

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = [4(L^{3/2})_+, L]$$

と書き直される．これを KdV 方程式の Lax 表示という．Lax 表示を用いて，KdV 方程式系を

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [4^n(L^{(2n+1)/2})_+, L] \quad (n \geq 0)$$

により定める．KdV 方程式系に属するそれぞれの方程式の具体形を計算すると，

$$\begin{aligned} u_{t_0} &= u_{t_0}, \\ u_{t_1} &= u_{t_0 t_0 t_0} + 6 u u_{t_0}, \\ u_{t_2} &= u_{t_0 t_0 t_0 t_0 t_0} + 10 u u_{t_0 t_0 t_0} + 20 u_{t_0} u_{t_0 t_0} + 30 u^2 u_{t_0}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

を得ることができる．

3 分割と対称関数

この節では，整数の分割や対称多項式（対称関数）に関する用語や記法を（主に [2] に従って）まとめておく．以下，整数 $n \geq 1$ を 1 つ固定して考える．

広義単調減少な正の整数の有限列を分割と呼び，分割全体の集合を $\mathscr{P}$ と書く．$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0$ なる分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in \mathscr{P}$ について，$l(\lambda) := l$ を λ の長さと呼ぶ．また，$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$ を λ の大きさと呼ぶ．長さが n 以下の分割の集合を $\mathscr{P}^{(n)}$，$\lambda_1 \leq n$ なる分割の集合を $\widetilde{\mathscr{P}^{(n)}}$ とおく．$\lambda \in \mathscr{P}$ および $i \geq 1$ について，$m_i(\lambda) := \#\{j \mid \lambda_j = i\}$ を λ における i の重複度と呼ぶ．$\lambda \in \mathscr{P}$ は数列 $(m_1(\lambda), m_2(\lambda), \ldots)$ により一意的に定まるから，これを用いて $\lambda = (1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \cdots)$ のように表記することもある．2 つの分割 $\lambda, \mu \in \mathscr{P}$ について，$\lambda + \mu, \lambda \cup \mu \in \mathscr{P}$ を

$$\lambda + \mu = (\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2, \ldots), \quad \lambda \cup \mu = (1^{m_1(\lambda) + m_1(\mu)} 2^{m_2(\lambda) + m_2(\mu)} \cdots)$$

により定める．また，$\lambda \in \mathscr{P}$ の共役 $\lambda' \in \mathscr{P}$ が $\lambda'_j := \#\{i \mid \lambda_i \geq j\}$ により定まる．さらに，$\Delta_n, \delta_n \in \mathscr{P}^{(n)}$ を

$$\Delta_n = (n, n-1, n-2, \cdots, 2, 1), \quad \delta_n = (n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0)$$

により定める．

さて，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は変数の置換

$$\sigma f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n])$$

によって多項式環 $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に作用する．この作用によって不変な多項式 $f \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ を変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に関する対称多項式と呼び，その全体を Λ_n で表す．n 個の非負整数の組 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ について $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ と書き，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l) \in \mathscr{P}^{(n)}$ について $m_\lambda(x) := \sum_\alpha x^\alpha$ と定め

る．ここで，α は $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l, 0, \ldots, 0) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ の成分を入れ替えて得られる組全てを動く．$m_\lambda(x)$ は（λ に対応する）単項対称多項式と呼ばれ，$\{m_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathscr{P}^{(n)}\}$ は Λ_n の $\mathbb{Q}$-基底をなす．

Λ_n の基底をさらにいくつか導入する．$\lambda \in \mathscr{P}$ について基本対称多項式 $e_\lambda(x)$，冪和対称多項式 $p_\lambda(x)$ が

$$e_\lambda(x) \coloneqq m_{(1^{\lambda_1})}(x) m_{(1^{\lambda_2})}(x) \cdots m_{(1^{\lambda_{l(\lambda)}})}(x),$$

$$p_\lambda(x) \coloneqq m_{(\lambda_1)}(x) m_{(\lambda_2)}(x) \cdots m_{(\lambda_{l(\lambda)})}(x)$$

により定義され，$\{e_\lambda(x) \mid \lambda \in \widetilde{\mathscr{P}^{(n)}}\}$，$\{p_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathscr{P}^{(n)}\}$ はそれぞれ Λ_n の $\mathbb{Q}$-基底をなす（例えば [4, Theorem 5.3.5, 5.3.9] 参照）．

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$ について，交代多項式 $a_\alpha(x)$ を

$$a_\alpha(x) \coloneqq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \sigma(x^\alpha)$$

により定める．これを用いて，$\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}$ について Schur 多項式 $s_\lambda(x) \in \Lambda_n$ が

$$s_\lambda(x) \coloneqq \frac{a_{\lambda+\delta_n}(x)}{a_{\delta_n}(x)}$$

により定まる．このとき，$\{s_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathscr{P}^{(n)}\}$ は Λ_n の $\mathbb{Q}$-基底となっている（例えば [4, Theorem 5.4.4] 参照）．2 つの分割 $\mu, \nu \in \mathscr{P}^{(n)}$ について，$s_\mu(x) s_\nu(x) \in \Lambda_n$ を Schur 多項式の一次結合で表した時に現れる係数を $c^\lambda_{\mu\nu}$ と書き，これを Littlewood–Richardson 係数と呼ぶ：

$$s_\mu(x) s_\nu(x) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}} c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda(x).$$

Schur 多項式を単項対称多項式の一次結合で表した時の係数により，Kostka 行列 $(K_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu \in \mathscr{P}^{(n)}}$ を定める：

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \mathscr{P}^{(n)}} K_{\lambda\mu} m_\mu(x) \qquad (\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}).$$

また，Kostka 行列の逆行列の成分を $K^{-1}_{\lambda\mu}$ で表す：

$$\sum_{\nu \in \mathscr{P}^{(n)}} K_{\lambda\nu} K^{-1}_{\nu\mu} = \sum_{\nu \in \mathscr{P}^{(n)}} K^{-1}_{\lambda\nu} K_{\nu\mu} = \delta_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu \in \mathscr{P}^{(n)}).$$

ただしここで，$\delta_{\lambda\mu}$ は Kronecker のデルタである．

対称多項式の列 $\{q_r(x) \mid r \geq 0\}$ を母関数表示

$$\sum_{r=0}^{\infty} q_r(x) t^r := \prod_{i=1}^{n} \frac{1+x_i t}{1-x_i t} = \prod_{i=1}^{n} (1+x_i t)(1+x_i t + x_i^2 t^2 + \cdots)$$

により定め，また $r<0$ について $q_r(x) := 0$ と約束する．この $q_r(x)$ を用いて，$\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}$ について 2 被約 Schur 関数 $S_\lambda(x) \in \Lambda_n$（[1] を参照）が

$$S_\lambda(x) := \det(q_{\lambda_i - i + j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$$

により定まる．また，$\lambda \in \mathscr{P}$ について Schur の Q 関数 $Q_\lambda(x) \in \Lambda_n$ が $q_r(x)$ を用いて定義される．まず $r, s \geq 0$ について，$Q_{(r,s)}(x) \in \Lambda_n$ が

$$Q_{(r,s)}(x) := \begin{cases} q_r(x) q_s(x) + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{s} (-1)^i q_{r+i}(x) q_{s-i}(x) & ((r,s) \neq (0,0)) \\ 0 & ((r,s) = (0,0)). \end{cases}$$

により定められる．一般の分割 $\lambda \in \mathscr{P}$ については，$l(\lambda) \in \{2n-1, 2n\}$ なる n を用いて，交代行列 $(Q_{(\lambda_i, \lambda_j)}(x))_{1 \leq i,j \leq 2n}$ のパフィアンとして Schur の Q 関数が定義される：

$$Q_\lambda(x) := \mathrm{Pf}((Q_{(\lambda_i, \lambda_j)}(x))_{1 \leq i,j \leq 2n}) \in \Lambda_n.$$

さらに，変数 x を結合させせることにより対称多項式の列 $\{q_r(x,x) \mid r \geq 0\}$ を

$$\sum_{r=0}^{\infty} q_r(x,x) t^r := \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1+x_i t}{1-x_i t} \right)^2 = \prod_{i=1}^{n} (1+x_i t)^2 (1+x_i t + x_i^2 t^2 + \cdots)^2$$

により定め，これを用いて $Q_\lambda(x)$ と同様に $Q_\lambda(x,x) \in \Lambda_n$ を定める．

4　佐藤–毛織の対称多項式

この節では，佐藤–毛織 [5] に従って対称多項式 $f_\lambda(x), g_\lambda(x)$ を定義する．さらに，それを用いて述べられる KdV 方程式系および変形 KdV 方程式系の解の振る舞いを紹介する．

変数 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の関数 $f(y) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ について，その totally even part $\mathrm{TE}_y(f(y))$ および totally odd part $\mathrm{TO}_n(f(y))$ を

$$\mathrm{TE}_y(f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) := 2^{-n} \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}} f(\epsilon_1 y_1, \epsilon_2 y_2, \ldots, \epsilon_n y_n),$$

$$\mathrm{TO}_y(f(y_1, y_2, \ldots, y_n)) := 2^{-n} \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in \{\pm 1\}} (-1)^{\alpha(\epsilon)} f(\epsilon_1 y_1, \epsilon_2 y_2, \ldots, \epsilon_n y_n)$$

により定める．ここで，$\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ について $\alpha(\epsilon) \coloneqq \#\{1 \leq i \leq n \mid \epsilon_i = -1\}$ である．$f(y)$ が $y_1, y_2, \ldots, y_n$ に関する多項式

$$f(y) = \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0} c_{a_1, a_2, \ldots, a_n} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n}$$

の形で表されるとき，

$$\mathrm{TE}_y(f(y)) = \sum_{\substack{a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0 \\ a_1, a_2, \ldots, a_n : \mathrm{even}}} c_{a_1, a_2, \ldots, a_n} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n},$$

$$\mathrm{TO}_y(f(y)) = \sum_{\substack{a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0 \\ a_1, a_2, \ldots, a_n : \mathrm{odd}}} c_{a_1, a_2, \ldots, a_n} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \cdots y_n^{a_n}$$

が成り立つ．

変数 $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の関数 $\Phi^{\pm}(x, y)$ を

$$\Phi^{+}(x, y) \coloneqq \frac{1}{a_{\delta_n}(y^2)} \mathrm{TE}_y \left(a_{\delta_n}(y) \exp \left(\sum_{\substack{m \geq 1 \\ m : \mathrm{odd}}} \frac{2}{m} p_{(m)}(x) p_{(m)}(y) \right) \right),$$

$$\Phi^{-}(x, y) \coloneqq \frac{1}{a_{\delta_n}(y^2)} \mathrm{TO}_y \left(a_{\delta_n}(y) \exp \left(\sum_{\substack{m \geq 1 \\ m : \mathrm{odd}}} \frac{2}{m} p_{(m)}(x) p_{(m)}(y) \right) \right)$$

により定める．ここで，$y^2 \coloneqq (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2)$ である．このとき，以下を満たす対称多項式の族 $\{f_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathscr{P}^{(n)}\}$，$\{g_\lambda(x) \mid \lambda \in \mathscr{P}^{(n)}\}$ が一意的に存在する：

$$a_{\delta_n}(y^2)(\Phi^{-}(x, y))^2 = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}} a_{\lambda + \Delta_n}(y^2) f_\lambda(x),$$

$$a_{\delta_n}(y^2)\Phi^{+}(x, y)\Phi^{-}(x, y) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}} y_1 y_2 \cdots y_n a_{\lambda + \Delta_n}(y^2) g_\lambda(x).$$

分割 $\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}$ について，$f_\lambda(x), g_\lambda(x)$ は以下のように冪和対称多項式 $p_{(1^{m_0} 3^{m_1} 5^{m_2} \cdots)}(x)$（のスカラー倍）で展開することができ，その係数を $a_\lambda^{(1^{m_0} 3^{m_1} 5^{m_2} \cdots)}, b_\lambda^{(1^{m_0} 3^{m_1} 5^{m_2} \cdots)}$ とおく：

$$2^n f_\lambda(x) = \sum_{m_0, m_1, m_2, \ldots} a_\lambda^{(1^{m_0} 3^{m_1} 5^{m_2} \cdots)} \frac{(\frac{4}{1})^{m_0} (\frac{4}{3})^{m_1} (\frac{4}{5})^{m_2} \cdots}{m_0! m_1! m_2! \cdots} p_{(1^{m_0} 3^{m_1} 5^{m_2} \cdots)}(x), \tag{3}$$

$$2^n g_\lambda(x) = \sum_{m_0, m_1, m_2, \ldots} b_\lambda^{(1^{m_0} 3^{m_1} 5^{m_2} \cdots)} \frac{(\frac{4}{1})^{m_0} (\frac{4}{3})^{m_1} (\frac{4}{5})^{m_2} \cdots}{m_0! m_1! m_2! \cdots} p_{(1^{m_0} 3^{m_1} 5^{m_2} \cdots)}(x). \tag{4}$$

ここで，(3) の右辺の和は $|(1^{m_0}3^{m_1}5^{m_2}\cdots)| = |2\lambda+2\Delta_n|$ かつ $m_0+m_1+m_2+\cdots \le n$ なる非負整数の組 $m_0, m_1, m_2, \ldots$ 全体を動き，(4) の右辺の和は $|(1^{m_0}3^{m_1}5^{m_2}\cdots)| = |2\lambda+\Delta_n+\delta_n|$ かつ $m_0+m_1+m_2+\cdots \le n$ なる非負整数の組 $m_0, m_1, m_2, \ldots$ 全体を動く．

ここで，佐藤–毛織の定理を述べるために広田の微分作用素を定義する．変数 $t = (t_0, t_1, \ldots)$ の単項式 $P(t) = t_0^{m_0}t_1^{m_1}\cdots$ について広田の微分作用素 $P(D_t)$ が定まり，これは 2 つの t の関数 $f_1(t), f_2(t)$ の組に対し以下のように作用するものである：

$$
\begin{aligned}
&P(D_t)f_1(t)\cdot f_2(t) = (D_{t_0}^{m_0}D_{t_1}^{m_1}\cdots)f_1(t)\cdot f_2(t)\\
&:= \sum_{\substack{0\le a_0\le m_0\\ 0\le a_1\le m_1\\ \vdots}} \left(\prod_{i\ge 0}(-1)^{m_i-a_i}\binom{m_i}{a_i}\right)\\
&\qquad\qquad \times\left(\frac{\partial^{a_0}}{\partial t_0^{a_0}}\frac{\partial^{a_1}}{\partial t_1^{a_1}}\cdots\right)f_1(t)\cdot\left(\frac{\partial^{m_0-a_0}}{\partial t_0^{m_0-a_0}}\frac{\partial^{m_1-a_1}}{\partial t_1^{m_1-a_1}}\cdots\right)f_2(t).
\end{aligned}
$$

佐藤–毛織の定理は以下のように述べられる：

定理 4.1 ([5])**.** KdV 方程式系の解 $u = u(t)$ および変形 KdV 方程式系の解 $v = v(t)$ をとり，さらに $u = (2\log f)_{t_0t_0}$ および $v = \left(\log\dfrac{f}{g}\right)_{t_0}$ を満たす関数 $f = f(t), g = g(t)$ を適当にとる．このとき，u の微分多項式の族

$$
\begin{aligned}
\{K_{2\lambda+2\Delta_n}(t) \mid n\ge 0, \lambda\in\mathscr{P}^{(n)}\} &\subseteq \mathbb{Z}[u, u_{t_0}, u_{t_0t_0}, \ldots],\\
\{K_{2\lambda+\Delta_n+\delta_n}(t) \mid n\ge 0, \lambda\in\mathscr{P}^{(n)}\} &\subseteq \mathbb{Z}[u, u_{t_0}, u_{t_0t_0}, \ldots]
\end{aligned}
$$

が存在し，任意の t の単項式 $P(t) = t_0^{m_0}t_1^{m_1}\cdots$ について

$$
\begin{aligned}
\frac{P(D_t)f\cdot f}{f^2} &= \sum_{n\ge 0}\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} a_\lambda^{(1^{m_0}3^{m_1}5^{m_2}\cdots)}K_{2\lambda+2\Delta_n}(t),\\
\frac{P(D_t)f\cdot g}{fg} &= \sum_{n\ge 0}\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} b_\lambda^{(1^{m_0}3^{m_1}5^{m_2}\cdots)}K_{2\lambda+\Delta_n+\delta_n}(t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

5 2 被約 Schur 関数と Schur の Q 関数に関する予想

中島 [7] は水川裕司，山田裕史との共同研究に基づき，佐藤–毛織が導入した対称多項式 $f_\lambda(x), g_\lambda(x)$ の 2 被約 Schur 関数 $S_\lambda(x)$ および Littlewood–Richardon 係数 $c_{\mu\nu}^\lambda$ を用いた表示を与えた：

命題 5.1 ([7])**.** $n \geq 1$ および $\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}$ について，

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \sum_{\mu,\nu \in \mathscr{P}^{(n)}} c_{\mu\nu}^\lambda S_{2\mu+\Delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x), \\ g_\lambda(x) &= \sum_{\mu,\nu \in \mathscr{P}^{(n)}} c_{\mu\nu}^\lambda S_{2\mu+\delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x) \end{aligned}$$

が成り立つ．

彼らはさらに，この対称多項式が Schur の Q 関数 $Q_\lambda(x,x)$ に等しいことを予想している：

予想 5.2 ([7])**.** $n \geq 1$ および $\lambda \in \mathscr{P}^{(n)}$ について，

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu \in \mathscr{P}^{(n)}} c_{\mu\nu}^\lambda S_{2\mu+\Delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x) &= 2^{-n} Q_{2\lambda+2\Delta_n}(x,x), \\ \sum_{\mu,\nu \in \mathscr{P}^{(n)}} c_{\mu\nu}^\lambda S_{2\mu+\delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x) &= 2^{-n} Q_{2\lambda+\Delta_n+\delta_n}(x,x) \end{aligned}$$

が成り立つ．

予想 5.2 の第一の式は対称多項式 $f_\lambda(x)$，第二の式は対称多項式 $g_\lambda(x)$ に対応している．この予想と命題 5.1，定理 4.1 を合わせると，KdV 方程式系の解と Schur の Q 関数（つまり，対称群のスピン指標）の間に関係がある，という予想が得られる．中島 [7] は予想 5.2 の簡単な場合の証明を与えている：

定理 5.3 ([7])**.** 予想 5.2 は $n = 1$ の場合，また $n = 2$ かつ $l(\lambda) \leq 1$ の場合に成り立つ．

Littlewood–Richardson 係数 $c_{\mu\nu}^\lambda$ を一般に計算することは難しいが，定理 5.3 の条件の下では $c_{\mu\nu}^\lambda$ を計算することができ，対称多項式 $\{q_r(x) \mid r \geq 0\}$ の計算に帰着させることでこの予想を証明することができる．

6　予想の一般の場合についての考察

この節では，予想 5.2 の一般の n についての場合を [3] に基づいて考察する．

変数の組 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と独立な n 個の変数の組 $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を取り，$y^2 = (y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2)$ と書くことにする．$\{s_\lambda(y^2) \mid \lambda \in \mathscr{P}^{(n)}\}$ は線形独立であるから，予想 5.2 は次と同値である：

予想 6.1 ([3, Conjecture 4.1])**.** $n \geq 1$ について，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} s_\lambda(y^2) \sum_{\mu,\nu\in\mathscr{P}^{(n)}} c^\lambda_{\mu\nu} S_{2\mu+\Delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x)\\ &= \sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} s_\lambda(y^2)(2^{-n}Q_{2\lambda+2\Delta_n}(x,x)),\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} s_\lambda(y^2) \sum_{\mu,\nu\in\mathscr{P}^{(n)}} c^\lambda_{\mu\nu} S_{2\mu+\delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x)\\ &= \sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} s_\lambda(y^2)(2^{-n}Q_{2\lambda+\Delta_n+\delta_n}(x,x)).\end{aligned} \tag{6}$$

ここで (5) の両辺を計算するために，いくつか記号を導入する．

$$A_n = \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ は相異なる } \}$$

とおく．このとき $\alpha \in A_n$ について，$\alpha_{\tau_\alpha(n)} < \cdots < \alpha_{\tau_\alpha(2)} < \alpha_{\tau_\alpha(1)}$ なる $\tau_\alpha \in \mathfrak{S}_n$ が一意的に存在する．ここで $\tau_\alpha^{-1}\alpha = (\alpha_{\tau_\alpha(1)}, \alpha_{\tau_\alpha(2)}, \ldots, \alpha_{\tau_\alpha}(n)) \in \mathscr{P}^{(n)}$ となっている．このとき，(5) の両辺は Kostka 行列の逆行列を用いて以下のように計算できる（(6) についても同様である）：

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} s_\lambda(y^2) \sum_{\mu,\nu\in\mathscr{P}^{(n)}} c^\lambda_{\mu\nu} S_{2\mu+\Delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x)\\ &= \sum_{\mu,\nu\in\mathscr{P}^{(n)}} s_\mu(y^2)s_\nu(y^2) S_{2\mu+\Delta_n}(x) S_{2\nu+\Delta_n}(x)\\ &= \sum_{\xi\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(n)}} e_\xi(y^2) \sum_{\alpha,\beta\in A_n} \mathrm{sgn}(\tau_\alpha)\mathrm{sgn}(\tau_\beta) \left(\prod_{j=1}^{n} q_{2\alpha_j+1-(n-j)}(x) q_{2\beta_j+1-(n-j)}(x)\right)\\ &\qquad \times \sum_{\substack{\eta,\zeta\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(n)}\\ \eta\cup\zeta=\xi}} K^{-1}_{\eta(\tau_\alpha^{-1}\alpha-\delta_n)'} K^{-1}_{\zeta(\tau_\beta^{-1}\beta-\delta_n)'},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} s_\lambda(y^2)(2^{-n}Q_{2\lambda+2\Delta_n}(x,x))\\
&=\sum_{\xi\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(n)}} e_\xi(y^2)\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} 2^{-n}K^{-1}_{\xi\lambda'}Q_{2\lambda+2\Delta_n}(x,x).
\end{aligned}
$$

$\{e_\xi(y^2)\mid \xi\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(n)}\}$ の線形独立性より，予想は次と同値であることがわかる：

予想 6.2 ([3, Conjecture 4.4])**.** $n\geq 1$ および $\xi\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(n)}$ について，以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta\in A_n}\mathrm{sgn}(\tau_\alpha)\mathrm{sgn}(\tau_\beta)\left(\prod_{j=1}^{n} q_{2\alpha_j+1-(n-j)}(x)q_{2\beta_j+1-(n-j)}(x)\right)\\
&\qquad\times\sum_{\substack{\eta,\zeta\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(n)}\\ \eta\cup\zeta=\xi}} K^{-1}_{\eta(\tau_\alpha^{-1}\alpha-\delta_n)'}K^{-1}_{\zeta(\tau_\beta^{-1}\beta-\delta_n)'}\\
&=\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} 2^{-n}K^{-1}_{\xi\lambda'}Q_{2\lambda+2\Delta_n}(x,x),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta\in A_n}\mathrm{sgn}(\tau_\alpha)\mathrm{sgn}(\tau_\beta)\left(\prod_{j=1}^{n} q_{2\alpha_j-(n-j)}(x)q_{2\beta_j+1-(n-j)}(x)\right)\\
&\qquad\times\sum_{\substack{\eta,\zeta\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(n)}\\ \eta\cup\zeta=\xi}} K^{-1}_{\eta(\tau_\alpha^{-1}\alpha-\delta_n)'}K^{-1}_{\zeta(\tau_\beta^{-1}\beta-\delta_n)'}\\
&=\sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(n)}} 2^{-n}K^{-1}_{\xi\lambda'}Q_{2\lambda+\Delta_n+\delta_n}(x,x).
\end{aligned}
$$

7　予想の $n=2$ の場合の証明

この節では，予想 6.2（予想 5.2 と同値）の $n=2$ の場合の証明の方針を [3] に従い述べる．$n=2$ の場合，予想 5.2，予想 6.2 はそれぞれ次の形で書かれる：

定理 7.1 ([3, Theorem 5.1])**.** $\lambda\in\mathscr{P}^{(2)}$ について，

$$
\begin{aligned}
\sum_{\mu,\nu\in\mathscr{P}^{(n)}} c^\lambda_{\mu\nu}S_{2\mu+\Delta_2}(x)S_{2\nu+\Delta_2}(x)&=2^{-2}Q_{2\lambda+2\Delta_2}(x,x),\\
\sum_{\mu,\nu\in\mathscr{P}^{(n)}} c^\lambda_{\mu\nu}S_{2\mu+\delta_2}(x)S_{2\nu+\Delta_2}(x)&=2^{-2}Q_{2\lambda+\Delta_2+\delta_2}(x,x)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

定理 7.2 ([3, Theorem 5.2])**.** $\xi \in \widetilde{\mathscr{P}}^{(2)}$ について，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha,\beta\in A_2} \mathrm{sgn}(\tau_\alpha)\mathrm{sgn}(\tau_\beta) q_{2\alpha_1}(x) q_{2\alpha_2+1}(x) q_{2\beta_1}(x) q_{2\beta_2+1}(x) \\
&\qquad \times \sum_{\substack{\eta,\zeta\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(2)}\\ \eta\cup\zeta=\xi}} K^{-1}_{\eta(\tau_\alpha^{-1}\alpha-\delta_n)'} K^{-1}_{\zeta(\tau_\beta^{-1}\beta-\delta_n)'} \\
&= \sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(2)}} 2^{-2} K^{-1}_{\xi\lambda'} Q_{2\lambda+2\Delta_n}(x,x), \\
&\sum_{\alpha,\beta\in A_2} \mathrm{sgn}(\tau_\alpha)\mathrm{sgn}(\tau_\beta) q_{2\alpha_1-1}(x) q_{2\alpha_2}(x) q_{2\beta_1}(x) q_{2\beta_2+1}(x) \\
&\qquad \times \sum_{\substack{\eta,\zeta\in\widetilde{\mathscr{P}}^{(2)}\\ \eta\cup\zeta=\xi}} K^{-1}_{\eta(\tau_\alpha^{-1}\alpha-\delta_n)'} K^{-1}_{\zeta(\tau_\beta^{-1}\beta-\delta_n)'} \\
&= \sum_{\lambda\in\mathscr{P}^{(2)}} 2^{-2} K^{-1}_{\xi\lambda'} Q_{2\lambda+\Delta_n+\delta_n}(x,x).
\end{aligned}$$

ただしここで，A_2 は $\alpha_1 \neq \alpha_2$ を満たす $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ の集合であり，$\alpha \in A_2$ について $\tau_\alpha \in \mathfrak{S}_2$ は $\alpha_{\tau_\alpha(2)} < \alpha_{\tau_\alpha(1)}$ を満たすものである．

定理 7.2 を証明するために用いるいくつかの記号と命題を述べる．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{P}^{(2)}$ および $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_2$ について，$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2 = \lambda_1+\lambda_2+2$ および $\alpha_{\sigma_1(2)}+\beta_{\sigma_2(2)} \leq \lambda_2$ を満たす $(\alpha,\beta) = ((\alpha_1,\alpha_2),(\beta_1,\beta_2)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \times (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ の集合を $B(\lambda;\sigma_1,\sigma_2)$ とおく．また，$\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_2$ および $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2), \beta = (\beta_1,\beta_2) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ について，$\lambda_1+\lambda_2 = \alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2-2$ および $\lambda_2 \geq \alpha_{\sigma_1(2)}+\beta_{\sigma_2(2)}$ を満たす $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathscr{P}^{(2)}$ の集合を $C(\alpha,\beta;\sigma_1,\sigma_2)$ とおく．このとき，長さ 2 の分割に対応する Schur の Q 関数の新しい表示として次が得られる：

命題 7.3 ([3, Proposition 5.3])**.** $\lambda \in \mathscr{P}^{(2)}$ について，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&Q_{2\lambda+2\Delta_n}(x,x) \\
&= 4 \sum_{\sigma_1,\sigma_2\in\mathfrak{S}_2} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2) \sum_{(\alpha,\beta)\in B(\lambda;\sigma_1,\sigma_2)} q_{2\alpha_1}(x) q_{2\alpha_2+1}(x) q_{2\beta_1}(x) q_{2\beta_2+1}(x), \\
&Q_{2\lambda+\Delta_n+\delta_n}(x,x) \\
&= 4 \sum_{\sigma_1,\sigma_2\in\mathfrak{S}_2} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2) \sum_{(\alpha,\beta)\in B(\lambda;\sigma_1,\sigma_2)} q_{2\alpha_1}(x) q_{2\alpha_2+1}(x) q_{2\beta_1-1}(x) q_{2\beta_2}(x).
\end{aligned}$$

また，Kostka 行列の逆行列について次が成り立つ：

命題 7.4 ([3, Proposition 5.6])**.** $\xi \in \widetilde{\mathscr{P}}^{(2)}$ および $\alpha_2 < \alpha_1$, $\beta_2 < \beta_1$ なる $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \beta = (\beta_1, \beta_2) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ について，以下が成り立つ：

$$\sum_{\substack{\eta,\zeta \in \widetilde{\mathscr{P}}^{(2)} \\ \eta \cup \zeta = \xi}} K^{-1}_{\eta(\alpha_1-1,\alpha_2)'} K^{-1}_{\zeta(\beta_1-1,\beta_2)'} = \sum_{\sigma_1,\sigma_2 \in \mathfrak{S}_2} \mathrm{sgn}(\sigma_1)\mathrm{sgn}(\sigma_2) \sum_{\lambda \in C(\alpha,\beta;\sigma_1,\sigma_2)} K^{-1}_{\xi\lambda'}.$$

命題 7.3，命題 7.4 を用いることにより，定理 7.2 を証明することができる．

謝辞

本稿で扱った予想について教えて頂いた山田裕史氏に感謝いたします．また，本稿は RIMS 共同研究『組合せ論的表現論における最近の展開』での講演を基にしたものです．代表者を務めて頂いた池田岳氏，研究集会において助言や議論を頂いた岡田聡一氏，Travis Scrimshaw 氏に厚くお礼申し上げます．

参考文献

[1] S. Ariki, T. Nakajima, and H.-F. Yamada. Reduced Schur functions and the Littlewood–Richardson coefficients. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, Vol. 59, pp. 396–406, 1999.

[2] I. G. Macdonald. *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* Oxford University Press, New York, second edition, 1995.

[3] Y. Nishiyama. On a conjecture on 2-reduced Schur functions and Schur's Q-functions, 2022. arXiv:2210.13862v1.

[4] A. Prasad. *Representation Theory: A Combinatorial Viewpoint.* Cambridge University Press, India, 2015.

[5] 佐藤幹夫, 毛織泰子. 広田氏の Bilinear Equations について. 数理解析研究所講究録, Vol. 388, pp. 183–204, 1980.

[6] 三輪哲二, 神保道夫, 伊達悦朗. ソリトンの数理. 岩波書店, 2007.

[7] 中島達洋. 佐藤・毛織の定理から得られる対称関数の恒等式について. 明海大学教養論文集 自然と文化, Vol. 29, pp. 49–57, 2018.