# Affine Gordon-Bender-Knuth Identities and Related Combinatorics*

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一
Soichi Okada
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

## 1 はじめに

Schur 関数やその関係式は，一般線型群･対称群の表現の解析において基本的な道具となっているだけでなく，標準盤や半標準盤などの組合せ論においても重要な役割を果たしている．例えば，Jacobi–Trudi の等式を用いることで与えられた枠をもつ標準盤の個数に関する鉤公式を導いたり，分割の長さを制限した Schur 関数の総和に対する Gordon–Bender–Knuth の等式を用いることで高さに制限を課した標準盤の個数に関する情報を引き出したりすることができる．標準盤や半標準盤の一般化はさまざまなものが知られているが，本稿では円筒型標準盤を扱う．円筒型（平面）分割の組合せ論の研究は Gessel–Krattenthaler [7] に始まるが，円筒型標準盤，円筒型半標準盤の概念はそれぞれ [19]（1 のべき根における $A$ 型 Hecke 環の表現論），[3]（Grassmann 多様体の量子コホモロジー環の理論）に現れており，円筒型 Schur 関数は量子コホモロジーを動機として Postnikov [16] によって導入されている．本稿の目的は，円筒型 Schur 関数に関する Gordon–Bender–Knuth 型の等式（アフィン版 Gordon–Bender–Knuth の等式）とその円筒型標準盤の組合せ論への応用を与えることである．

非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ で $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ が有限となるものを**分割** (partition) という．分割 $\lambda$ に対して，$|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$, $l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i \neq 0\}$ とおき，それぞれ $\lambda$ の大きさ，長さと呼ぶ．また，$\lambda$ の Young 図形 $D(\lambda)$ を

$$D(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \le i \le l(\lambda),\, 1 \le j \le \lambda_i\}$$

とおいて定め，格子点の代わりに単位正方形をおいて図示する．分割 $\lambda$ とその Young 図形 $D(\lambda)$ を同一視することも多い．分割全体のなす集合を Par と表し，

$$\mathrm{Par}_n = \{\lambda \in \mathrm{Par} : |\lambda| = n\}, \quad \mathrm{Par}(m) = \{\lambda \in \mathrm{Par} : l(\lambda) \le m\},$$
$$\mathrm{Par}_n(m) = \{\lambda \in \mathrm{Par} : |\lambda| = n,\, l(\lambda) \le m\}$$

とおく．

*本稿は，J. Huh, J. Kim, C. Krattenthaler との共同研究 [12] に基づくものである．

分割 $\lambda$ の Young 図形の各正方形に正整数を 1 つずつ，次の 2 条件 (i), (ii) をみたすように書き込んだものを，$\lambda$ を枠とする**半標準盤** (semistandard tableau) という：

(i) 各行の成分は広義単調増加である．

(ii) 各列の成分は狭義単調増加である．

半標準盤は $D(\lambda)$ から正整数全体のなす集合 $\mathbb{P}$ への写像ともみなすことができる．例えば，

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

は，分割 $\lambda = (4, 3, 1)$ を枠とする半標準盤である．分割 $\lambda$ を枠とする半標準盤全体のなす集合を $\mathrm{SSTab}(\lambda)$ と表す．

可算無限個の変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots)$ に関する（完備化された）対称関数環を $\widehat{\Lambda}$ と表す．つまり，$\widehat{\Lambda}$ は $\boldsymbol{x}$ に関する形式的べき級数で変数の置換に関して不変なもの全体のなす環である．分割 $\lambda$ に対応する **Schur 関数** (Schur function) $s_\lambda(\boldsymbol{x}) \in \widehat{\Lambda}$ は，$\lambda$ を枠とする半標準盤の母関数として

$$s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)} \boldsymbol{x}^T$$

として定義される．ここで，$\boldsymbol{x}^T = \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} x_{T(i,j)}$ である．このとき，分割 $\lambda$ の長さを制限した Schur 関数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$ の総和に関して，次の Gordon–Bender–Knuth の等式が知られている．

**定理 1.1.** (Gordon [9], Bender–Knuth [1]) 正整数 $m$ に対して，

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}(m)} s_\lambda(\boldsymbol{x}) \\ &\quad = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} h_k(\boldsymbol{x}) \cdot \det\left(g_{-i+j}(\boldsymbol{x}) - g_{i+j}(\boldsymbol{x})\right)_{1 \le i,j \le h} & (m \text{ が奇数 } 2h+1 \text{ のとき}), \\ \det\left(g_{-i+j}(\boldsymbol{x}) + g_{i+j-1}(\boldsymbol{x})\right)_{1 \le i,j \le h} & (m \text{ が偶数 } 2h \text{ のとき}). \end{cases}\end{aligned} \tag{1}$$

ここで，$h_k(\boldsymbol{x}) = s_{(k)}(\boldsymbol{x})$（$k < 0$ のときは $h_k(\boldsymbol{x}) = 0$ と約束する）は $k$ 次完全対称関数であり，

$$g_r(\boldsymbol{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k(\boldsymbol{x}) h_{k+r}(\boldsymbol{x})$$

である．

この等式を利用すると，高さを制限した標準盤の総数に関する組合せ論的関係式を得ることができる．分割 $\lambda$ に対して，$\lambda$ を枠とする半標準盤のうちで，$1, 2, \dots, n$（ただし $n = |\lambda|$）が 1 回ずつ現れるものを，**標準盤** (standard tableau) と呼ぶ．標準盤 $T$ に対して，その枠である分割 $\lambda$ の大きさ $|\lambda|$，長さ $l(\lambda)$ をそれぞれ，$T$ の**大きさ** (size)，**高さ** (height) と呼ぶことにする．$\lambda$ を枠とする標準盤全体のなす集合を $\mathrm{STab}(\lambda)$ と表し，

$$\mathrm{STab}_n = \bigsqcup_{\lambda \in \mathrm{Par}_n} \mathrm{STab}(\lambda), \quad \mathrm{STab}_n(m) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathrm{Par}_n(m)} \mathrm{STab}(\lambda)$$

とおく．このとき，

**定理 1.2.** 非負整数 $h$ と正整数 $n$ に対して，次の個数は互いに等しい：

(a) $\#\,\mathrm{STab}_n(2h+1)$，つまり，大きさが $n$ であり高さが $2h+1$ 以下である標準盤の総数.

(b) 長さ $n$ の揺動盤 $\left(\lambda^{(i)}\right)_{i=0}^{n}$ で $l(\lambda^{(i)}) \le h$ $(0 \le i \le n)$ をみたすものの個数.

(c) $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上のマッチングで $(h+1)$ 次以上の入れ子をもたないものの個数.

ただし，(b), (c) に関する用語の定義は，第 2 節を参照されたい.

本稿の目的は，定理 1.1, 1.2 の円筒型 Schur 関数，円筒型標準盤への一般化を与えることである．本稿の構成は以下の通りである．第 2 節では，定理 1.1 と標準盤の数え上げ問題との関係，定理 1.2 の証明の概要について解説する．第 3 節では，円筒型 Schur 関数を定義した後，円筒型 Schur 関数に対する Gordon–Bender–Knuth 型の等式（定理 3.3）を与え，その証明について説明する．最後に，第 4 節では，定理 3.3 を円筒型標準盤の数え上げ問題に応用する（定理 4.6）.

# 2 Gordon–Bender–Knuth の等式の組合せ論への応用

この節では，Gordon–Bender–Knuth の等式（定理 1.1）と標準盤の数え上げ問題との関係について解説し，関連する組合せ論的主張を紹介する.

## 2.1 Gordon–Bender–Knuth の等式の応用

Schur 関数，標準盤の定義から，分割 $\lambda$ を枠とする標準盤の個数 $\#\,\mathrm{STab}(\lambda)$ は，対応する Schur 関数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$ における $x_1 x_2 \cdots x_n$（ただし $n = |\lambda|$）の係数に等しい，そこで，写像 $\theta : \widehat{\Lambda} \to \mathbb{Q}[[t]]$ を

$$\theta(f) = \sum_{n \ge 0} \bigl(f \text{ における } x_1 x_2 \cdots x_n \text{ の係数}\bigr) \frac{t^n}{n!} \quad (f \in \widehat{\Lambda})$$

とおいて定めると，$\theta$ は環準同型写像であり，

$$\theta(s_\lambda) = \#\,\mathrm{STab}(\lambda) \cdot \frac{t^{|\lambda|}}{|\lambda|!}, \quad \theta(h_r) = \frac{t^r}{r!}.$$

この $\theta$ を Gordon–Bender–Knuth の等式 (1) の両辺に施すと，次の系が得られる.

**系 2.1.** (Gessel [6, §6]) 正整数 $m$ に対して，

$$\sum_{n \ge 0} \#\,\mathrm{SSTab}_n(m) \frac{t^n}{n!} = \begin{cases} e^t \cdot \det\bigl(I_{-i+j}(2t) - I_{i+j}(2t)\bigr)_{1 \le i,j \le h} & (m = 2h+1 \text{ のとき}), \\ \det\bigl(I_{-i+j}(2t) + I_{i+j-1}(2t)\bigr)_{1 \le i,j \le h} & (m = 2h \text{ のとき}). \end{cases} \tag{2}$$

ここで，$I_r(2t)$ は

$$I_r(2t) = I_{-r}(2t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+r}}{k!(k+r)!} \quad (r \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$$

によって定義される変形 Bessel 関数（第 1 種双曲型 Bessel 関数とも呼ばれる）である.

この系を用いると，$m$ が小さい場合に $\#\,\mathrm{STab}_n(m)$ の具体的な表示式が得られる．($m = 2, 3$ の場合は Regev [17, §4.5]，$m = 4, 5$ の場合は Gouvou-Beauchamps [10, Corollary 9, 11] による．)

**系 2.2.** 正整数 $n$ に対して，

$$\begin{aligned}
\#\,\mathrm{STab}_n(2) &= \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}, \\
\#\,\mathrm{STab}_n(3) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} C_k, \\
\#\,\mathrm{STab}_n(4) &= C_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} C_{\lceil (n+1)/2 \rceil}, \\
\#\,\mathrm{STab}_n(5) &= 6 \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} C_k \frac{(2k+2)!}{(k+2)!(k+3)!}.
\end{aligned}$$

ここで，$C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ は Catalan 数である．

## 2.2 揺動盤

次に，高さを制限した標準盤と揺動盤との関係について述べる．

**定義 2.3.** 非負整数 $n$ に対して，長さ $n$ の**揺動盤** (vacillating tableau) とは，分割の列 $\left(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}\right)$ で次の 2 条件 (i), (ii) をみたすもののことである：

(i) $\lambda^{(0)} = \lambda^{(n)} = \emptyset$.

(ii) 各 $1 \le i \le n$ に対して，次のいずれか 1 つが成り立つ：

(ii-1) $\lambda^{(i-1)} \subset \lambda^{(i)}$ であり $|\lambda^{(i-1)}| + 1 = |\lambda^{(i)}|$.

(ii-2) $\lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i)}$.

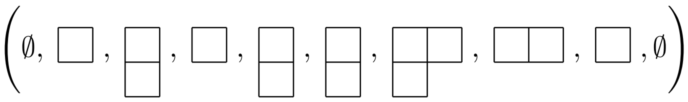
(ii-3) $\lambda^{(i-1)} \supset \lambda^{(i)}$ であり $|\lambda^{(i-1)}| - 1 = |\lambda^{(i)}|$.

長さ $n$ の揺動盤全体のなす集合を $\mathrm{VT}_n$ と表す．また，

$$\mathrm{VT}_n(h) = \left\{ \left(\lambda^{(i)}\right)_{i=0}^{n} \in \mathrm{VT}_n : l(\lambda^{(i)}) \le h \, (0 \le i \le n) \right\}$$

とおく．

例えば，



は長さ 9 の揺動盤である．このとき，Grabiner–Magyar [11, (38)] は，

$$\sum_{n \ge 0} \#\left\{ \left(\lambda^{(i)}\right)_{i=0}^{n} \in \mathrm{VT}_n(h) : \lambda^{(i-1)} \ne \lambda^{(i)} \, (0 \le i \le n) \right\} \frac{t^n}{n!}$$
$$= \det \left( I_{-i+j}(2t) - I_{i+j}(2t) \right)_{1 \le i,j \le h}$$

となることを示している．Zeilberger [20] は，この等式と系 2.1 から，次の定理の (a)（定理 1.2 の (a) = (b)）を導いている．また，Eu–Fu–Hou–Hsu [5] は全単射を構成することで次の定理の (b) を証明している．

**定理 2.4.** (a) (Zeilberger [20])

$$\#\,\mathrm{STab}_n(2h+1) = \#\,\mathrm{VT}_n(h). \tag{3}$$

(b) (Eu–Fu–Hou–Hsu [5, Theorem 1.3])

$$\begin{aligned}&\#\,\mathrm{STab}_n(2h)\\ &\quad = \#\left\{ \left(\lambda^{(i)}\right)_{i=0}^{n} \in \mathrm{VT}_n(h) : \lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i)} \Rightarrow l(\lambda^{(i-1)}) < h\,(0 \le i \le n) \right\}.\end{aligned} \tag{4}$$

**注意.** 定理 2.4 は，直交 Lie 代数 $\mathfrak{so}_m = \mathfrak{so}_m(\mathbb{C})$ の表現論を用いて証明することもできる．例えば，(3) は，一般線型 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_{2h+1}$ の自然表現（の $\mathfrak{so}_{2h+1}$ への制限）を $V = \mathbb{C}^{2h+1}$，$\mathfrak{so}_{2h+1}$ のスピン表現を $S$ と表すとき，重複度 $\left[S \otimes V^{\otimes n} : S\right]_{\mathfrak{so}_{2h+1}}$ を 2 通りに計算することで導くことができる．まず，長さ $h$ 以下の分割 $\mu$ に対して，$\mu + 1/2 = (\mu_1 + 1/2, \ldots, \mu_h + 1/2)$ を最高ウェイトとする $\mathfrak{so}_{2h+1}$ の既約表現を $U_{\mu+1/2}$ と表すと，

$$U_{\mu+1/2} \otimes V \cong \bigoplus_{\nu} U_{\nu+1/2}$$

（ここで，$\nu$ は $\nu \supset \mu$, $|\nu| = |\mu| + 1$，あるいは $\nu = \mu$，あるいは $\nu \subset \mu$, $|\nu| = |\mu| - 1$ をみたす長さ $h$ 以下の分割全体にわたる）が成り立つ（例えば [2, (2.7)] を見よ）．よって，$S = U_{\emptyset+1/2}$ に注意すると，

$$\left[S \otimes V^{\otimes n} : S\right]_{\mathfrak{so}_{2h+1}} = \mathrm{VT}_n(h).$$

一方，[2, (2.2)] より

$$[S \otimes U_\lambda : S]_{\mathfrak{so}_{2h+1}} = \begin{cases} 1 & （\lambda = (1^k) \text{ のとき}） \\ 0 & （\text{その他}） \end{cases}$$

であり，分割 $\lambda \in \mathrm{Par}_{2h+1}$ に対応する $\mathfrak{gl}_{2h+1}$ の既約表現を $V_\lambda$ と表すと [15, Theorem 5.4] より

$$\left[\mathrm{Res}^{\mathfrak{gl}_{2h+1}}_{\mathfrak{so}_{2h+1}} V_\lambda : U_{(1^k)}\right]_{\mathfrak{so}_{2h+1}} = \begin{cases} 1 & （r(\lambda) = k \text{ または } 2h+1-k \text{ のとき}） \\ 0 & （\text{その他}） \end{cases}$$

（ただし，$r(\lambda)$ は $\lambda$ の Young 図形の長さ奇数の行の個数である）である．よって，$\mathfrak{gl}_{2h+1}$ の表現として $V^{\otimes n} \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Par}_n(2h+1)} V_\lambda^{\oplus \#\,\mathrm{STab}(\lambda)}$ と既約分解されることを用いると，

$$\left[S \otimes V^{\otimes n} : S\right]_{\mathfrak{so}_{2h+1}} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}_n(2h+1)} \#\,\mathrm{STab}(\lambda) = \#\,\mathrm{STab}_n(2h+1).$$

等式 (4) は，$\mathfrak{so}_{2h}$ の半スピン表現 $S^{\pm}$ に対して重複度 $\left[S^{+} \otimes V^{\otimes n} : S^{\pm}\right]_{\mathfrak{so}_{2h}}$ を考えることによって，同様に証明できる．

### 2.3　対合，マッチング

Robinson–Schensted 対応を考えることによって，標準盤とマッチングを結び付けることができる．まず，Robinson–Schensted 対応について思い出しておく．

**定理 2.5.** （例えば [18, Theorem 7.11.5, 7.13.1, A1.1.1] を見よ）$n$ 次対称群 $S_n$ と，同じ枠をもつ標準盤の対全体の集合の間の全単射

$$\mathrm{RS} : S_n \to \bigsqcup_{\lambda \in \mathrm{Par}_n} \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

で，次の性質をもつものが構成できる：

(a) $\mathrm{RS}(w) = (P, Q)$ のとき，$\mathrm{RS}(w^{-1}) = (Q, P)$.

(b) $\mathrm{RS}(w) = (P, Q)$ のとき，$P$ の 1 列目の長さは，$w(1), \ldots, w(n)$ の最長減少部分列の長さに等しい．

この定理から，

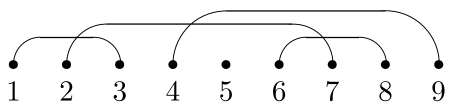
$$\#\,\mathrm{STab}_n(m) = \#\left\{ w \in S_n : \begin{array}{l} w^2 = 1 \\ w \text{ は長さ } m+1 \text{ 以上の減少部分列をもたない} \end{array} \right\} \tag{5}$$

となることがわかる．$w^2 = 1$ をみたす置換 $w \in S_n$ を対合と呼ぶ．対合は自然に $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 上のマッチングと同一視できる．

**定義 2.6.** 正整数 $n$ に対して，$[n]$ の集合としての分割とは，$[n]$ の空でない部分集合からなる集合 $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ で，$\pi_1 \cup \cdots \cup \pi_k = [n]$ であり，$\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ となるもののことである．このとき，$\pi_i$ を $\pi$ のブロックと呼ぶ．$[n]$ 上の**マッチング** (matching) とは，$[n]$ の集合としての分割 $\pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ で，$\#\pi_i = 1$ または 2 $(1 \leq i \leq k)$ となるもののことである．$[n]$ 上のマッチング全体のなす集合を $\mathrm{M}_n$ と表す．

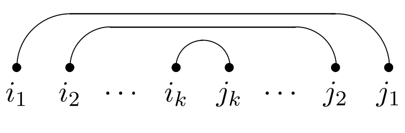
$[n]$ 上のマッチング $\pi$ を，$\{1, 2, \ldots, n\}$ を頂点集合とし，$\pi$ を辺集合とするグラフとして表す．対合 $w \in S_n$ は，$w$ を互いに素な巡回置換の積への分解したときに現れる 2 サイクル $(i, j)$ を $\{i, j\}$ に，1 サイクル（固定点）$(i)$ を $\{i\}$ に置き換えることによって，$[n]$ 上のマッチングと同一視できる．例えば，対合 $w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 1 & 9 & 5 & 8 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_9$ は，$w = (1,3)(2,7)(4,9)(5)(6,8)$ と分解されるから，マッチング

$$\pi = \big\{\{1,3\}, \{2,7\}, \{4,9\}, \{5\}, \{6,8\}\big\} = \tag{6}$$




と同一視される．

**定義 2.7.** マッチング $\pi \in \mathrm{M}_n$ に対して，その $k$ 個のブロック $\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_k, j_k\}$ は，$i_1 < \cdots < i_k < j_k < \cdots < j_1$ をみたすとき，$\pi$ の ***k* 次入れ子** ($k$-nesting) であるという．




$k$ 次以上の入れ子をもたない $[n]$ 上のマッチング全体のなす集合を $\mathrm{NN}_n(k)$ と表す．

例えば，上の例 (6) のマッチング $\pi$ では，$\{4,9\},\{6,8\}$ は 2 次入れ子である．減少部分列と入れ子には次のような関係がある．

**命題 2.8.** 対合 $w \in S_n$ がマッチング $\pi \in \mathrm{M}_n$ に対応しているとする．このとき，次の (i), (ii) は同値である：

(i) $w(1), \ldots, w(n)$ は長さ $2k$ 以上の減少部分列をもつ．

(ii) $\pi$ は $k$ 次入れ子をもつ．

この命題と (5) から，$\#\mathrm{STab}_n(2h+1) = \#\mathrm{NN}_n(h+1)$ となり，定理 1.2 の (a) = (c) が導かれる．

### 2.4 揺動盤とマッチング

Chen–Deng–Du–Stanley–Yan [4] は，$[n]$ 上のマッチングと長さ $n$ の揺動盤の間に次のような全単射 $\varphi : \mathrm{M}_n \to \mathrm{VT}_n$ を構成している．マッチング $\pi \in \mathrm{M}_n$ が与えられたとき，標準盤（ここでは，用語を乱用して，半標準盤で数字に重複がないものを標準盤と呼んでいる）の列 $T^{(n)}, T^{(n-1)}, \ldots, T^{(1)}, T^{(0)}$ を

$$T^{(n)} = \emptyset, \quad T^{(i-1)} = \begin{cases} T^{(i)} \leftarrow j & (\{i,j\} \in \pi \text{ であり，} j < i \text{ であるとき}), \\ T^{(i)} \setminus \{j\} & (\{i,j\} \in \pi \text{ であり，} i < j \text{ であるとき}), \\ T^{(i)} & (\{i\} \in \pi \text{ であるとき}) \end{cases}$$

と帰納的に定める．ここで，$T^{(i)} \leftarrow j$ は $T^{(i)}$ に $j$ を行挿入して得られる標準盤であり，$T^{(i)} \setminus \{j\}$ は $T^{(i)}$ に現れている数字 $j$ を削除してできる標準盤である．そして，$T^{(i)}$ の枠の分割を $\lambda^{(i)}$ とし，$\varphi(\pi) = \left(\lambda^{(i)}\right)_{i=0}^{n}$ と定義する．例えば，(6) で与えられるマッチング $\pi$ に対して，上の構成で得られる標準盤の列は

$$\left(\emptyset, \boxed{1}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}, \boxed{2}, \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 6 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 6 \\ \hline\end{array}, \boxed{4}, \emptyset\right)$$

であり，$\varphi(\pi) = (\emptyset, (1), (1,1), (1), (1,1), (1,1), (2,1), (2), (1), \emptyset)$ となる．

**定理 2.9.** (Chen–Deng–Du–Stanley–Yan [4, Theorem 3.2]) 上で構成した $\varphi$ は $\mathrm{M}_n$ から $\mathrm{VT}_n$ への全単射である．また，$\varphi(\pi) = \left(\lambda^{(i)}\right)_{i=0}^{n}$ であるとき，次の (i), (ii) は同値である：

(i) $\pi$ は $k+1$ 次以上の入れ子をもたない．

(ii) $\lambda_1^{(i)} \le k$ $(0 \le i \le n)$.

よって，この定理（共役分割版を考える）から，$\#\mathrm{VT}_n(h) = \#\mathrm{NN}_n(h+1)$ となり，定理 1.2 の (b) = (c) の全単射による証明が得られる．

## 3 円筒型 Schur 関数に対する Gordon–Bender–Knuth 型等式

この節では，円筒型 Schur 関数を定義した後，円筒型 Schur 関数に対する Gordon–Bender–Knuth 型の等式（定理 3.3）を与え，その証明について説明する．

### 3.1　円筒型 Schur 関数

正整数 $m$, $w$ を固定する．分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ は，

$$l(\lambda) \le m, \quad \lambda_1 - \lambda_m \le w$$

をみたすとき，$\boldsymbol{(m,w)}$ **円筒型** ($(m,w)$-cylindric) であるという．$(m,w)$ 円筒型分割全体のなす集合を $\mathrm{Par}(m,w)$ と表す．$(m,w)$ 円筒型分割 $\lambda$ に対して，$(m,w)$ 周期的 Young 図形を

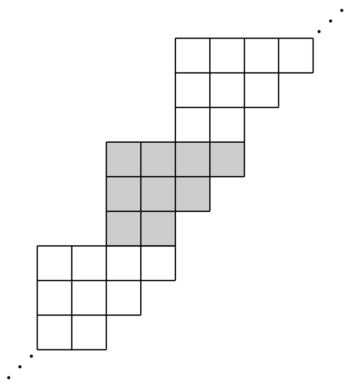
$$\widetilde{D}^{[m,w]}(\lambda) = \{(i+km, j-kw) \in \mathbb{Z}^2 : (i,j) \in \lambda,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

によって定義し，円筒 $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(m,-w)$ の部分集合である円筒型 Young 図形 $\lambda[m,w]$ を

$$\lambda[m,w] = \pi\big(\widetilde{D}^{[m,w]}(\lambda)\big)$$

（ただし，$\pi$ は射影 $\pi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(m,-w)$ である）とおいて定める．例えば，$\lambda = (4,3,2)$, $m=3$, $w=2$ のとき，

$$\widetilde{D}^{[3,2]}(4,3,2) =$$



である（陰をつけた部分が $D(4,3,2)$ である）．

一般には，$\lambda$ が $(m,w)$ 円筒型であっても，その共役分割 ${}^t\lambda$ が $(w,m)$ 円筒型であるとは限らない．しかし，周期的 Young 図形の転置を考えることによって，$\mathrm{Par}(m,w)$ と $\mathrm{Par}(w,m)$ の間の全単射が構成できる．

**補題 3.1.** (Goodman–Wenzl [8, p.253]) 全単射 $\tau : \mathrm{Par}(m,w) \to \mathrm{Par}(w,m)$ で，

$$\widetilde{D}^{[w,m]}(\tau(\lambda)) = \{(j,i) \in \mathbb{Z}^2 : (i,j) \in \widetilde{D}^{[m,w]}(\lambda)\}$$

となるものが存在する．

例えば，$\lambda = (4,3,2)$, $m=3$, $w=2$ のとき，$\tau(\lambda) = (5,4)$ である．また，$\lambda_1 < w$ ならば $\tau(\lambda) = {}^t\lambda$ である．

**定義 3.2.** $\lambda$ を $(m,w)$ 円筒型分割とする．$\lambda$ を枠とする半標準盤 $T$ は，

$$\widetilde{T}(i+km, j-kw) = T(i,j) \quad ((i,j) \in D(\lambda),\ k \in \mathbb{Z})$$

によって定義される盤 $\widetilde{T}:\widetilde{D}^{[m,w]}(\lambda)\to\mathbb{P}$ の各行が広義単調増加，各列が狭義単調増加となるとき，**$(m,w)$ 円筒型** ($(m,w)$-cylindric) であるという．$\lambda$ を枠とする $(m,w)$ 円筒型半標準盤全体のなす集合を $\mathrm{CSSTab}(\lambda[m,w])$ と表す．そして，その母関数を

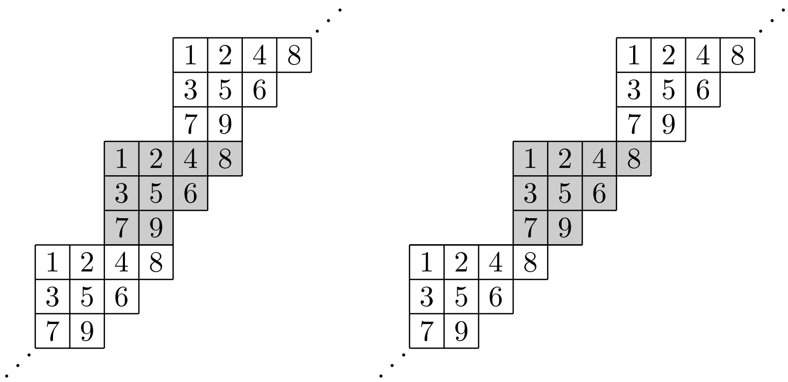
$$s_\lambda^{[m,w]}(\boldsymbol{x})=\sum_{T\in\mathrm{CSSTab}(\lambda[m,w])}\boldsymbol{x}^T$$

と表し，**$(m,w)$ 円筒型 Schur 関数** ($(m,w)$-cylindric Schur function) と呼ぶ．

例えば，$\lambda=(4,3,2)$ を枠とする半標準盤

$$T=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&4&8\\\hline 3&5&6\\\cline{1-3} 7&9\\\cline{1-2}\end{array}$$

は，$(3,3)$ 円筒型であるが，$(3,2)$ 円筒型ではない．



一般に，$(m,w)$ 円筒型分割 $\lambda$ を枠とする半標準盤 $T$ が $(m,w)$ 円筒型であるための必要十分条件は，

$$T(1,j+w)>T(m,j)$$

（両辺が定義されるとき）が成り立つことである．特に，$w>\lambda_1$ のとき，この条件は空な条件となるので，$\mathrm{CSSTab}(\lambda[m,w])=\mathrm{SSTab}(\lambda)$ であり，$s_\lambda^{[m,w]}(\boldsymbol{x})=s_\lambda(\boldsymbol{x})$ となる．

本稿の主定理の 1 つは，次の等式（アフィン版 Gordon–Bender–Knuth の等式）である．

**定理 3.3.** (Huh–Kim–Krattenthaler–Okada [12]) 正整数 $m$, $w$ に対して，$N=m+w$ とおくとき，

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}(m,w)}s_{\tau(\lambda)}^{[w,m]}(\boldsymbol{x})$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k\geq 0}e_k(\boldsymbol{x})\cdot\det\Big(F^+_{-i+j,N}(\boldsymbol{x})-F^+_{i+j,N}(\boldsymbol{x})\Big)_{1\leq i,j\leq h} & (m=2h+1\text{ のとき}),\\ \det\Big(F^-_{-i+j,N}(\boldsymbol{x})+F^-_{i+j-1,N}(\boldsymbol{x})\Big)_{1\leq i,j\leq h} & (m=2h\text{ のとき}).\end{cases}\tag{7}$$

ここで，$e_k(\boldsymbol{x})=s_{(1^k)}(\boldsymbol{x})$ は $k$ 次基本対称関数であり，

$$f_r(\boldsymbol{x})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e_k(\boldsymbol{x})e_{k+r}(\boldsymbol{x}),\quad F^+_{r,N}(\boldsymbol{x})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}f_{r+kN}(\boldsymbol{x}),\quad F^-_{r,N}(\boldsymbol{x})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^kf_{r+kN}(\boldsymbol{x})$$

である．

この定理で $w \to \infty$ の極限を考え $\widehat{\Lambda}$ の対合 $\omega$ ($\omega(e_r) = h_r$) を施すと，Gordon–Bender–Knuth の等式（定理 1.1）が得られる．

### 3.2　定理 3.3 の証明

この小節では，定理 3.3 の証明の概要を与える．証明は，(7) の左辺の和を石川–若山の小行列式の和公式（補題 3.6）が適用できる形に変形し，小行列式の和公式を適用して得らえるパフィアンを Gordon の補題（補題 3.7）を用いて 1 つの行列式に書き直す，という方針で進める．以下，正整数 $m, w$ を固定し，$N = m + w$ とおく．

**第 1 段階**　まず，円筒型半標準盤を非交差格子経路に翻訳し，[7, Proposition 1] の議論を用いることによって，円筒型 Schur 関数に対する次の形の Jacobi–Trudi 型等式を示すことができる．

**命題 3.4.** $(m, w)$ 円筒型分割 $\lambda$ に対して，

$$s^{[w,m]}_{\tau(\lambda)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k \in Q^\vee} \det\left(e_{\lambda_i - i + j + Nk_i}(\boldsymbol{x})\right)_{1 \le i,j \le m}. \tag{8}$$

ここで，$Q^\vee = \{k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : k_1 + \cdots + k_m = 0\}$（$A_{m-1}$ 型ルート系の余ルート格子）である．

**第 2 段階**　次に，(7) の左辺を長さ $m$ 以下の分割にわたる和に書き直す．

$$X = \{(\lambda, k) \in \mathrm{Par}(m, w) \times Q^\vee : \lambda_i + m - i + Nk_i \ge 0 \, (1 \le i \le m)\}$$

とおくと，命題 3.4 より (7) の左辺は

$$\sum_{(\lambda,k) \in X} \det\left(e_{\lambda_i - i + j + Nk_i}(\boldsymbol{x})\right)_{1 \le i,j \le m}$$

となる．

Euclid 空間 $V = \mathbb{R}^m$（内積を $\langle \ , \ \rangle$ で表す）を考え，$\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ をその標準的正規直交基底とする．$\delta = (m-1, m-2, \dots, 1, 0)$ とおく．$\widetilde{S}_m = S_m \ltimes Q^\vee$ をアフィン対称群（つまり $A^{(1)}_{m-1}$ 型アフィン Weyl 群）とし，

$$(\sigma, k) \cdot \lambda = \sigma(\lambda + Nk + \delta) - \delta \quad (\sigma \in S_m, \, \kappa \in Q^\vee, \, \lambda \in V)$$

で与えられる $\widetilde{S}_m$ の $V$ へのドット作用を考える．

$$\begin{aligned} M &= \{\lambda \in V : \langle \lambda + \delta, \varepsilon_i - \varepsilon_j \rangle \notin N\mathbb{Z} \ (1 \le i < j \le m)\}, \\ A &= \{\lambda \in V : 0 < \langle \lambda + \delta, \varepsilon_i - \varepsilon_j \rangle < N \ (1 \le i < j \le m)\}. \end{aligned}$$

とおく．このとき，$A$ は基本アルコーブであり，$A \cap (\mathbb{Z}_{\ge 0})^m = \mathrm{Par}(m, w)$ である．整数 $p$ を $N$ で割った余りを $R_N(p) \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ と表すと，

$$M \cap \mathbb{Z}^m = \{\lambda \in \mathbb{Z}^m : R_N(\lambda_i + m - i) \ (1 \le i \le m) \text{ は互いに相異なる }\}$$

となる．さらに，任意の $\mu \in M$ は，$\widetilde{\sigma} = (\sigma, \kappa) \in \widetilde{S}_m$ と $\lambda \in A$ を用いて，$\mu = \widetilde{\sigma} \cdot \lambda$ の形に一意的に表される（例えば [13, Proposition 4.3] を見よ）．この事実を用いると，$X$ と

$$Y = \{\mu \in \mathrm{Par}(m) : R_N(\mu_i + m - i)\ (1 \le i \le m) \text{ は互いに相異なる }\}$$

の間の全単射を構成することができる．実際，$\mu \in Y \subset M$ に対して，$(\sigma, k) \cdot \mu = \lambda$ となる $(\sigma, k) \in \widetilde{S}_m$ と $\lambda \in A$ が一意的に定まるので，$\mu$ に $(\lambda, k) \in X$ を対応させることにより，$X$ と $Y$ の間の全単射が得られ，

$$\det \left(e_{\lambda_i - i + j + Nk_i}\right)_{1 \le i,j \le m} = \mathrm{sgn}(\sigma) \det \left(e_{\mu_i - i + j}\right)_{1 \le i,j \le m}.$$

よって，(7) の左辺は

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}(m,w)} s^{[w,m]}_{\tau(\lambda)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mu \in \mathrm{Par}(m)} u(\mu) \det \left(e_{\mu_i - i + j}\right)_{1 \le i,j \le m} \tag{9}$$

と長さ $m$ 以下の分割全体にわたる重み付き和として表すことができ，係数 $u(\mu)$ は

$$u(\mu) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & (\mu \in Y \text{ のとき}) \\ 0 & (\mu \notin Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる．ただし，$\sigma \in S_m$ は $(\sigma, k) \cdot \mu \in A$ で定まる置換である．

**第 3 段階**　(9) の右辺の係数 $u(\mu)$ がある交代行列の部分パフィアンとして表されることを示す．以下，$m = 2h$ が偶数である場合を扱う．奇数である場合もほぼ同様である．

交代行列 $B = \left(b_{i,j}\right)_{i,j \ge 1}$ と正整数列 $I = (i_1, \ldots, i_m)$ に対して，$B$ から $I$ に対応する行，列を取り出して得られる部分交代行列を $B(I)$ と表す：

$$B(I) = \left(b_{i_p, i_q}\right)_{1 \le p,q \le m}.$$

また，分割 $\mu \in \mathrm{Par}(m)$ に対して，

$$I_m(\mu) = (\mu_m + 1, \mu_{m-1} + 2, \ldots, \mu_1 + m)$$

とおく．すると，対応 $\mu \mapsto I_m(\mu)$ は長さ $m$ 以下の分割と正整数からなる長さ $m$ の単調増加列の間の全単射を与える．

さて，数列 $\left(\beta_p\right)_{p \in \mathbb{Z}}$ を

$$\beta_p = \begin{cases} (-1)^k & (p = kN + r\ (k,\, r \in \mathbb{Z}),\ 0 < r < N \text{ と表されるとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{10}$$

とおいて定義し，交代行列 $B$ を

$$B = \left(\beta_{j-i}\right)_{i,j \ge 1} \tag{11}$$

とおいて定める．このとき，(9) の係数 $u(\mu)$ は次のように $B$ の部分パフィアンとして与えられる．

**補題 3.5.** 長さ $m$ 以下の分割 $\mu$ に対して，

$$u(\mu) = \mathrm{Pf}\, B(I_m(\mu)).$$

**略証.** 交代行列 $B$ の定義とパフィアンの性質を用いることによって，次の (a), (b), (c) を示すことができる：

(a) $(m, w)$ 円筒型分割 $\lambda \in \mathrm{Par}(m, w)$ に対して，$\mathrm{Pf}\, B(I_m(\lambda)) = 1$.

(b) 正整数の単調増加列 $(i_1, \ldots, i_m)$ が $i_m - i_1 > N$ をみたすとき，

$$\mathrm{Pf}\, B(i_1 + N, i_2, \ldots, i_{m-1}, i_m - N) = \mathrm{Pf}\, B(i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}, i_m).$$

(iii) 正整数の単調増加列 $(i_1, \ldots, i_m)$ がある $k < l$ に対して $i_k \equiv i_l \bmod N$ をみたすとき，

$$\mathrm{Pf}\, B(i_1, \ldots, i_m) = 0.$$

このとき，補題の主張は，これらの性質と $\mu_1 - \mu_m$ に関する帰納法を用いることによって，証明できる． □

一般に，行列 $T = \left(t_{i,j}\right)_{1 \le i \le m, j \le 1}$ と正整数列 $J = (j_1, \ldots, j_m)$ に対して，$T$ から $J$ に対応する列を取り出して得られる正方行列を $T([m]; J)$ と表す：

$$T = \left(t_{p, j_q}\right)_{1 \le p, q \le m}.$$

行列 $T$ として

$$T = \left(e_{j-i}(\boldsymbol{x})\right)_{1 \le i \le m,\, j \ge 1} \tag{12}$$

を取ると，$T([m]; I_m(\lambda)) = (e_{\lambda_i - i + j}(\boldsymbol{x}))_{1 \le i, j \le m}$ となるから，第 2 段階の (9) と上の補題 3.5 から，

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}(m, 2h)} s^{[w, 2h]}_{\tau(\lambda)}(\boldsymbol{x}) = \sum_J \mathrm{Pf}\, B(J) \det T([2h]; J). \tag{13}$$

ここで，$J$ は正整数からなる長さ $m$ の単調増加列全体を動く．

**第 4 段階**　次の石川–若山の小行列式の和公式を (13) の右辺に適用する．

**補題 3.6.** (石川–若山 [14, Theorem 1]) $m$ を偶数とする．交代行列 $B = \left(b_{i,j}\right)_{i,j \ge 1}$ と $m$ 行からなる行列 $T = \left(t_{i,j}\right)_{1 \le i \le m, j \le 1}$ に対して，

$$\sum_J \mathrm{Pf}\, B(J) \cdot \det T([m]; J) = \mathrm{Pf}\left(TB{}^tT\right).$$

ここで，和は正整数からなる長さ $m$ の単調増加列 $J$ 全体にわたる．

この石川–若山の小行列式の和公式を (11) で与えられる交代行列 $B$ と (12) で与えられる行列 $T$ に対して適用する．このとき，$TB{}^tT$ の $(i, j)$ 成分は

$$\sum_{p, q \in \mathbb{Z}} e_{p-i}(\boldsymbol{x}) \beta_{q-p} e_{q-j}(\boldsymbol{x}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \beta_r \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k(\boldsymbol{x}) e_{k+r-j+i}(\boldsymbol{x})$$

で与えられるから，$f_r(\boldsymbol{x}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_k(\boldsymbol{x})e_{k+r}(\boldsymbol{x})$ を用いて

$$z_r = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \beta_p f_{p-r}(\boldsymbol{x}),$$

とおくと，

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}(m,2h)} s^{[w,2h]}_{\tau(\lambda)}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Pf}\left(z_{j-i}\right)_{1\le i,j\le 2h}. \tag{14}$$

**第 5 段階**　最後に，次の Gordon の補題を用いて，(14) の右辺のパフィアンを行列式に書き直す．

**補題 3.7.** (Gordon [9, Lemma 1]) $z_p$ $(p\in\mathbb{Z})$ が $z_{-p} = -z_p$ をみたすとき，

$$\mathrm{Pf}\left(z_{j-i}\right)_{1\le i,j\le 2h} = \det\left(\sum_{s=0}^{2\min(i,j)-2} (-1)^s \left(z_{i+j-1-s} - z_{i+j-2-s}\right)\right)_{1\le i,j\le h}.$$

ここで，数列 $\left(\beta_p\right)_{p\in\mathbb{Z}}$ の定義 (10) から

$$\beta_p - \beta_{p-1} = \begin{cases} (-1)^k & (p = Nk \text{ または } p = Nk+1\ (k\in\mathbb{Z}) \text{ と表されるとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となることに注意すると，

$$z_p - z_{p-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \left(f_{kN-r} + f_{kN+1-r}\right) = F^-_{-r} + F^-_{-r+1}$$

ここで，$f_r = f_{-r}$ より $F^-_r = F^-_{-r}$ となるから，

$$\sum_{s=0}^{2\min(i,j)-2} (-1)^s \left(z_{i+j-1-s} - z_{i+j-2-s}\right) = F^-_{i+j-1} + F^-_{|i-j|} = F^-_{i+j-1} + F^-_{j-i}.$$

よって，(14) の右辺のパフィアンに補題 3.7 を適用することにより，

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Par}(m,w)} s^{[w,m]}_{\tau(\lambda)}(\boldsymbol{x}) = \det\left(F^-_{-i+j,N}(\boldsymbol{x}) + F^-_{i+j-1,N}(\boldsymbol{x})\right)_{1\le i,j\le h}$$

が得られる．これで定理 3.3 の $m = 2h$ の場合の証明が完成した．

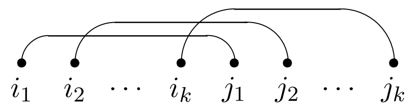
## 4　円筒型標準盤の組合せ論への応用

この節では，円筒型 Schur 関数に対する Gordon–Bender–Knuth 型の等式（定理 3.3）の円筒型標準盤の数え上げ問題への応用を与える．

## 4.1　円筒型標準盤と揺動盤，マッチング

まず，マッチングにおいて入れ子の双対概念である交差を導入する（定理 2.9, 4.2 を見よ）．

**定義 4.1.** マッチング $\pi \in \mathrm{M}_n$ に対して，その $k$ 個のブロック $\{i_1, j_1\}, \ldots, \{i_k, j_k\}$ は，$i_1 < \cdots < i_k < j_1 < \cdots < j_k$ をみたすとき，$\pi$ の $\boldsymbol{k}$ **次交差** ($k$-crossing) であるという．




$k$ 次以上の交差をもたない $[n]$ 上のマッチング全体のなす集合を $\mathrm{NC}_n(k)$ と表す．

例えば，第 2 節で挙げた例 (6) のマッチング $\pi$ では，$\{1,3\}, \{2,7\}$ は 2 次交差である．このとき，定理 2.9 の双対版として次の定理が成り立つ．

**定理 4.2.** (Chen–Deng–Du–Stanley–Yan [4, Theorem 3.2]) 第 2.4 節で与えた全単射 $\varphi : \mathrm{M}_n \to \mathrm{VT}_n$ の下で $\varphi(\pi) = \bigl(\lambda^{(i)}\bigr)_{i=0}^{n}$ であるとき，次の (i), (ii) は同値である：

(i) $\pi$ は $k+1$ 次以上の交差をもたない．
(ii) $l(\lambda^{(i)}) \leq k$ $(0 \leq i \leq n)$.

正整数 $h$, $w$ に対して，

$$\mathrm{VT}_n(h,w) = \Bigl\{ \bigl(\lambda^{(i)}\bigr)_{i=0}^{n} \in \mathrm{VT}_n : l(\lambda^{(i)}) \leq h,\ \lambda_1^{(i)} \leq w\ (0 \leq i \leq n) \Bigr\}$$

とおく．すると，対応 $\bigl(\lambda^{(i)}\bigr)_{i=0}^{n} \mapsto \bigl({}^{t}\lambda^{(i)}\bigr)_{i=0}^{n}$ は，$\mathrm{VT}_n(h,w)$ から $\mathrm{VT}_n(w,h)$ への全単射を与えるから，

$$\#\,\mathrm{VT}_n(h,w) = \#\,\mathrm{VT}_n(w,h).$$

また，定理 2.9, 4.2 から，

**系 4.3.** 非負整数 $h$, $w$ に対して，

$$\#\,\mathrm{VT}_n(h,w) = \#\bigl(\mathrm{NN}_n(h+1) \cap \mathrm{NC}_n(w+1)\bigr).$$

よって，定理 1.2 を考慮すると，次は自然な問である．

**問 4.4.** 非負整数 $h$, $w$ に対して，大きさ $n$ の標準盤からなる集合（つまり，$\mathrm{STab}_n$ の部分集合）で，$\mathrm{NN}_n(h+1) \cap \mathrm{NC}_n(w+1)$ と同じ個数からなるものは何か？

この問の答えが円筒型標準盤である．

**定義 4.5.** $\lambda$ を $(m,w)$ 円筒型分割とする．$\lambda$ を枠とする $(m,w)$ 円筒型半標準盤 $T \in \mathrm{CSSTab}(\lambda[m,w])$ は，$1, 2, \ldots, n$（ただし $n = |\lambda|$）が 1 回ずつ現れるとき，$\boldsymbol{(m,w)}$ **円筒型標準盤** ($(m,w)$-cylindric standard tableau) であるという．$\lambda$ を枠とする $(m,w)$ 円筒型標準盤全体のなす集合を $\mathrm{CSTab}(\lambda[m,w])$ と表す．また，

$$\mathrm{CSTab}_n(m,w) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathrm{Par}_n(m,w)} \mathrm{CSTab}(\lambda[m,w])$$

とおく．

次が，本稿のもう 1 つの主定理である．

**定理 4.6.** (Huh–Kim–Krattenthaler–Okada [12]) 正整数 $n$ と非負整数 $h, w$ に対して，

$$\mathrm{CSTab}_n(2h+1, 2w+1) = \#\,\mathrm{VT}_n(h, w) = \#\big(\mathrm{NN}_n(h+1) \cap \mathrm{NC}_n(w+1)\big). \tag{15}$$

非負整数 $h$ を固定するとき，

$$\bigcup_{w \geq 0} \mathrm{CSTab}_n(2h+1, 2w+1) = \mathrm{STab}_n(2h+1),$$
$$\bigcup_{w \geq 0} \mathrm{VT}_n(h, w) = \mathrm{VT}_n(h),$$
$$\bigcup_{w \geq 0} \big(\mathrm{NN}_n(h+1) \cap \mathrm{NC}_n(w+1)\big) = \mathrm{NN}_n(h+1)$$

となるから，定理 4.6 において $w \to \infty$ の極限を考えると，定理 1.2 が復元できる．

## 4.2 定理 4.6 の証明

系 4.3 より (15) の 2 番目の等号が成り立つから，定理 4.6 を証明するためには，(15) の最初の等号 $\#\,\mathrm{CSTab}_n(2h+1, 2w+1) = \#\,\mathrm{VT}_n(h, w)$ を示せばよい．円筒型 Schur 関数と円筒型標準盤の定義から，$\#\,\mathrm{CSTab}_n(\lambda[m, w])$ は $s_\lambda^{[m,w]}(\boldsymbol{x})$ における $x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数に等しい．そこで，Gordon–Bender–Knuth 型の等式（定理 3.3）において，$x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数を比較する．より一般に，

**定理 4.7.** (Huh–Kim–Krattenthaler–Okada [12]) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$ に対して，(7) の右辺

$$\sum_{k \geq 0} e_k(\boldsymbol{x}) \cdot \det\Big(F^+_{-i+j,(2h+1)+(2w+1)}(\boldsymbol{x}) - F^+_{i+j,(2h+1)+(2w+1)}(\boldsymbol{x})\Big)_{1 \leq i,j \leq h}$$

における $\boldsymbol{x}^\alpha$ の係数は，次の 5 つの条件 (i)〜(v) をみたす分割の列 $\big(\lambda^{(i)}\big)_{i=0}^{2n}$ の個数に等しい：

- (i) $\emptyset = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \supset \lambda^{(2)} \subset \lambda^{(3)} \supset \lambda^{(4)} \subset \cdots \supset \lambda^{(2n-2)} \subset \lambda^{(2n-1)} \supset \lambda^{(2n)} = \emptyset$.
- (ii) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$\lambda^{(2i-1)}/\lambda^{(2i-2)}$, $\lambda^{(2i-1)}/\lambda^{(2i)}$ は垂直帯である．ここで，歪 Young 図形 $D(\lambda) \setminus D(\mu)$ の各行に高々 1 つの正方形しかないとき，$\lambda/\mu$ は垂直帯であるという．
- (iii) $i = 0, 1, \ldots, 2n$ に対して，$l(\lambda^{(i)}) \leq h$.
- (iv) $i = 0, 1, \ldots, n$ に対して，$\lambda_1^{(2i)} \leq w$.
- (v) 各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，$(|\lambda^{(2i-1)}| - |\lambda^{(2i-2)}|) + (|\lambda^{(2i-1)}| - |\lambda^{(2i)}|) \in \{\alpha_i, \alpha_i - 1\}$ である．

**定理 4.6 の証明.** まず，$s_\lambda^{[m,w]}(\boldsymbol{x})$ における $x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数は $\#\,\mathrm{CSTab}(\lambda[m, w])$ である．また，$T \in \mathrm{CSTab}(\lambda[m, w])$ に対して，$\widetilde{D}^{[m,w]}(\lambda)$ 上の周期的標準盤 $\widetilde{T}$ の転置をとり，

$D(\tau(\lambda))$ に制限することにより，自然な全単射 $\mathrm{CSTab}(\lambda[m,w]) \to \mathrm{CSTab}(\tau(\lambda)[w,m])$ が得られる．よって，(7) の左辺における $x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数は，

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Par}_n(m,w)} \#\,\mathrm{CSTab}(\tau(\lambda)[w,m]) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Par}_n(m,w)} \#\,\mathrm{CSTab}(\lambda[m,w]) = \#\,\mathrm{CSTab}_n(m,w)$$

に等しい．

一方，定理 4.7 において $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ のときを考えると，条件 (v) から，次のいずれか 1 つが成り立つ：

(v-1) $\lambda^{(2i-2)} = \lambda^{(2i-1)} = \lambda^{(2i)}$.

(v-2) $\lambda^{(2i-2)} = \lambda^{(2i-1)}$ であり，$|\lambda^{(2i-1)}| = |\lambda^{(2i)}| + 1$.

(v-3) $\lambda^{(2i-1)} = \lambda^{(2i)}$ であり，$|\lambda^{(2i-1)}| = |\lambda^{(2i-2)}| + 1$.

よって，$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ のときは，定理 4.7 の条件をみたす分割の列は，$\lambda^{(0)}, \lambda^{(2)}, \lambda^{(4)}, \ldots, \lambda^{(2n)}$ から定まり，$\left(\lambda^{(2i)}\right)_{i=0}^{n} \in \mathrm{VT}_n(h,w)$ である．従って，(7) の右辺における $x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数が $\mathrm{VT}_n(h,w)$ に等しいことがわかる．$\square$

最後に，次の問題を提示して本稿を終える．

**問題 4.8.** 定理 4.6 を組合せ論的に証明せよ．つまり，$\mathrm{CSTab}_n(2h+1, 2w+1)$ と $\mathrm{VT}_n(h,w)$ あるいは $\mathrm{NN}_n(h+1) \cap \mathrm{NC}_n(w+1)$ の間の全単射を構成せよ．

## 参考文献


[1] E. A. Bender and D. E. Knuth, Enumeration of plane partitions, J. Combin. Theory Ser. A **13** (1972), 40–54.

[2] G. Benkart and J. Stroomer, Tableaux and insertion schemes for spinor representations of the orthogonal Lie algebra $\mathfrak{so}(2r+1, \mathbb{C})$, J. Combin. Theory Ser. A **57** (1991), 211–237.

[3] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, and W. Fulton, Quantum multiplication of Schur polynomials, J. Algebra **219** (1999), 728–746.

[4] W. Y. C. Chen, E. Y. P. Deng, R. R. X. Du, R. P. Stanley, and C. H. Yan, Crossings and nestings of matchings and partitions, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 1555–1575.

[5] S.-P. Eu, T.-S. Fu, J. T. Hou, and T.-W. Hsu, Standard Young tableaux and colored Motzkin paths, J. Combin. Theory Ser. A **120** (2013), 1786–1803.

[6] I. M. Gessel, Symmetric functions and P-recursiveness, J. Combin. Theory Ser. A **53** (1990), 257–285.

[7] I. M. Gessel and C. Krattenthaler, Cylindric partitions, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 429–479.

[8] F. M. Goodman and H. Wenzl, Littlewood–Richardson coefficients for Hecke algebras at roots of unity, Adv. Math. **82** (1990), 244–265.

[9] B. Gordon, Notes on plane partitions V, J. Combin. Theory Ser. B **11** (1971), 157–168.

[10] D. Gouyou-Beauchamps, Standard Young tableaux of height 4 and 5, European J. Combin. **10** (1989), 69–82.

[11] D. J. Grabiner and P. Magyar, Random walks in Weyl chambers and the decomposition of tensor powers, J. Algebraic Combin. **2** (1993), 239–260.

[12] J. Huh, J. Kim, C. Krattenthaler, and S. Okada, Affine Gordon–Bender–Knuth identities and cylindric Young tableaux, arXiv:2301.13117.

[13] J. E. Humphreys, "Reflection Groups and Coxeter Groups", Cambridge Stud. Adv. Math. **29**, Cambridge Univ. Press, 1992.

[14] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formula for pfaffians, Linear and Multilinear Algebra **39** (1995), 285–305.

[15] S. Okada, Pieri rules for classical groups and equinumeration between generalized oscillating tableaux and semistandard tableaux, Electron. J. Combin. **23** (2016), Paper 4.43, 27 pp.

[16] A. Postnikov, Affine approach to quantum Schubert calculus, Duke Math. J. **128** (2005), 473–509.

[17] A. Regev, Asymptotic values for degrees associated with strips of Young diagrams, Adv. Math. **41** (1981), 115–136.

[18] R. P. Stanley, "Enumerative Combinatorics Vol.2", Cambridge Stud. Adv. Math. **62**, Cambridge Univ. Press, 1999.

[19] H. Wenzl, Hecke algebras of type $A_n$ and subfactors, Invent. Math. **92** (1988), 349–383.

[20] D. Zeilberger, The number of ways of walking in $x_1 \geq \cdots \geq x_k \geq 0$ for $n$ days, starting and ending at the origin, where at each day you may either stay in place or move one unit in any direction, equals the number of $n$-cell standard Young tableaux with $\leq 2k+1$ rows, The Personal Journal of Shalosh B. Ekhad and Doron Zeilberger, 2007.