多重 L 値の多項式補間について
On interpolated multiple L-values

田中立志 * (京都産業大学)
Tatsushi Tanaka
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kyoto Sangyo University

1 定義, 代数的定式化

1.1 定義

山本 [Y] で導入された補間多重ゼータ値の概念を多重 L 値へと拡張し, 代数的定式化, いくつかの関係式, 特殊値について, 得られたものを報告する.（伊藤慎也, 若林徳子との共同研究 [ITW] に基づいている.）

正整数 r を固定する. μ_r を 1 の r 乗根の集合とする. インデックス $(k_1,\dots,k_n;a_1,\dots,a_n)$ $(k_1,\dots,k_n\in\mathbb{N},a_1,\dots,a_n\in\mu_r,(k_1,a_1)\neq(1,1))$ に対し,

$$L_*^t(k_1,\dots,k_n;a_1,\dots,a_n)=\lim_{M\to\infty}\sum_{M\geq m_1\geq\cdots\geq m_n>0}\frac{a_1^{m_1}\cdots a_n^{m_n}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}t^{\sigma(m_1,\dots,m_n)}\in\mathbb{C}[t]$$

および

$$L_{ш}^t(k_1,\dots,k_n;a_1,\dots,a_n)=\lim_{M\to\infty}\sum_{M\geq m_1\geq\cdots\geq m_n>0}\frac{a_1^{m_1-m_2}\cdots a_{n-1}^{m_{n-1}-m_n}a_n^{m_n}}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}t^{\sigma(m_1,\dots,m_n)}\in\mathbb{C}[t]$$

と定義する. ただし, $\sigma(m_1,\dots,m_n)=\#\{i\mid 1\leq i<n,m_i=m_{i+1}\}$ とする. これらは順に, 調和タイプ, シャッフルタイプの多重 L 値 ([AK]) を, Bachmann[B] の手法を援用して拡張した 1 変数多項式である. $t=0$ なら通常の多重 L 値, $t=1$ なら多重 L-スター値になっている.

1.2 代数的定式化

これらの補間多重 L 値を代数的に定式化しておく. $\mathfrak{A}_r$ をアルファベットの集合 $\{x,y_a\mid a\in\mu_r\}$ とし, $\mathcal{A}_r=\mathbb{Q}[t]\langle\mathfrak{A}_r\rangle$ を $\mathfrak{A}_r$ の元を不定元とする $r+1$ 変数非可換多項式代数とする.

$$\mathcal{A}_r^1:=\mathbb{Q}[t]\oplus\mathcal{A}_{r,+}^1:=\mathbb{Q}[t]\oplus\sum_{a\in\mu_r}\mathcal{A}_ry_a\supset\mathcal{A}_r^0:=\mathbb{Q}[t]\oplus\sum_{a\in\mu_r}x\mathcal{A}_ry_a\oplus\sum_{\substack{a,b\in\mu_r\\ b\neq1}}y_b\mathcal{A}_ry_a.$$

はそれぞれ $\mathcal{A}_r$ の部分代数になる. 便利のため, $z_{k,a}=x^{k-1}y_a\in\mathcal{A}_r$ $(k\geq1,a\in\mu_r)$ とおく.

$\mathbb{C}$-線形写像 $\mathcal{L}_*^t:\mathcal{A}_r^0\to\mathbb{C}$ を, $\mathcal{L}_*^t(1)=1$ および

$$\mathcal{L}_*^t(z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_n,a_n})=L_*^t(k_1,\dots,k_n;a_1,\dots,a_n)$$

*email: t.tanaka@cc.kyoto-su.ac.jp

$(k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N},a_1,\ldots,a_n\in\mu_r,(k_1,a_1)\neq(1,1))$ で定義する. $\mathfrak{z}=\sum_{k\geq 1,a\in\mu_r}\mathbb{Q}[t]z_{k,a}$ とおく. 積 $\diamond:\mathfrak{z}\times\mathcal{A}_r^1\to\mathcal{A}_r^1$ を,

$$\alpha\diamond 1=0,\quad \alpha\diamond(\beta w)=(\alpha\diamond\beta)w$$

$(\alpha,\beta\in\mathfrak{z},w\in\mathcal{A}_r^1)$ および

$$z_{k,a}\diamond z_{l,b}=z_{k+l,ab}\quad (k,l\in\mathbb{N},a,b\in\mu_r)$$

で定義する. [HI] にも述べてあるように, 積 $\diamond$ は

$$1\diamond w=w\diamond 1=w,$$
$$wa\diamond bv=w(a\diamond b)v$$

$(w,v\in\mathcal{A}_r,a,b\in\mathfrak{z})$ によって $\mathcal{A}_r$ 上の非可換積に拡張される. 代数 $(\mathbb{Q}[t]+\mathfrak{z},\diamond)$ は代数 $(\mathcal{A}_r,\diamond)$ の可換部分代数である. また,

$$\mathcal{L}_*^t=\mathcal{L}_*S_*^t \tag{1}$$

が成り立つことがわかる. ここに, $\mathcal{L}_*=\mathcal{L}_*^0$ であり, $S_*^t\in\mathrm{End}(\mathcal{A}_t^1)$ は $S_*^t(1)=1$ および

$$S_*^t(\alpha w)=\alpha S_*^t(w)+t\alpha\diamond S_*^t(w)$$

$(\alpha\in\mathfrak{z},w\in\mathcal{A}_r^1)$ により定義される.

同様に, $\mathbb{C}$-線形写像 $\mathcal{L}_{ш}^t:\mathcal{A}_r^0\to\mathbb{C}$ を, $\mathcal{L}_{ш}^t(1)=1$ および

$$\mathcal{L}_{ш}^t(z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_n,a_n})=L_{ш}^t(k_1,\ldots,k_n;a_1,\ldots,a_n)$$

$(k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N},a_1,\ldots,a_n\in\mu_r,(k_1,a_1)\neq(1,1))$ で定義する.

$$\mathcal{L}_{ш}^t=\mathcal{L}_{ш}S_{ш}^t \tag{2}$$

が成り立つことがわかる. ここに, $\mathcal{L}_{ш}=\mathcal{L}_{ш}^0$ であり, $S_{ш}^t\in\mathrm{End}(\mathcal{A}_t)$ は $S_*^t(1)=1$ および

$$S_{ш}^t(wu)=s^t(w)u$$

$(w\in\mathcal{A}_r,u\in\mathfrak{A}_r)$ で定義され, $s^t\in\mathrm{Aut}(\mathcal{A}_r)$ は

$$s^t(x)=x,\quad s^t(y_a)=tx+y_a\quad (a\in\mu_r)$$

で与えられる.

$\mathcal{I}\in\mathrm{End}(\mathcal{A}_r)$ を $\mathcal{I}(1)=1$ および

$$\mathcal{I}(z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_n,a_n}x^l)=z_{k_1,a_1}z_{k_2,a_1a_2}\cdots z_{k_1,a_1\cdots a_n}x^l$$

$(l\geq 0,k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{N},a_1,\ldots,a_n\in\mu_r)$ で定義する. 明らかにこの逆写像は

$$\mathcal{I}^{-1}(z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_n,a_n}x^l)=z_{k_1,a_1}z_{k_2,\frac{a_2}{a_1}}\cdots z_{k_1,\frac{a_n}{a_{n-1}}}x^l$$

である. $\mathcal{A}_r^1$ 上で

$$\mathcal{I}S_*^t=S_{ш}^t\mathcal{I}$$

が成り立つことが容易にわかる. また, $\mathcal{L}_*=\mathcal{L}_{ш}\mathcal{I}$ が成り立つので,

$$\mathcal{L}_*^t=\mathcal{L}_*S_*^t=\mathcal{L}_*\mathcal{I}^{-1}S_{ш}^t\mathcal{I}=\mathcal{L}_{ш}S_{ш}^t\mathcal{I}=\mathcal{L}_{ш}^t\mathcal{I}$$

も成り立つことがわかる.

1.3 調和積 $\overset{t}{*}$

$\mathbb{Q}[t]$-双線形写像 $\overset{t}{*}\colon \mathcal{A}_r^1 \times \mathcal{A}_r^1 \to \mathcal{A}_r^1$ を

$$
\begin{aligned}
&1 \overset{t}{*} w = w \overset{t}{*} 1 = w, \\
&\alpha v \overset{t}{*} \beta w = \alpha(v \overset{t}{*} \beta w) + \beta(\alpha v \overset{t}{*} w) \\
&\qquad\qquad + (1-2t)(\alpha \diamond \beta)(v \overset{t}{*} w) + (t^2 - t)\alpha \diamond \beta \diamond (v \overset{t}{*} w)
\end{aligned}
$$

($\alpha, \beta \in \mathfrak{z}, v, w \in \mathcal{A}_r^1$) により定義する．$r=1$ の場合には, 調和積 $\overset{t}{*}$ は [Y] で定義されたものと一致する．$\mathcal{L}_*$ は $\overset{0}{*}$（これを単に $*$ と書く）について準同型になることが知られている．また, $v, w \in \mathcal{A}_r^1$ に対して,

$$S_*^t(v \overset{t}{*} w) = S_*^t(v) * S_*^t(w)$$

が成り立つことを示せるため, (1) により, 写像 $\mathcal{L}_*^t$ は調和積 $\overset{t}{*}$ について準同型になることもわかる.

1.4 シャッフル積 $\overset{t}{ш}$

$\mathbb{Q}[t]$-双線形写像 $\overset{t}{ш}\colon \mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_r \to \mathcal{A}_r$ を

$$
\begin{aligned}
&1 \overset{t}{ш} w = w \overset{t}{ш} 1 = w, \\
&\alpha v \overset{t}{ш} \beta w = \alpha(v \overset{t}{ш} \beta w) + \beta(\alpha v \overset{t}{ш} w) - \varepsilon(v)\rho(\alpha)\beta w - \varepsilon(w)\rho(\beta)\alpha v
\end{aligned}
$$

($\alpha, \beta \in \mathfrak{A}, v, w \in \mathfrak{A}^*$) により定義する．ここに, 写像 $\varepsilon : \mathfrak{A}_r^* \to \{0,1\}$ は

$$\varepsilon(w) = \begin{cases} 1 & (w = 1) \\ 0 & (w \neq 1) \end{cases}$$

（ただし, $\mathfrak{A}_r^*$ は $\mathfrak{A}_r$ で生成されるワード全体を表す）で, 写像 $\rho : \mathfrak{A}_r \to \mathcal{A}_r$ は

$$\rho(x) = 0, \quad \rho(y_a) = tx \quad (a \in \mu_r)$$

で与えられる．$r=1$ の場合には, シャッフル積 $\overset{t}{ш}$ は [LQ, W] で定義されたものと一致する．$\mathcal{L}_ш$ は $\overset{0}{ш}$（これを単に $ш$ と書く）について準同型になることが知られている．また, $v, w \in \mathcal{A}_r$ に対して,

$$S_ш^t(v \overset{t}{ш} w) = S_ш^t(v) \, ш \, S_ш^t(w)$$

が成り立つことを示せるため, (2) により, 写像 $\mathcal{L}_ш^t$ はシャッフル積 $\overset{t}{ш}$ について準同型になることもわかる.

2 関係式

2.1 一般複シャッフル関係式

[AK] に準ずる議論が可能である．すなわち, 以下の性質で特徴づけられる写像 $\widehat{\mathcal{L}}_\bullet^t : \mathcal{A}_r^1 \cong \mathcal{A}_r^0[y_1] \to \mathbb{C}[t, T]$（$\bullet = *$ または $ш$）がただ一つ存在する：

(i) $\widehat{\mathcal{L}}_\bullet^t$ は $\mathcal{A}_r^0$ 上で $\mathcal{L}_\bullet^t$ と一致する.

(ii) $\widehat{\mathcal{L}}_\bullet^t(y_1) = T$.

(iii) $\widehat{\mathcal{L}}^t_\bullet$ は積 $\overset{t}{\bullet}$ について準同型である.

$S^t_*(y_1)=y_1$ および $S^t_ш(y_1)=y_1$ であるから,

$$\widehat{\mathcal{L}}^t_\bullet=\widehat{\mathcal{L}}_\bullet S^t_\bullet,$$

および一般複シャッフル関係式

$$\widehat{\mathcal{L}}^t_ш(\mathcal{I}(w_0)\overset{t}{ш}\mathcal{I}(w_1)-\mathcal{I}(w_0\overset{t}{*}w_1))=0$$

$(w_0\in\mathcal{A}^0_r, w_1\in\mathcal{A}^1_r)$ が成り立つことがわかる.

2.2 Hoffman 関係式

$k_1,\dots,k_n\in\mathbb{N}, a_1,\dots,a_n\in\mu_r$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(y_1)\overset{t}{ш}z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_n,a_n}\\
&=\sum_{i=1}^{n+1}z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_{i-1},a_{i-1}}y_1z_{k_i,a_i}\cdots z_{k_n,a_n}\\
&\quad-t\sum_{i=1}^{n}z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_{i-1},a_{i-1}}z_{k_i+1,a_i}z_{k_{i+1},a_{i+1}}\cdots z_{k_n,a_n}
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}(y_1\overset{t}{*}\mathcal{I}^{-1}(z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_n,a_n}))\\
&=y_1z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_n,a_n}+\sum_{i=2}^{n+1}z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_{i-1},a_{i-1}}y_{a_{i-1}}z_{k_i,a_i}\cdots z_{k_n,a_n}\\
&\quad+(t^2-t)\sum_{i=1}^{n}z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_{i-1},a_{i-1}}z_{k_i+k_{i+1}+1,a_{i+1}}z_{k_{i+2},a_{i+2}}\cdots z_{k_n,a_n}\\
&\quad+(1-2t)\sum_{i=1}^{n}z_{k_1,a_1}\cdots z_{k_{i-1},a_{i-1}}z_{k_i+1,a_i}z_{k_{i+1},a_{i+1}}\cdots z_{k_n,a_n}
\end{aligned}$$

がわかる. したがって, $(k_1,a_1)\neq(1,1)$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\bigl\{L^t_ш(k_1,\dots,k_{i-1},1,k_{i+1},\dots,k_n;a_1,\dots,a_i,a_i,a_{i+1},\dots,a_n)\\
&\quad-L^t_ш(k_1,\dots,k_{i-1},1,k_{i+1},\dots,k_n;a_1,\dots,a_i,1,a_{i+1},\dots,a_n)\bigr\}\\
&=(t-1)\sum_{i=1}^{n}\bigl\{L^t_ш(k_1,\dots,k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\dots,k_n;a_1,\dots,a_n)\\
&\quad-tL^t_ш(k_1,\dots,k_{i-1},k_i+k_{i+1}+1,k_{i+2},\dots,k_n;a_1,\dots,a_{i-1},a_{i+1},\dots,a_n)\bigr\}.
\end{aligned}$$

が得られる. これは, 上記の一般複シャッフル関係式の $w_1=y_1$ の場合である.

2.3　川島関係式

これを記すためにいくつか記号を導入しておく．$a \in \mu_r$ に対して, $z_a = x+y_a, z_a^\delta = x+\delta(a)y_a \in \mathcal{A}_r$ とおく．ただし,

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & (a=1), \\ 1 & (a \neq 1). \end{cases}$$

$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_r)$ を $\varphi(x) = z_1, \varphi(z_a) = z_a^\delta$ $(a \in \mu_r)$ で与える．この φ は対合であることに注意しておく．$L_u(w) = uw$ $(u, w \in \mathcal{A}_r)$ とし, $\alpha v \circledast \beta w = (\alpha \diamond \beta)(v * w)$ （$\alpha, \beta \in \mathfrak{z}, v, w \in \mathcal{A}_r^1$）とする．$a \in \mu_r$ に対して, $M_a \in \mathrm{End}(\mathcal{A}_r)$ は $M_a(1) = 1$ および

$$M_a(z_{k_1,a_1} \cdots z_{k_n,a_n} x^l) = z_{k_1,aa_1} z_{k_2,a_2} \cdots z_{k_n,a_n} x^l$$

$(l \geq 0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mu_r)$ で与えられる．

さらに, $\alpha v \overset{t}{\circledast} \beta w = (\alpha \diamond \beta)(v \overset{t}{*} w)$（$\alpha, \beta \in \mathfrak{z}, v, w \in \mathcal{A}_r^1$）とおく．このとき,

$$S_*^t(v \overset{t}{\circledast} w) = S_*^t(v) \circledast S_*^t(w)$$

$(v, w \in \mathcal{A}_{r,+}^1)$ が成り立つことがわかる．

$\varphi^t = -(S_{\text{ш}}^t)^{-1} \varphi S_{\text{ш}}^t$ とおく．以上の記号のもと, 補間多重 L 値の川島関係式は次のようになる．$m \geq 0, a \in \mu_r, v \in \mathcal{A}_{1,+}^1, w \in \mathcal{A}_{r,+}^1$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k+l=m \\ k \geq 0, l>0}} \mathcal{L}_{\text{ш}}^t(L_x^{-1} \mathcal{I}(\mathcal{I}^{-1} L_{x+\delta(a)(-tx+y_a)} \varphi^t \mathcal{I} M_a(w) \overset{t}{\circledast} (-tx+y_1)^k y_1)) \\
&\qquad \times \mathcal{L}_{\text{ш}}^t(\varphi^t(v) \overset{t}{\circledast} (-tx+y_1)^{l-1} y_1) \\
&\quad = -\mathcal{L}_{\text{ш}}^t(L_x^{-1} \mathcal{I}(\mathcal{I}^{-1} L_{x+\delta(a)(-tx+y_a)} \varphi^t \mathcal{I} M_a(w \overset{t}{*} v) \overset{t}{\circledast} (-tx+y_1)^m y_1)).
\end{aligned}$$

とくに, $m = 0$ なら左辺は 0 とみなすため, 任意の $a \in \mu_r$ に対して,

$$L_{x+\delta(a)(-tx+y_a)} \varphi^t \mathcal{I} M_a(A_{r,+}^1 \overset{t}{*} A_{1,+}^1) \subset \ker \mathcal{L}_{\text{ш}}^t$$

である．

3　特殊値

特殊値についてはまだほとんど調べることができていないが, とりあえず, 次のものは容易にわかる．正整数 j, k（k は偶数）に対して,

$$\frac{L_*^t(\{k\}_j; \{-1\}_j)}{\pi^{jk}} \in \mathbb{Q}[t].$$

ここに, $\{k\}_j$ は $\underbrace{k, \ldots, k}_{j}$ を表す．

謝辞　2022 年度 RIMS 共同研究「解析的整数論とその周辺」において講演の機会を下さいました山崎義徳, 安福悠両氏に感謝いたします．本研究は JSPS 科研費・基盤研究 (C)19K03434 の助成を受けております．

References

[AK] T. Arakawa, M. Kaneko, *On multiple L-values*, J. Math. Soc. Japan 56(4) (2004), 967–991.

[B] H. Bachmann, *Interpolated Schur multiple zeta values*, J. Aust. Math. Soc. 104 (2018), 289–307.

[HI] M. Hoffman, K. Ihara, *Quasi-shuffle products revisited*, J. Algebra 481 (2017), 293–326.

[ITW] S. Ito, T. Tanaka, N. Wakabayashi, *On interpolated multiple L-values*, preprint.

[LQ] Z. Li, C. Qin, *Some relations of interpolated multiple zeta values*, Internat. J. Math. 28 (5) (2017), 1750033, 25pp.

[W] N. Wakabayashi, *Double shuffle and Hoffman's relations for interpolated multiple zeta values*, Internat. J. Number Theory 13 (2017), 2245–2251.

[Y] S. Yamamoto, *Interpolation of multiple zeta values and zeta-star values*, J. Algebra 385 (2013), 102–114.