Linear independence of certain gap series

弘前大学大学院理工学研究科 村上 慎太郎 *
Shintaro Murakami
Graduate School of Science and Technology,
Hirosaki University

概要

V. Kumar(2019) は Kronecker の稠密定理を用いて, ある条件の下で単項式指数をもつ空隙級数の線形独立性に関する結果を与えた. 本文では, S. Chowla(1947) と P. Erdős(1948) らによる合同式を用いた空隙の発見法および, K. Mahler(1953) の結果から導かれる不定方程式の解の有限性を用いて Kumar の定理の条件を取り除き, 線形独立性の結果の一般化をいくつか示す. 本稿は, 論文「Linear independence of certain numbers in the base-b system」について論じたものである. ここでは, 主定理の証明については詳細を述べていないが, 論文のほうでは述べていない定理の例についていくつか取り上げている. 本研究は弘前大学の立谷洋平氏との共同研究である.

1 主結果

Eisenstein 級数の値の代数的独立性を与えた Yu. V. Nesterenko[8] の結果を応用して, D. Bertrand[1] および, D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, I. Shiokawa[3] はそれぞれ独立にヤコビテータ関数の代数的数における有理数体上の代数独立性を示した. これらの結果から特に, 任意の代数的数 $\alpha(0<|\alpha|<1)$ に対して, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^2}$ は超越数であることが導かれる. 一方, 任意の整数 $k\geq 3$ に対する, $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n^k}$ の超越性は現在未解決の問題である. 近年, Kumar[5] は空隙級数の線形独立性に関する次の結果を示した.

定理 1 (V. Kumar, [5])**.** $k,b\geq 2$ を整数とする. また, 整数 $1\leq a_1<\cdots<a_m$ に対し

* e-mail: h20ds203@hirosaki-u.ac.jp

て，$\sqrt[k]{a_i/a_j}$ $(i \neq j)$ は無理数とする．このとき，

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{a_1 n^k}}, \quad \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{a_m n^k}}$$

は有理数体上線形独立性である．

Kumar は定理 1 の証明において Kronecker の稠密定理を用いて空隙を発見して, 級数の線形独立性を示した．定理 1 の例を挙げる．

例 2.

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{5n^2}}$$

は有理数体上線形独立である．

定理 1 は $\sqrt[k]{a_i/a_j}(i \neq j)$ が無理数であるという条件がある． 今回, この条件を取り払い, Kumar の予想を肯定的に解決した． 以下, 主定理を述べる為の準備をする．$M := \{(i,j) \mid i = 1, 2, \ldots, j = 2, 3, \ldots\}$ とする．各 $(i,j) \in M$ に対して, 集合 $S_{i,j}$ を初項 $h_{i,j}$, 公差 $d_{i,j} > 0$ が互いに素である等差数列上の素数をすべて含む $\mathbb{N}$ の無限部分集合とする．例えば, $S_{i,j}$ として $\mathbb{N}$, 4 を法として 1 と合同な素数全体の集合, 奇数全体の集合などが選択できる．また, $\{a_{i,j}(n)\}$ を有界な非零整数列とする．例えば, $a_{i,j}(n)$ として, $a_{i,j}(n) = 1, (-1)^n$ をとることができる．このとき, 次が成り立つ．

定理 3 (M. , Y. Tachiya, [7])**.** $b \geq 2$ を整数とする．このとき，

$$1, \quad \sum_{n \in S_{i,j}} \frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}}, \quad (i,j) \in M$$

は有理数体上線形独立である．

定理 3 の証明では S. Chowla[2] と P. Erdős[4] らによる合同式を用いた空隙の発見法が用いられている．定理の略証は 2 章で述べる．証明の仔細については [7] にて述べている．定理 3 において, 任意の $(i,j) \in M$ に対して, $S_{i,j} = \mathbb{N}$, $a_{i,j}(n) = 1$ とすると, 次の系を得る．

系 4. $b \geq 2$ を整数とする．このとき，

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{in^j}}, \quad (i,j) \in M$$

は有理数体上線形独立である.

系 4 の例を挙げる.

例 5.

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n^3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4n^3}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{5n^4}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{5n^5}}$$

は有理数体上線形独立である.

さて, 定理 3 における集合 $S_{i,j}$ には条件が課されていたが, これを一般の $\mathbb{N}$ の無限部分集合に置き換えた場合, 定理 3 は成り立たない. 実は, 定理 1 における Kumar の条件を考慮することにより, 集合 $S_{i,j}$ を一般の $\mathbb{N}$ の無限部分集合に置き換えることができる.

定理 6 (M. , Y. Tachiya, [7])**.** $b \geq 2$ を整数, L を M の部分集合とする. このとき, 任意の無限集合 $T_{i,j} \subset \mathbb{N}$ $((i,j) \in L)$ に対して,

$$1, \quad \sum_{n \in T_{i,j}} \frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}}, \qquad (i,j) \in L \tag{1}$$

が有理数体上線形独立となるための必要十分条件は, 次の (i), (ii) が満たされることである.
(i) $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in L$ が相異なるとき, すべての整数 u, v に対して $i_1 u^{j_1} \neq i_2 v^{j_2}$.
(ii) $j = 2$ となる $(i,j) \in L$ は高々 1 つ.

定理 6 の証明においては, K. Mahler[6] の結果から導かれる不定方程式の解の有限性を用いて空隙を発見している. 3 章で略証を述べる. 定理 6 についても詳しくは [7] にて述べている. 定理 6 において, j を $k \geq 3$ で固定することにより, 次の系を得る.

系 7. $k \geq 3, b \geq 2$ を整数とする. また, 整数 $1 \leq a_1 < \cdots < a_m$ に対して, $\sqrt[k]{a_i/a_j}$ $(i \neq j)$ は無理数とする. このとき, 任意の無限集合 $T_{i,j} \subset \mathbb{N}$ $((i,j) \in L)$ に対して,

$$1, \quad \sum_{n \in T_1} \frac{1}{b^{a_1 n^k}}, \quad \ldots, \quad \sum_{n \in T_m} \frac{1}{b^{a_m n^k}}$$

は有理数体上線形独立性である.

系 7 は定理 1 の (系 4 とは別の) 拡張を与える. 系 7 の例を 1 つ挙げる.

例 8.

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^3}}, \quad \sum_{n:\text{prime}} \frac{1}{2^{2n^3}}, \quad \sum_{n=2k} \frac{1}{2^{3n^3}}, \quad \sum_{n=k^2} \frac{1}{2^{4n^3}}, \quad \sum_{\substack{n \equiv 5 \\ \pmod{10}}} \frac{1}{2^{5n^3}}$$

は有理数体上線形独立である.

2　定理 3 の略証

$m \geq 2$ を整数とする. また,

$$A := \{(i,j) \mid i = 1, 2, \ldots, m, j = 2, 3, \ldots, m\}$$

とおく. このとき,

$$1, \quad \sum_{n \in S_{i,j}} \frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}}, \quad (i,j) \in A$$

が有理数体上線形独立であることを示せばよい. $(i_0, j_0) \in A$ を固定する. このとき, S_{i_0,j_0} は $p \equiv h_{i_0,j_0} \pmod{d_{i_0,j_0}}$ をみたす素数をすべて含むとする. ここで, $(d_{i_0,j_0}, h_{i_0,j_0}) = 1$. N を十分大きい整数とする. このとき, Hensel の補題より, 各 $\ell = 1, 2, \ldots, N-1, N+1, \ldots, 2N-1$ に対して,

$$i_0 X^{j_0} + \ell - N \equiv p_\ell \pmod{p_\ell^2} \tag{2}$$

が整数解を持つような素数 $p_\ell > N$ が無限個存在する. 各 ℓ に対して, p_ℓ は互いに異なるとする. (2) の解を x_ℓ で固定する. このとき, 次の連立合同式

$$\begin{cases} X \equiv h_{i_0,j_0} & \pmod{d_{i_0,j_0}}, \\ X \equiv x_\ell & \pmod{p_\ell^2}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, N-1, N+1, \ldots, 2N-1 \end{cases} \tag{3}$$

は中国式剰余定理より, 最小の正整数解 x をもち, すべての正整数解は $\alpha n + x (n \in \mathbb{N})$ という形で与えられる. ここで,

$$\alpha := d_{i_0,j_0} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq N}}^{2N-1} p_\ell^2.$$

このとき, $(\alpha, x) = 1$. よって, Dirichlet の算術級数定理および, (2), (3) より,

$$i_0 q^{j_0} + \ell - N \equiv p_\ell \pmod{p_\ell^2}$$

となるような十分大きい素数 $q \in S_{i_0,j_0}$ が存在する．これより, $p_\ell \mid i_0 q^{j_0} + \ell - N$ かつ, $p_\ell^2 \nmid i_0 q^{j_0} + \ell - N$. よって, 任意の $u = 1, 2, \ldots, N-1$ に対して,

$$i_0 q^{j_0} \pm u \notin \{ik^j \mid k \in \mathbb{N}, (i,j) \in A\}. \tag{4}$$

いま,

$$c + \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} \sum_{n \in S_{i,j}} \frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}} = 0, \qquad c, c_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad (i,j) \in A \tag{5}$$

とおく．ここで,

$$e_{i,j}(n) := \begin{cases} a_{i,j}(k) & (n = ik^j, k \in S_{i,j}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{6}$$

とおくと, (4), (5), (6) より,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b^{i_0 q^{j_0}}} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(i_0 q^{j_0}) + \sum_{n=i_0 q^{j_0}+N}^{\infty} \frac{1}{b^n} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(n) \\ &= -c - \sum_{n=1}^{i_0 q^{j_0}-N} \frac{1}{b^n} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(n). \end{aligned} \tag{7}$$

いま, (7) および,

$$b^{i_0 q^{j_0}-N} \left(-c - \sum_{n=1}^{i_0 q^{j_0}-N} \frac{1}{b^n} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(n) \right) \in \mathbb{Z},$$

$$b^{i_0 q^{j_0}-N} \left| \frac{1}{b^{i_0 q^{j_0}}} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(i_0 q^{j_0}) + \sum_{n=i_0 q^{j_0}+N}^{\infty} \frac{1}{b^n} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(n) \right| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

より, 十分大きい N に対して,

$$\frac{1}{b^{i_0 q^{j_0}}} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(i_0 q^{j_0}) + \sum_{n=i_0 q^{j_0}+N}^{\infty} \frac{1}{b^n} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(n) = 0. \tag{8}$$

また, (8) および,

$$\left| \sum_{n=i_0 q^{j_0}+N}^{\infty} \frac{1}{b^{n - i_0 q^{j_0}}} \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(n) \right| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

より,

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(i_0 q^{j_0}) = 0. \tag{9}$$

いま, $i_0q^{j_0}=ik^j$ より, $i \mid i_0, j \mid j_0$. よって, (9) より,

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=2}^{j_0} c_{i,j}e_{i,j}(i_0q^{j_0})=0. \tag{10}$$

ここで, 任意の $(i,j)\in A$ に対して, $c_{i,j}=0$ となることを示す. $(i_0,j_0)=(1,2)\in A$ のとき, $q\in S_{1,2}$ となる素数 q が存在する. よって, (10) より, $c_{1,2}e_{1,2}(q^2)=0$. ゆえに, $e_{1,2}(q^2)=a_{1,2}(q)\neq 0$ より, $c_{1,2}=0$. 次に, $M\geq 3$ を整数とする. $i+j\leq M$ をみたすすべての $(i,j)\in A$ に対して, $c_{i,j}=0$ が成り立つと仮定する. このとき, $i_0+j_0=M+1$ をみたす $(i_0,j_0)\in A$ を 1 つ固定する. いま, $(i_0,j_0)\in A$ に対して, $q\in S_{i_0,j_0}$ となる素数 q が存在する. よって, (10) より,

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=2}^{j_0} c_{i,j}e_{i,j}(i_0q^{j_0})=c_{i_0,j_0}e_{i_0,j_0}(i_0q^{j_0})+\sum_{i+j\leq M} c_{i,j}e_{i,j}(i_0q^{j_0})=c_{i_0,j_0}e_{i_0,j_0}(i_0q^{j_0})=0.$$

ゆえに, $e_{i_0,j_0}(i_0q^{j_0})=a_{i_0,j_0}(q)\neq 0$ より, $c_{i_0,j_0}=0$. よって, $i+j\leq M+1$ をみたす $(i,j)\in A$ に対して, $c_{i,j}=0$. 帰納法より, すべての $(i,j)\in A$ に対して, $c_{i,j}=0$. これより, (5) より, $c=0$. $\square$

3 定理 6 の略証

$(\Rightarrow)$ ここでは証明は述べず, (i) または (ii) が成り立たないとき, (1) が有理数体上線形従属となる $T_{i,j}$ をいくつか紹介する. $(i_1,j_1)=(1,3),(i_2,j_2)=(8,3)$ のとき, $i_12^{j_1}=i_21^{j_2}$ となる. よって, $T_{1,3}=\{2k \mid k\in\mathbb{N}\}, T_{8,3}=\mathbb{N}$ とすると,

$$\sum_{n\in T_{1,3}}\frac{1}{2^{n^3}}=\sum_{n\in T_{8,3}}\frac{1}{2^{8n^3}}.$$

次に, $(i_1,j_1)=(6,2),(i_2,j_2)=(3,5)$ のとき, $i_14^{j_1}=i_22^{j_2}$ となる. よって, $T_{6,2}=\{2^{5k+2} \mid k\in\mathbb{N}\}, T_{3,5}=\{2^{2k+1} \mid k\in\mathbb{N}\}$ とすると,

$$\sum_{n\in T_{6,2}}\frac{1}{2^{6n^2}}=\sum_{n\in T_{3,5}}\frac{1}{2^{3n^5}}.$$

また, $S:=\{(n,m) \mid n^2-2m^2=1\}, T_{1,2}=\{n \mid (n,m)\in S\}, T_{2,2}=\{m \mid (n,m)\in S\}$ とおくと, Pell 方程式の解集合の無限性より,

$$\sum_{n\in T_{1,2}}\frac{1}{2^{n^2}}=\frac{1}{2}\sum_{m\in T_{2,2}}\frac{1}{2^{2m^2}}.$$

($\Leftarrow$) $(i_0, j_0) \in A$ を固定する．また, N を十分大きい整数とする．このとき, (ii) および, Mahler[6] の結果から導かれる不定方程式の解の有限性を用いることにより, 次のディオファントス方程式

$$i_0 x^{j_0} - i y^j = \pm u$$

の解 (x, y) の個数は有限個であることがわかる．ここで, $u = 1, 2, \ldots, N-1$. よって, 任意の整数 $t > M, u = 1, 2, \ldots, N-1$ に対して,

$$i_0 t^{j_0} \pm u \notin \{ik^j \mid k \in \mathbb{N}, (i, j) \in A\}$$

が成り立つような整数 M が存在する．いま,

$$c + \sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} \sum_{n \in T_{i,j}} \frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}} = 0, \qquad c, c_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad (i, j) \in A \tag{11}$$

とおく．ここで,

$$e_{i,j}(n) := \begin{cases} a_{i,j}(k) & (n = ik^j, k \in T_{i,j}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくと, 定理 3 の証明と同様に,

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{i,j} e_{i,j}(i_0 t^{j_0}) = 0 \tag{12}$$

が導かれる．ここで, (i) より, 任意の $(i, j) \neq (i_0, j_0)$ に対して, $e_{i,j}(i_0 t^{j_0}) = 0$. よって, $e_{i_0,j_0}(i_0 t^{j_0}) = a_{i_0,j_0}(t) \neq 0$ および, (12) より, $c_{i_0,j_0} = 0$. いま, (i_0, j_0) は任意に選択しているので, $c_{i,j} = 0((i, j) \in A)$. ゆえに, (11) より, $c = 0$. $\square$

謝辞

2022 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論とその周辺」にて, 講演の機会をくださいました研究代表者である山崎義徳先生, 研究副代表者である安福悠先生にこの場を借りてお礼申し上げます．また, 講演の際に旅費の支給を頂いたことについても重ねてお礼申し上げます.

参考文献

[1] D. Bertrand, Theta functions and transcendence, *Ramanujan J. 1* (1997), 339–350.

[2] S. Chowla, On series of the Lambert type which assume irrational values for rational values of the argument, *Proc. Natl. Inst. Sci. India* Part A 13 (1947), 171–173.

[3] D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, and I. Shiokawa, Transcendence of Jacobi's theta series, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 72 (1996), 202–203.

[4] P. Erdős, On arithmetical properties of Lambert series, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* 12 (1948), 63–66.

[5] V. Kumar, Linear independence of certain numbers, *Arch. Math. (Basel)* 112 (2019), 377–385.

[6] K. Mahler, On the greatest prime factor of ax^m+by^n, *Nieuw Arch. Wisk.* 1 (1953), 113–122.

[7] S. Murakami and Y. Tachiya, Linear independence of certain numbers in the base-b system, arXiv:2205.15601v2 [math. NT].

[8] Yu. V. Nesterenko, Modular functions and transcendence questions, *Mat. Sb.* 187 (1996) 65–96; *English transl. Sb. Math.* 187 1319–1348.