WEIGHTED ONE-LEVEL DENSITY FOR DIRICHLET L-FUNCTIONS (ディリクレ L 関数に対する重み付き 1 レベル密度)

杉山真吾 (日本大学　理工学部数学科)

SHINGO SUGIYAMA

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
COLLEGE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
NIHON UNIVERSITY

Abstract. 本記事は 2022 年 10 月 13 日に筆者が講演した内容をもとに執筆したものである．本記事では Dirichlet L 関数の族 $\{L(s,\chi)\}_\chi$ の零点 (low-lying zero) の $|L(s,\chi)|^2$ の値による重み付き 1 レベル密度を考察し, $1/2 \leqslant s < 1$ においてちょうど $s = 1/2$ のときのみ密度関数が Katz-Sarnak の密度予想に現れない関数になることを紹介する．この研究成果は Ade Irma Suriajaya (九州大学) との共同研究に基づく．

1. Introduction

Katz, Sarnak は L 関数の族の零点の分布はランダム行列理論に現れる固有値の分布と一致するであろうという大胆な予想を立てた ([9], [10])．さまざまな L 関数の族に対して Katz-Sarnak 予想は確かめられてきたが, 「L 関数の特殊値の重みをつけた場合に密度はどうなるのか?」という問題も Knightly, Reno (2019) の [13] により浮上してきた．実際には Kowalski, Saha Tsimerman (2012) の [14] が初めて重み付き密度を考察している．筆者が論文を読んで感じた限り, 彼らのスタンスは「重みを外すことができない」という印象である．それに対し Knightly, Reno は「あえて重みをつけた」というスタンスである．

筆者は最近, GL_2 の対称 2 次 L 関数に対して重み付き零点密度を研究し, 重み因子がちょうど中心値のときに Katz, Sarnak の予想には現れない密度関数が生じることを発見した ([19])．そして一般の L 関数の族に対して重み付き密度予想 (Weighted Density Conjecture) を予想した．ここで, 筆者が立てた予想を満たす L 関数の族が GL_2 の対称 2 次 L 関数しかないのは淋しいので, GL_1 でいいから新たな例を見つけたいと思った次第である．

さて, 今回は GL_1 の場合の例を見つけたのでそれを報告する．q を素数とし, $\mathcal{F}_q$ を mod q の Dirichlet 指標で non-principal なもの全体の集合とする．$L(s,\chi)$ を非完備 Dirichlet L 関数とする．$\{L(s,\chi)\}_{\chi\in\mathcal{F}_q}$ の low-lying zero の集合は $q \to \infty$ としたときにある密度関数で記述できることが分かった．

Theorem 1.1 (Rough version of [20])**.** $\{L(s,\chi)\}_{\chi\in\mathcal{F}_q}$ の low-lying zero の $|L(s,\chi)|^2$ の重み付き 1 レベル密度は, $1/2 \leqslant s < 1$ において, $s \neq 1/2$ であれば密度関数 $W_{\mathrm{U}}(x) := 1$ を持つ．そして $s = 1/2$ のときは密度関数 $W_{\mathrm{GUE}}(x) = 1 - \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}$ を持つ．したがって, $s \neq 1/2$ のときは s によらない W_{U} で記述できて, これは Katz-Sarnak 予想に出てくる密度関数である．$s = 1/2$ のときの W_{GUE} は Katz-Sarnak の予想には出てこない密度関数である．実は $W_{\mathrm{GUE}}(x)$ は Hermite ランダム行列の相関関係関数であり, Montgomery の pair correlation conjecture にも登場するものである．

本研究は Ade Irma Suriajaya (九州大学) との共同研究である．筆者は自身の Weighted Density Conjecture を満たす例を GL_1 の L 関数の族の場合に見つけたかったのあるでが, 2021 年度は公私ともに忙しく, 特に JST 研究戦略開発センターの特任フェローも務めており, 数学

日本大学理工学部数学科 sugiyama.shingo@nihon-u.ac.jp.

と産業の連携に関する書籍の執筆にはとりわけ時間を割くこととなった. この書籍は「最先端の数学が社会に求められるワケ (2)」[1]として 2022 年 3 月に無事に出版された (横山俊一との共著 [22]). 2022 年 5 月に第 2 版が出たので喜ばしい限りである. そのような忙しさに追われていた 2021 年において, 筆者のアイディアに賛同して手伝ってくれたチャチャ[2] に感謝する. 2021 年 11 月に 5 日間の研究打ち合わせの時間を確保し, 朝から晩まで議論を続けた結果, 無事に重み付き零点密度の例を見つけることができた. Dirichlet L 関数は一般の保型 L 関数に比べれば初等的な対象ではあるが, 研究を始めてから結果を出して TeX 打ちを終えるまで 1 週間もかからなかったという経験は今後することはないであろう. 原稿のチェックを経て 2022 年 1 月 2 日に arxiv に公開することができた. 2022 年 8 月には出版され, 研究開始から 1 年未満で論文出版までたどり着けたのは数学の業界では貴重な経験であると思われる. もちろんスピードよりも内容の濃さのほうが絶対に大事である. 速ければよいというワケでは決してない.

さて, それでは経緯については十分述べたことだし, 本題に入ることにする.

2. L-functions and Random matrix theory

この章では L 関数とランダム行列理論の間の摩訶不思議な関係 (Katz-Sarnak 予想) について解説する. Katz, Sarnak の予想の歴史については拙著 [18] を参照されたし.

$G(N)$ を古典的コンパクト Lie 群 $\mathrm{U}(N)$, $\mathrm{USp}(2N)$, $\mathrm{SO}(2N)$, $\mathrm{SO}(2N+1)$, $\mathrm{O}(N)$ のいずれかとする. $G(N)$ に属する行列の固有値の分布について論じる. 簡単のため $G(N)=\mathrm{U}(N)$ の場合を考えると, $A\in\mathrm{U}(N)$ の固有値は $e^{i\theta_{A,j}}$ $(1\leqslant j\leqslant N)$, $0\leqslant\theta_{A,1}\leqslant\theta_{A,2}\leqslant\cdots\leqslant\theta_{A,N}<2\pi$ と表せる. 偏角の平均間隔 (average spacing) は $\frac{2\pi}{N}$ であるので, これを 1 に正規化するために $\frac{N}{2\pi}\theta_{A,j}\in[0,N)$ を考える. この偏角の分布を調べるために 1 レベル密度を導入する.

Definition 2.1 (1 レベル密度 (one-level density))**.** $A\in\mathrm{U}(N)$ のとき, テスト関数 $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ に対して

$$D(A,\phi):=\sum_{j=1}^{N}\phi\left(\frac{N}{2\pi}\theta_{A,j}\right)$$

とおく. ここで $\mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ は $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ 上の Schwartz 空間である.

ここで, $\mathrm{U}(N)$ の Haar 測度 dA を 1 つ取っておく. この測度に関して 1 レベル密度を平均化し $N\to\infty$ とすると以下の極限公式が成り立つ.

Theorem 2.2 (Katz, Sarnak (1999) [9, Appendix AD])**.** 任意の $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$ に対して,

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\int_{A\in\mathrm{U}(N)}dA}\int_{\mathrm{U}(N)}D(A,\phi)dA=\int_0^\infty\phi(x)W_{\mathrm{U}}(x)dx.$$

ここで $W_{\mathrm{U}}(x):=1$ である.

$G(N)$ が $\mathrm{U}(N)$ 以外の 4 つのコンパクト群のときも 1 レベル密度は定義できて, 同様の極限公式が成り立つ. $N\to\infty$ とする際の群のタイプ $G=\mathrm{U}$, Sp, SO(even), SO(odd), O のそれぞれに対して, 固有値の偏角の 1 レベル密度の密度関数 $W_G(x)$ は以下で与えられる:

$$W_G(x):=\begin{cases}1 & G=\mathrm{U},\\ 1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & G=\mathrm{Sp},\\ 1+\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} & G=\mathrm{SO(even)},\\ 1-\frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}+\delta_0 & G=\mathrm{SO(odd)},\\ 1+\frac{1}{2}\delta_0 & G=\mathrm{O}.\end{cases}$$

ここで, δ_0 は 0 をサポートに持つ Dirac デルタ関数である.

[1]この書籍はタイトルに (2) とあるがそれは第 2 巻だからである. 第 1 巻は岡本, 松江が執筆し, 「最先端の数学が社会に求められるワケ (1)」というタイトルで第 2 巻と同じ時期に出版された ([15]).

[2]Ade Irma Suriajaya のニックネーム. 中国語で佳佳と書く.

Katz と Sarnak は, L 関数たちの零点集合はこの 5 種類の密度関数のどれかで記述可能だろうという予想を提唱した. すなわち, L 関数の族 $\mathcal{F}$ に対して $G = G(\mathcal{F})$ が存在して, $\mathcal{F}$ に属する L 関数の零点の 1 レベル密度の平均は $W_G(x)$ になるであろう, ということである.

L 関数の零点の 1 レベル密度も導入しておく. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の Schwartz 空間とする.

Definition 2.3 (one-level density). $L(s,\mathcal{A})$ を L 関数とする. $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ がコンパクトであるとする. ここで $\hat{\phi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$. このとき,

$$D(\mathcal{A},\phi) := \sum_{\rho} \phi\left(\frac{\log Q_{\mathcal{A}}}{2\pi}\gamma\right).$$

ここで, $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ は L 関数の完備化 $\hat{L}(s,\mathcal{A})$ の零点を重複度込みで動くものとする. $Q_{\mathcal{A}}$ は $L(s,\mathcal{A})$ の analytic conductor とする.

$\frac{\log Q_{\mathcal{A}}}{2\pi}$ は零点の平均間隔を 1 に正規化するための因子である.

Remark 2.4. 上の定義において $L(s,\mathcal{A})$ の GRH を仮定していないことに注意してほしい. ϕ の定義域は $\mathbb{R}$ だが, $\hat{\phi}$ のサポートはコンパクトなので, ある $\alpha > 0$ に対する $[-\alpha,\alpha]$ に含まれるとしてよく, Fourier 反転公式

$$\phi(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \hat{\phi}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

により $x \in \mathbb{C}$ としても右辺が意味を持つからである. この方法で ϕ の定義域を自然に $\mathbb{C}$ に拡張したものも同じ記号 ϕ で表すことで, γ は虚数であっても構わない.

L 関数の族 $\mathcal{F}$ は無限多重集合であるとし, analytic conductor によって “自然に” 切り分けられるとする: $\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$, $(\#\mathcal{F}_k < \infty,$ “$\mathcal{F}_k = \{\mathcal{A} \in \mathcal{F} \mid Q_{\mathcal{A}} \asymp k\}$”$)$.

Conjecture 2.5 (Density Conjecture for $\mathcal{F}$ [10]).
L 関数の族 $\mathcal{F}$ に対し, $G(\mathcal{F}) \in \{\mathrm{U}, \mathrm{Sp}, \mathrm{SO(even)}, \mathrm{SO(odd)}, \mathrm{O}\}$ が存在して, $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ がコンパクトであるような任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\#\mathcal{F}_k} \sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_k} D(\mathcal{A},\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W_{G(\mathcal{F})}(x) dx.$$

$G(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の symmetry type と呼ばれる. Theorem 2.2 と比較すると, Density Conjecture の式の形はとてもよく似ている. 本当にこんなことが成り立つのだろうか? ぱっと見では全然分からない. Katz, Sarnak (1999) は [9] で有限体上の関数体上のゼータ関数に対して零点の分布を考察することで, この予想を提起するキッカケを得た. そういうわけで彼らの予想は the Katz-Sarnak heuristic (または the Katz-Sarnak heuristics) とも呼ばれる. 彼らの予想はこれまでにさまざまな L 関数の族に対して研究されてきたが, 詳細は拙著 [18] に譲ることにする.

最近筆者は, Katz-Sarnak 予想のさらに先に踏み込んで, 以下の予想を立てた.

Conjecture 2.6 (Weighted Density Conjecture [19]). $\mathcal{F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$ を L 関数の族とし, symmetry type $G(\mathcal{F})$ が存在するとする. また, $1/2 \leqslant s < 1$ とする. このとき $W_{\mathcal{F},s}(x)$ が存在し,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sum_{\Pi\in\mathcal{F}_k} L(s,\mathcal{A})} \sum_{\Pi\in\mathcal{F}_k} L(s,\mathcal{A})\, D(\mathcal{A},\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathcal{F},s}(x) dx$$

となる. さらに,

$$W_{G(\mathcal{F}),s} \begin{cases} = W_{G(\mathcal{F})} & (1/2 < s < 1), \\ \neq W_{G(\mathcal{F})} & (s = 1/2). \end{cases}$$

上の予想において weight factor $L(s,\mathcal{A})$ は $m\in\mathbb{N}$ に対する $L(s,\mathcal{A})^m$ や $|L(s,\mathcal{A})|^{2m}$ でも良い．また保型 L 関数の場合は周期積分でも良い．場面において適宜修正されたし．実は上の予想は [19] で述べた予想の special case (s 付き版) であり, weight factor も [19] では L 関数の値ではなく一般の複素数 $w_{\mathcal{A}}$ を採用している．

この突拍子もない予想の例は文献としては当時 [19] の 1 つしかなかったので, 成り立つ例をたくさん見つけたい, そして成り立たない例がもしあるならそれも見つけたい, と考えるのは自然なことである．唯一の例 [19] は GL_2 の対称 2 次 L 関数という GL_3 の L 関数の族であるが, GL_1 のほうが L 関数の扱いが簡単だから, GL_1 の場合のほうがもっと容易に例を計算することができるだろう, と当時思っていた．

それでは実際に見つけた例を次の章で紹介しよう．

3. Main result

筆者の予想の例を与えたというのが本記事の main result である．Introduction ではフワっと述べた主定理だが, この章ではステートメントを正確に述べることにする．

まずは Hughes, Rudnick の結果 [8] を思い出そう．q を素数とし, mod q の non-principal Dirichlet 指標全体の集合を $\mathcal{F}_q$ とする．$\chi\in\mathcal{F}_q$ に対して $L(s,\chi)$ と書いたら χ に付随する非完備な Dirichlet L 関数を表すことにする．L 関数の族 $\{L(s,\chi)\}$ の零点分布は以下の通りユニタリー型である．

Theorem 3.1 (Hughes, Rudnick (2003) [8])**.** $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathrm{supp}(\phi)\subset[-2,2]$ を満たすとする．このとき,

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q}1}\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q}D(\chi,\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)W_{\mathrm{U}}(x)dx.$$

Hughes, Rudnick の結果を重み付き零点分布で考察したものが本記事の主結果である．

Theorem 3.2 ([20]: Unitary family)**.** $1/2\leqslant s<1$ とする．$\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ は $\mathrm{supp}(\hat{\phi})\subset[-2s/3,2s/3]$ を満たすとする．このとき,

$$\lim_{q\to\infty}\frac{1}{\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q}|L(s,\chi)|^2}\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q}|L(s,\chi)|^2D(\chi,\phi)=\begin{cases}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)W_{\mathrm{U}}(x)dx & (1/2<s<1),\\ \int_{\mathbb{R}}\phi(x)W_{\mathrm{U},1/2}(x)dx & (s=1/2).\end{cases}$$

ここで $W_{\mathrm{U}}(x):=1$ であり,

$$W_{\mathrm{U},1/2}(x):=1-\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2=W_{\mathrm{GUE}}(x).$$

Weighted Density Conjecture は唐突に紹介されたが, L 関数の族の重み付き零点分布は $s=1/2$ のときには Knightly, Reno (2019) の研究 [13] が知られている．重さ k, レベル q, nebentypus が自明な楕円カスプ新形式のなす空間 $S_k(\Gamma_0(q))^{\mathrm{new}}$ の, 正規化された Hecke 固有形式からなる Petersson 内積に関する直交基底を $B_k^*(q)$ とする．また, $f\in S_k(\Gamma_0(q))^{\mathrm{new}}$ の Petersson ノルムを $\|f\|$ と書くことにする．

Theorem 3.3 (Knightly, Reno (2019) [13])**.** D を基本判別式とし, χ を mod D の 2 次指標または自明指標とする．$q\to\infty$ とするとき,

$$\frac{1}{\sum_{f\in B_k^*(q)}\frac{\hat{L}(1/2,f\otimes\chi)}{\|f\|^2}}\sum_{f\in B_k^*(q)}\frac{\hat{L}(1/2,f\otimes\chi)}{\|f\|^2}D(f,\phi)\to\begin{cases}\int_{\mathbb{R}}\phi(x)W_{\mathrm{O}}(x)dx & (\chi が 2 次),\\ \int_{\mathbb{R}}\phi(x)W_{\mathrm{Sp}}(x)dx & (\chi が自明).\end{cases}$$

ここで $\hat{L}(s,f\otimes\chi)$ は, 関数等式の中心が $s=1/2$ であるような, f と χ に付随する完備スタンダード L 関数である．

もし重み因子がなければsymmetry typeはOになるので, 中心値の重み付けによってsymmetry typeがOからSpへ変化したことが観察できる.

Knightly, RenoはSiegelモジュラー形式に付随するスピノールL関数に関する以下の研究に触発されて上記のL関数の中心値の重み付きone-level densityを考察するに至った.

Theorem 3.4 (Kowalski, Saha, Tsimerman (2012) [14]). fは次数2, 重さ$k \in \mathbb{N}$, レベル$\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$のSiegelカスプ形式でHecke固有形式であるとする. このようなfを考えたときのスピノールL関数の族$\{L(s, f, \mathrm{Spin})\}_f$のBessel周期の絶対値の2乗の重み付き零点分布は, GRHの仮定の下でsymmetry typeがSpになる.

こちらも重み因子がなければ[11]および[12]によりsymmetry typeはOになるので, Bessel周期の重み付けによってsymmetry typeが変化したことになる. ここで,「fのBessel周期の絶対値の2乗が本質的に$L(1/2, f, \mathrm{Spin})L(1/2, f \otimes \chi_{-4}, \mathrm{Spin})$になる」というBöcherer予想を認めると, 上記の定理はL関数の中心値の重み付き零点分布とみなせることに注意してほしい. なおBöcherer予想は古澤, 森本[7]によって最近証明された.

それでは, sというパラメーター付きの重み付き密度予想[19]のevidenceを見ていこう. Uに対する今回の結果よりも前に得られていたSpの場合の筆者による結果は以下の通りである.

Theorem 3.5 (Special case of [19]: Symplectic family). $k \geqslant 6$は偶数とし, qを素数の集合の中で動かすとする. このとき, 任意の$s \in [1/2, 1]$に対してある$\alpha > 0$が存在して, $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-\alpha, \alpha)$を満たす任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$に対して,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sum_{f\in B_k^*(q)} \frac{\hat{L}(s,\mathrm{Sym}^2(f))}{\hat{L}(1,\mathrm{Sym}^2(f))}} \sum_{f\in B_k^*(q)} \frac{\hat{L}(s, \mathrm{Sym}^2(f))}{\hat{L}(1, \mathrm{Sym}^2(f))} D(\mathrm{Sym}^2(f), \phi)$$
$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{Sp}}(x) dx & (\frac{1}{2} < s \leqslant 1) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{Sp},1/2}(x) dx & (s = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

となる. ここで

$$W_{\mathrm{Sp},1/2}(x) := 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} - \frac{2\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}.$$

筆者はこの定理を最初に発見し, その後で重み付き密度予想 (Conjecture 2.6) を思いついた. 当時, 重み付き零点分布は先程のKowalski, Saha, Tsimerman [14]とKnightly, Reno [13]の2つしかなかったが, 彼らの研究ではKatz-Sarnak予想に出てくる5つの密度関数の範疇に収まっていた. すなわち, 筆者が導出した上の定理によってKatz-Sarnak予想に出てこない$W_{\mathrm{Sp},1/2}(x)$なる密度関数が初めて発見された.

Remark 3.6. なお, 上記のTheorem 3.5は$r \in \mathbb{N}$に対する$D(\mathrm{Sym}^r(f), \phi)$の場合に記述可能であり, 総実代数体$F$に対する$\mathrm{PGL}_2(\mathbb{A}_F)$の保型表現の観点で記述可能である. また, 重さが$k = 4$の場合にも$s \in [1/2, 1)$とすることで上の定理は成り立つ.

symmetry typeが直交型の場合はs付き版の予想のevidenceとなる文献は存在しないが, Knightly, Renoに書いてある議論をちょっとだけ修正することで, 容易にs付きの重み付き零点分布の公式を得ることができる. $B_k(q)$を重さk, レベルqの楕円カスプ形式のなす空間$S_k(\Gamma_0(q))$の正規化されたHecke固有形式からなる直交基底とする. このとき以下の公式が成り立つ.

Theorem 3.7 (Knightly, Reno (2019) [13] + a bit of an argument: Orthogonal family). $k \geqslant 4$とし, qを素数の集合の中で動かす. $1/2 \leqslant s < 1$とする. このとき, $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1/2, 1/2)$を満たす任意の$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$に対して,

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{\sum_{f\in B_k(q)} \frac{\hat{L}(s,f)}{\|f\|^2}} \sum_{f\in B_k(q)} \frac{\hat{L}(s, f)}{\|f\|^2} D(f, \phi) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{O}}(x) dx & (\frac{1}{2} < s < 1), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) W_{\mathrm{O},1/2}(x) dx & (s = \frac{1}{2}). \end{cases}$$

また,

$$W_{\mathrm{O},1/2}(x) := 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} = W_{\mathrm{Sp}}(x).$$

Theorems 3.2, 3.5, 3.7 により, Unitary, Symplectic, Orthogonal の 3 種類の重み付き密度予想の例が得られたことになる.

4. Weighted one-level density conjecture

主定理の証明は次の章で説明することにして, この章では筆者が予想を立てた後にそれとは独立に Fazzari が立てた予想 (重み付き 1 レベル密度予想, Weighted one-level density conjecture) を説明し, 両者を比較する.

$\mathcal{F} = \bigcup_X \mathcal{F}_X$ を L 関数の族とし, symmetry type $G(\mathcal{F}) \in \{\mathrm{U}, \mathrm{Sp}, \mathrm{SO(even)}\}$ を持つと仮定する. 写像 $V : \{L(1/2, \mathcal{A})\}_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}} \to \mathbb{C}$ を

$$V(L(1/2,\mathcal{A})) = \begin{cases} |L(1/2,\mathcal{A})|^2 & G(\mathcal{F}) = \mathrm{U}, \\ L(1/2,\mathcal{A}) & G(\mathcal{F}) = \mathrm{Sp}, \mathrm{SO(even)} \end{cases}$$

で定義する. Fazzari (2021) は [6] で次を予想した.

Conjecture 4.1 (Weighted one-level density conjecture [6, (1.6)])**.** L 関数の族 $\mathcal{F}$ と任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, 明示的に記述できる関数 $W_G^k(x)$ が存在して, 任意の良いテスト関数 ϕ に対して

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{\sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_X} V(L(1/2,\mathcal{A}))^k} \sum_{\mathcal{A}\in\mathcal{F}_X} V(L(1/2,\mathcal{A}))^k D(\mathcal{A},\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W_G^k(x) dx.$$

ここで "良い" ϕ とは, $|\mathrm{Im}(x)| < 2$ 上の $\mathbb{C}$ 値正則関数で, 偶関数であり, $\phi(x) \ll \frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R}, x \to \infty)$, $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ を満たす ϕ のことである.

W_G^k の k は k 乗ではなく単なる添え字である. $W_G^k(x)$ の明示式は §6 の Appendix に譲ることにする.

Fazzari は条件付きで自身の予想が成り立つ 3 つの例を与えた.

Theorem 4.2 ([6, Theorems 1, 3 and 5])**.** GRH と Ratios Conjecture を仮定する. このとき, Weighted one-level density conjecture は以下の 3 種類の L 関数の族に対しては正しい.

- $\{\zeta(s+it)\}_{t\in\mathbb{R}}$ $(k = 1, 2) \rightsquigarrow W_{\mathrm{U}}^k(x)$,
- $\{L(s,\chi_D)\}_{X/2<|D|<X}$ $(k = 1, 2, 3, 4) \rightsquigarrow W_{\mathrm{Sp}}^k(x)$,
- $\{L(s,\Delta\otimes\chi_D)\}_{X/2<|D|<X}$ $(k = 1, 2, 3, 4) \rightsquigarrow W_{\mathrm{SO(even)}}^k(x)$.

1 つ目の族は連続的に t を動かすので 1 レベル密度の平均は和でなく積分で定義する必要があることに注意されたし.

Remark 4.3. L 関数の族に対する Ratios Conjecture(比予想) は強い予想である. 例えば Riemann ゼータ関数に対する Ratios Conjecture を仮定すると, Riemann 予想を証明することができる. 実際, Conrey, Snaith [4, Theorem 5.1] により Riemann ゼータ関数に対する Ratios Conjecture から「$\theta = \infty$ 予想」が従う. そして Bettin, Gonek [3] により「$\theta = \infty$ 予想」から Riemann 予想が従う.

また, 分母と分子に Riemann ゼータ関数が 2 個出てくる場合の Ratios Conjecture を仮定すると, Montgomery の pair correlation conjecture を証明することができる. このことは [4, §4] で解説されている. そこではテスト関数に [4] の (3.1) という条件が課されていることに注意されたし.

Fazzari の研究では 2 つの大きな予想を仮定している一方で, 筆者の研究では Fazzari の予想の unconditional な例を提示しているのが利点の 1 つである.

Fazzari はランダム行列理論の世界で重み付き 1 レベル密度を考察することで, 重み付き密度 W_G^k の明示式を一般の k について予想しており, 小さい k に対してはランダム行列理論における計算で確認可能であると述べている. 例えば $k=1$ のときは以下で与えられる:

$$W_{\mathrm{U}}^1(x) = 1 - \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2},$$

$$W_{\mathrm{Sp}}^1(x) = 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} - \frac{2\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2},$$

$$W_{\mathrm{SO(even)}}^1(x) = W_{\mathrm{Sp}}(x) = 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}.$$

筆者の研究で登場した $W_{G,1/2}$ と Fazzari の予想に出てきた W_G^1 は一致してほしいところだが, どうだろうか? 実は, 対称 2 次 L 関数の場合の Theorem 3.5 でも今回の Dirichlet L 関数の場合の Theorem 3.2 でも, ちゃんと一致している:

$$W_{\mathrm{Sp},1/2}(x) = 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} - \frac{2\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} = W_{\mathrm{Sp}}^1(x),$$

$$W_{\mathrm{GUE}}(x) = 1 - \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} = W_{\mathrm{U}}^1(x).$$

Kowalski, Saha, Tsimerman の結果や Knightly, Reno の結果と比較すれば, $W_{\mathrm{SO(even)}}^1(x) = W_{\mathrm{Sp}}(x)$ となっていることも整合性がとれている.

Remark 4.4. 2022 年 8 月に arXiv に Bettin, Fazzari の [2] が公開された. これによると, $\{\zeta(s+it)\}_{t\in\mathbb{R}}$ $(k=1,2)$ の場合は Riemann 予想と Ratios Conjecture の仮定を外すことができる. ただし, $k=1$ のときはサポートの条件も外せるが, $k=2$ のときは $\mathrm{supp}(\hat{\phi}) \subset (-1/2, 1/2)$ を課す必要がある.

Remark 4.5. 2023 年 1 月のことだが, 筆者は Fazzari のホームページを発見した (彼が学位を取ってアメリカに移ってから作ったようである). そこで weighted one-level density に関するサーベイ [5] を発見した. [5] では筆者の研究 [19], [20] や Bettin, Fazzari の研究 [2] についても言及がなされている.

5. Sketch of the proof

Theorem 3.2 の証明は 2 つの公式を使うことで達成される. 1 つ目は Weil の明示公式である.

Proposition 5.1 (Explicit formula à la Weil)**.** $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ がコンパクトであるような $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対し,

$$D(\chi,\phi) = \hat{\phi}(0) - \sum_{k=1,2}\sum_{p}(\chi(p^k) + \overline{\chi(p^k)})\hat{\phi}\left(\frac{k\log p}{\log q}\right)\frac{\log p}{p^{k/2}\log q} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\log q}\right).$$

ここで p は素数全体を走る.

したがって Theorem 3.2 を示すには, 素数 p と $k=1,2$ に対する

$$\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(s,\chi)|^2\chi(p^k) \qquad (1/2 \leqslant s < 1)$$

の公式があれば良い. ここで 2 つ目の公式として, Dirichlet L 関数に対する twisted second moment に関する Selberg の公式 [17, p.14, Theorem 1] を思い出す.

Theorem 5.2 (Selberg (1946) [17]). $s, s' \in \mathbb{C}$, $\sigma = \mathrm{Re}(s)$, $\sigma' = \mathrm{Re}(s')$, $0 < \sigma < 1$, $0 < \sigma' < 1$ とする．q を素数とし，$m, n \in \mathbb{N}$, $\gcd(m,n) = \gcd(m,q) = \gcd(n,q) = 1$ とする．このとき，

$$
\begin{aligned}
\sum_{\chi \in \mathcal{F}_q} L(s,\chi) L(s',\overline{\chi}) \chi(m) \overline{\chi(n)} = {} & \frac{q-1}{m^{s'} n^s} L(s+s', \chi_1) \\
& + \frac{(q-1)^2 q^{-s-s'}}{m^{1-s} n^{1-s'}} \frac{(2\pi)^{s+s'-1}}{\pi} \Gamma(1-s)\Gamma(1-s') \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-s')\right) \zeta(2-s-s') \\
& + \mathcal{O}\left(\frac{|ss'|}{\sigma\sigma'(1-\sigma)(1-\sigma')} (m q^{\sigma} + n q^{\sigma'} + mn q^{1-\sigma-\sigma'}) \right).
\end{aligned}
$$

ここで，χ_1 は mod q の自明指標である．また，ランダウの記号で無視している定数は絶対定数である．

Proof. 証明は [17] の pp. 7–20 に書かれている．概略を述べると，まず $[0,1] \times [0,1]$ 上の関数 ω を

$$
\omega(x,y) = \min(x(1-y), y(1-x)), \qquad x, y \in [0,1]
$$

で定義し，$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ を周期に持つように定義域を $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に拡張する．この周期関数も ω と書くことにする．ここで第 1 象限から 1 辺の長さが 1 の正方形を取り除いた領域 $D := (0,\infty) \times (0,\infty) - (0,1) \times (0,1)$ 上の 2 重積分

$$
\iint_D \omega(x,y) x^{-s} y^{-s'} dxdy, \qquad \sigma = \mathrm{Re}(s) \in (0,1),\ \sigma' = \mathrm{Re}(s') \in (0,1)
$$

を考察する．ω は連続な 2 変数周期関数であり，各変数ごとに区分的に C^1 級である．2 重 Fourier 級数展開を求めて積分と和の順序を交換することで

$$
\begin{aligned}
& ss' \iint_D \omega(x,y) x^{-s-1} y^{-s'-1} dxdy \\
= & \frac{(2\pi)^{s+s'-1}}{\pi} \Gamma(1-s)\Gamma(1-s') \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-s')\right) \zeta(2-s-s') + \frac{1}{(1-s)(1-s')} - \frac{1}{1-s-s'}
\end{aligned}
$$

を得る．次に q を素数とするとき，$\sigma > 1$ かつ $\sigma' > 1$ の下で，

(5.1)

$$
\sum_{\chi \in \mathcal{F}_q} L(s,\chi) L(s',\overline{\chi}) \chi(m) \overline{\chi(n)} = \left(\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant q/m \\ 1 \leqslant b \leqslant q/n}} + \sum_{\substack{1 \leqslant a < \infty \\ b > q/n}} + \sum_{\substack{a > q/m \\ 1 \leqslant b < \infty}} - \sum_{\substack{a > q/m \\ b > q/b}} \right) \sum_{\chi \in \mathcal{F}_q} \frac{\chi(am)}{a^s} \frac{\overline{\chi(bn)}}{b^{s'}}
$$

となる．Schur の直交性を用いて計算すると正の整数 u, v に対して

$$
\sum_{\substack{1 \leqslant a \leqslant u \\ 1 \leqslant b \leqslant v}} \sum_{\chi \in \mathcal{F}_q} \chi(am) \overline{\chi(bn)} = \frac{q(q-1)}{mn} \omega\left(\frac{um}{q}, \frac{vn}{q} \right) + \mathcal{O}\left(q \left(1 + \frac{um}{q+u} \right) \left(1 + \frac{vn}{q+v} \right) \right)
$$

となる[3]．これを用いて 2 重和に対する Abel の変形法を適用すれば，$\sigma > 0$ かつ $\sigma' > 0$ という条件でも等式 (5.1) が成立することが分かる．あとは (5.1) の右辺の 4 種類の和のうち 2, 3, 4 番目を $\omega(x,y)$ の積分と誤差項の和で書き，1 番目の和を Riemann ゼータ関数や $\frac{1}{1-s}$ などを用いて近似すると，(5.1) の右辺は

$$
\begin{aligned}
& \frac{(q-1) q^{1-s-s'}}{m^{1-s} n^{1-s'}} \left(\frac{1}{1-s-s'} - \frac{1}{(1-s)(1-s')} + ss' \iint_D \omega(x,y) x^{-s-1} y^{-s'-1} dxdy \right) \\
& + \frac{q-1}{m^{s'} n^s} \zeta(s+s') + (\text{Error term})
\end{aligned}
$$

[3] たいしたことではないが，[17, p.12] の (2.2) の右辺 2 行目の $\frac{l_2 k}{\mu_2} \leqslant \nu_2 < n$ は $\frac{l_2 k}{\mu_2} \leqslant \nu_2 \leqslant n$ とすべきである．

と表せる[4]. このようにして Selberg の公式は証明される. □

Remark 5.3. Selberg の [17] では modulus q が素数の場合のみ証明が書いてある. q が素数とは限らない一般の場合は, 上述の Selberg の方法を Paley [16] を見ながら書き換えれば証明は復元可能である. q が一般の自然数のときは [17, p.6] に公式が書いてあり, 誤差項は指数を $q^{1-\sigma+\epsilon}$, $q^{1-\sigma'+\epsilon}$, $q^{1-\sigma-\sigma'+\epsilon}$ のように $\epsilon > 0$ で補正する必要がある. Selberg の論文では言及されていないが, 実は q が素数べきの場合は上の定理と同じ誤差項にできるので ϵ を持ち出さなくてもよい. $q \in \mathbb{N}$ の素因子の個数を $\omega(q)$ とするとき, 素数定理により $2^{\omega(q)} \ll_\epsilon q^\epsilon$ となる. これにより q が素数べきでない場合は誤差項に $\epsilon > 0$ が出てくるのである.

Remark 5.4. χ の動く範囲を primitive な指標全体の集合に制限することも可能である, と [17, p.7] に結果のみが書いてある. [17, p.7] の公式の右辺の第 1 項の h は, 正しくは h' である. 筆者がチェックした限りだと non-principal 指標に関する結果を応用すれば, 自然数 q が「$\mathrm{ord}_p(q) = 1$ となる素数 p が存在しない」を満たす場合は Selberg の誤差項の $q^{4/3-\sigma-\sigma'+\epsilon}$ を $q^{1-\sigma-\sigma'+\epsilon}$ に改善できて, さらに q が素数べきのときは 4/3 を 1 にできるだけでなく $\epsilon > 0$ も不要となる. しかし筆者は $\mathrm{ord}_p(q) = 1$ となる素数 p が存在する場合についてはチェックしていない. なお, [17, p.7] の footnote に書いてある Selberg のコメントによると, おそらく $4/3 - \sigma - \sigma' + \epsilon$ は $1/3 + \min(0, 1 - \sigma - \sigma') + \epsilon$ に改善できるだろうとのことである. q が素数のときの誤差項と同じ誤差項にまで改善できるだろうという期待もそこに書かれている.

Selberg の公式で $s = s' \in \mathbb{R}$, $m = n = 1$ とすると, Paley (1932) の [16] による通常の second moment の公式

$$\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(s,\chi)|^2 \sim \begin{cases} \frac{(q-1)^2}{q}\log q & (s = 1/2) \\ q\,\zeta(2s) & (1/2 < s < 1) \end{cases}$$

が復元されるので, Selberg の公式は Paley の公式の一般化といえる.

さて話を戻そう. $1/2 \leqslant s < 1$ において, s が 1/2 であるかどうかによって, twisted second moment に関する公式の形が以下のように変わる.

Proposition 5.5. $s \neq 1/2$ のとき, $k = 1, 2$ と, q 以外の全ての素数 p に対して,

$$\frac{1}{\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(s,\chi)|^2} \sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(s,\chi)|^2 \chi(p^k) = p^{-ks} + \mathcal{O}_s(p^{k(s-1)} q^{1-2s}) + \mathcal{O}_s(p^k q^{-s}).$$

Proposition 5.6. $s = 1/2$ のとき, $k = 1, 2$ と, q 以外の全ての素数 p に対して,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(1/2,\chi)|^2} \sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(1/2,\chi)|^2 \chi(p^k) \\ &= p^{-k/2} - p^{-k/2}\frac{\log p^k}{\log q} + \mathcal{O}\left(\frac{p^{-k/2}}{\log q}\left(1 + \frac{\log p}{\log q}\right)\right) + \mathcal{O}(p^k q^{-1/2}). \end{aligned}$$

このような現象が起きる理由は, Selberg の公式を $s = s' \in \mathbb{R}$ の場合に書き下せば分かる. 実際 $s = s' \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{\chi\in\mathcal{F}_q} |L(s,\chi)|^2 \chi(m)\overline{\chi(n)} &= \frac{q-1}{m^s n^s} L(2s,\chi_1) + \frac{(q-1)^2 q^{-2s}}{m^{1-s} n^{1-s}} \frac{(2\pi)^{2s-1}}{\pi} \Gamma(1-s)^2 \zeta(2-2s) \\ &\quad + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(1-s)^2}(mq^s + nq^s + mnq^{1-2s})\right) \end{aligned}$$

[4] [17, p.17] の下から 2 行目の積分範囲に出てくる $[\frac{\mu_2}{k}] + 1$ は誤植であり, 正しくは $[\frac{k}{\mu_2}] + 1$ である.

となり, 左辺は s に関して整関数であるのに対し, 右辺の主要項が見かけ上 $s=1/2$ で極を持つ. 右辺の極はもちろん除去可能であり, $s=1/2$ のときの右辺の値を計算すると, m^{-s} や q^{-s} の微分の計算が生じて, $\frac{\log p}{\log q}$ の項が出てくる次第である.

素数に関する和の評価には部分和法 (partial summation) を用いればよい.

Lemma 5.7 (Partial summation)**.** $\alpha>0$ とする. $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ が $\mathrm{supp}(\hat{\phi})\subset[-\alpha,\alpha]$ を満たすとき, $q\to\infty$ において,

$$\sum_p \hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log q}\right)\frac{\log p}{p\log q}=\int_0^\infty \hat{\phi}(x)dx+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log q}\right),$$

$$\sum_p \hat{\phi}\left(\frac{\log p^k}{\log q}\right)\frac{\log p}{p^{1/2}\log q}\times p^k q^{-s}=\mathcal{O}\left(\frac{q^{3\alpha/2-s}}{\log q}\right),\qquad (k=1,2),$$

$$\sum_p \hat{\phi}\left(\frac{\log p}{\log q}\right)\frac{(\log p)^2}{p(\log q)^2}=\int_0^\infty \hat{\phi}(x)xdx+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\log q}\right)$$

が成り立つ. ここで p は素数全体を走る.

この証明の際には素数定理 $\pi(x)=\mathrm{Li}(x)+\mathcal{O}(xe^{-c\sqrt{\log x}}), x\to\infty$ と Stieltjes 積分を使えばよい ($c>0$ は絶対定数). 特に ϕ が偶関数のとき, 1 つ目と 3 つ目の公式の主要項はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \hat{\phi}(x)dx=\frac{1}{2}\phi(0),\qquad \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \hat{\phi}(x)|x|dx$$

となるので, これと Fourier 解析を用いて Theorem 3.2 の主要項を導けばよい. 仮に ϕ が奇関数ならば, 関数等式により $D(\chi^{-1},\phi)=-D(\chi,\phi)$ なので, $1/2\leqslant s<1$ のとき

$$\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q}|L(s,\chi)|^2D(\chi,\phi)=\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q}|L(s,\chi^{-1})|^2D(\chi^{-1},\phi)=-\sum_{\chi\in\mathcal{F}_q}|L(s,\chi)|^2D(\chi,\phi)$$

となり, ゆえにこの和は 0 になる. したがって ϕ が偶関数である場合を考えれば十分である[5].

なお, Theorem 3.2 に $\mathrm{supp}(\hat{\phi})\subset[-2s/3,2s/3]$ という仮定があるが, これは部分和法によって生じる $\mathcal{O}\left(\frac{q^{3\alpha/2-s}}{\log q}\right)$ を $q\to\infty$ で 0 になるようにするためである. $s=1/2$ のときに p^s や q^s の微分を計算することになり, $\frac{\log p}{\log q}$ が生じ, この項が零点の密度関数を変化させているのである. 以上が証明の概略である.

Remark 5.8. Selberg の公式の誤差項を改善することで, $\mathrm{supp}(\hat{\phi})$ の条件を緩めることができる. Selberg の誤差項は現存する文献の中では最良ではあるが, 彼自身も [17, p.7] で触れているように, 誤差項は改良の余地がある.

$s=s'=1/2$ に限定すれば, Selberg の公式の誤差項は Bettin (2016) の twisted second moment の公式 [1] のものが最良である. 彼の結果を使うと $s=1/2$ の場合に限り, 我々のサポートの条件 $\mathrm{supp}(\hat{\phi})\subset[-1/3,1/3]$ は $\mathrm{supp}(\hat{\phi})\subset[-1/2,1/2]$ にまで緩めることができる. 実際に計算する際には Bettin が課した条件により $q\geqslant 4p$ が必要であり, そのためすべての素数 p にわたる和を扱えなくなってしまうが, $\hat{\phi}$ のサポートの条件を考慮することでこの問題は解消される.

Remark 5.9. $s=1/2$ が Selberg の公式の主要項の見かけ上の特異点であり, 打ち消し合いにより $s=1/2$ における Laurent 展開の主要部が消えて, $s=1/2$ のときの主要項に $\frac{\log p}{\log q}$ の項が生じる. 同様の現象は筆者が以前与えた Theorem 3.5 の証明で観察されたものと同じである. そこでは Jacquet-Zagier 型跡公式 [21] の主要項が $s=1/2$ において見かけ上特異点であることから $\frac{\log p}{\log q}$ の項が生じていた.

[5][20, Proposition 3.2] の証明中の partial summation を使って 2 つの漸近公式を導出するところで, 断りなく ϕ を偶関数として扱っている. しかしここは, 証明中で ϕ を偶関数としてよいことを断っておくべきである.

6. Appendix : Weighted one-level density in random matrix theory

§3 で Fazzari の Weighted one-level density conjecture を紹介した．この章では W_G^k の明示式の予想及びランダム行列モデルにおける Weighted one-level density conjecture を紹介する．

まず, Weighted one-level density conjecture のランダム行列理論版を紹介する．G は Katz-Sarnak 予想の 5 種類のどれかとする．$A \in G(N)$ に対して特性多項式 $Z_A(\theta) = \det(I - Ae^{-i\theta})$ は L 関数と同様に (θ と $-\theta$ に関する) 関数等式を満たし, Hilbert-Pólya 予想のような行列式表示を持っている．特性多項式はランダム行列理論における L 関数の対応物であると考えられており, L 関数の世界でモーメントや零点の解析が困難なときには, ランダム行列理論の世界で対応する問題を解くことで, L 関数の世界の現象を予測することがある程度可能である．Fazzari [6] は L 関数の中心値のべき乗による重みつき 1 レベル密度のランダム行列理論版も扱った．ランダム行列理論の世界では Ratios Conjecture は定理として知られているので, 以下の定理の証明は Fazzari がおこなったような L 関数の族の場合と同様にすればよい (なお [6] には証明は書かれていない).

Theorem 6.1 ([6, Theorems 2, 4 and 6])**.** ϕ は Conjecture 4.1 の意味で良い関数とする．

(1) [Unitary] $k = 1, 2$ のとき, $N \to \infty$ とすると,

$$\frac{1}{\int_{\mathrm{U}(N)} |Z_A(0)|^{2k} dA} \int_{\mathrm{U}(N)} \sum_{j=1}^{N} \phi\left(\frac{N}{2\pi}\theta_{A,j}\right) |Z_A(0)|^{2k} dA \to \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W_{\mathrm{U}}^k(x) dx.$$

(2) [Symplectic] $k = 1, 2, 3, 4$ に対して, $N \to \infty$ とすると,

$$\frac{1}{\int_{\mathrm{USp}(2N)} Z_A(0)^k dA} \int_{\mathrm{USp}(2N)} \sum_{j=1}^{N} \phi\left(\frac{N}{\pi}\theta_{A,j}\right) Z_A(0)^k dA \to \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W_{\mathrm{Sp}}^k(x) dx.$$

ここで, $0 \leqslant \theta_{A,1} \leqslant \cdots \leqslant \theta_{A,N} \leqslant \pi$ は A の固有値の多重集合が $\{e^{i\theta_{A,j}} \mid 1 \leqslant j \leqslant N\} \cup \{e^{-i\theta_{A,j}} \mid 1 \leqslant j \leqslant N\}$ になるように定めている．

(3) [Orthogonal] $k = 1, 2, 3, 4$ に対して, $N \to \infty$ とすると,

$$\frac{1}{\int_{\mathrm{SO}(2N)} Z_A(0)^k dA} \int_{\mathrm{SO}(2N)} \sum_{j=1}^{N} \phi\left(\frac{N}{\pi}\theta_{A,j}\right) Z_A(0)^k dA \to \int_{\mathbb{R}} \phi(x) W_{\mathrm{SO(even)}}^k(x) dx.$$

ここで, $0 \leqslant \theta_{A,1} \leqslant \cdots \leqslant \theta_{A,N} \leqslant \pi$ は A の固有値の多重集合が $\{e^{i\theta_{A,j}} \mid 1 \leqslant j \leqslant N\} \cup \{e^{-i\theta_{A,j}} \mid 1 \leqslant j \leqslant N\}$ になるように定めている．

$Z_A(\theta)$ の中心値が $Z_A(0)$ であるので, 例えば上の (1) は $|Z_A(0)|^{2k} D(A, \phi)$ の平均であり, L 関数の場合の weighted one-level density に対応していることが見て取れる．

W_G^k の公式はユニタリー型のとき,

$$W_{\mathrm{U}}^0(x) = W_{\mathrm{U}}(x) = 1, \qquad W_{\mathrm{U}}^1(x) = 1 - \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2},$$

$$W_{\mathrm{U}}^2(x) = 1 - \frac{2 + \cos(2\pi x)}{(\pi x)^2} + \frac{3\sin(2\pi x)}{(\pi x)^3} + \frac{3(\cos(2\pi x) - 1)}{2(\pi x)^4}$$

である．シンプレクティック型のときは,

$$W_{\mathrm{Sp}}^0(x) = W(\mathrm{Sp})(x) = 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x},$$

$$W_{\mathrm{Sp}}^1(x) = 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} - \frac{2\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2},$$

$$W_{\mathrm{Sp}}^2(x) = 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} - \frac{24(1 - \sin^2(\pi x))}{(2\pi x)^2} + \frac{48\sin(2\pi x)}{(2\pi x)^3} - \frac{96\sin^2(\pi x)}{(2\pi x)^4},$$

$$
\begin{aligned}
W^3_{\mathrm{Sp}}(x) =& 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} - \frac{12\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2} - \frac{240\sin(2\pi x)}{(2\pi x)^3} - \frac{15(6-10\sin^2(\pi x))}{(\pi x)^4} \\
&+ \frac{2880\sin(2\pi x)}{(2\pi x)^5} - \frac{90\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^6},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
W^4_{\mathrm{Sp}}(x) =& 1 - \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} - \frac{10(1+\cos(2\pi x))}{(\pi x)^2} + \frac{90\sin(2\pi x)}{(\pi x)^3} - \frac{15(3-31\cos(2\pi x))}{(\pi x)^4} \\
&- \frac{1470\sin(2\pi x)}{(\pi x)^5} - \frac{315(1+9\cos(2\pi x))}{(\pi x)^6} + \frac{3150\sin(2\pi x)}{(\pi x)^7} - \frac{1575(1-\cos(2\pi x))}{(\pi x)^8}
\end{aligned}
$$

である．直交型 (SO(even)) のときは以下の通りである:

$$
W^0_{\mathrm{SO(even)}}(x) = W_{\mathrm{SO(even)}}(x) = 1 + \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x},
$$

$$
W^1_{\mathrm{SO(even)}}(x) = W_{\mathrm{Sp}}(x) = W^0_{\mathrm{Sp}}(x),
$$

$$
W^2_{\mathrm{SO(even)}}(x) = W^1_{\mathrm{Sp}}(x), \qquad W^3_{\mathrm{SO(even)}}(x) = W^2_{\mathrm{Sp}}(x), \qquad W^4_{\mathrm{SO(even)}}(x) = W^3_{\mathrm{Sp}}(x).
$$

一般の k についても $W^k_{\mathrm{U}}(x)$, $W^k_{\mathrm{Sp}}(x)$, $W^k_{\mathrm{SO(even)}}(x)$ の明示式が Fazzari によって予想された．

Conjecture 6.2 ([6, Conjecture 1])**.** 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$
W^k_{\mathrm{SO(even)}}(x) = W^{k-1}_{\mathrm{Sp}}(x).
$$

また任意の $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，

$$
W^k_{\mathrm{U}}(x) = \frac{W^k_{\mathrm{Sp}}(x) + W^k_{\mathrm{SO(even)}}(x)}{2}.
$$

さらに任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
W^k_{\mathrm{Sp}}(x) =& 1 - (2k+1)\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x} \\
&+ \sum_{j=1}^{k} \frac{k(k+1)}{2^{2j-2}\pi^{2j-1}} \frac{1}{2j-1} \frac{1}{j} \binom{k-1}{j-1} \binom{k+j}{j-1} \frac{d^{2j-1}}{dx^{2j-1}} \left[\frac{1-\cos(2\pi x)}{2\pi x} \right].
\end{aligned}
$$

もしこの Fazzari の予想が正しいなら，

$$
\widehat{W^k_{\mathrm{Sp}}}(x) = \delta_0 + P^k_{\mathrm{Sp}}(|x|)\,\eta(x)
$$

が成立する．ここで，

$$
\eta(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1, \\ 1/2 & |x| = 1, \\ 0 & |x| > 1, \end{cases}
$$

$$
P^k_{\mathrm{Sp}}(y) = -\frac{2k+1}{2} - k(k+1)\sum_{j=1}^{k}(-1)^j \frac{1}{j}\binom{k-1}{j-1}\binom{k+j}{j-1}\frac{y^{2j-1}}{2j-1}
$$

とした．係数に現れる $\frac{1}{j}\binom{k-1}{j-1}\binom{k+j}{j-1}$ は OEIS に掲載されていて，「凸 $(k+2)$ 角形をいくつかの交わらない対角線によって j 個の閉領域に分割する方法の総数[6]」である．[6] では上記の $\widehat{W^k_{\mathrm{Sp}}}(x)$ の公式のほうを予想として書いている．Theorem 6.1 は k が高々 4 のときにしか与えられていないが, 5 以上の k に対しても k を固定するごとにランダム行列理論版の Ratios Conjecture を用いて $W^k_G(x)$ の明示式を与えることは可能であろう．

[6]いくつかの交わらない対角線と書いたが，本数は自動的に $(j-1)$ 本になる．OEIS の該当するページは https://oeis.org/A033282 である．

Acknowledgements

講演および本記事の執筆の機会を与えてくださった世話人の山﨑義徳氏 (愛媛大学), 安福悠氏 (日本大学) にはこの場を借りて感謝いたします. この原稿を読んでコメントをくださった Ade Irma Suriajaya 氏 (九州大学) にも感謝いたします.

今回は久しぶりに対面で参加できて, 嬉しい限りです. 数学は対面で議論することで生まれるアイディアがあるので, 対面による研究討議には言葉では説明できない魔法のような力があると感じています. オンライン開催にももちろん利便性はありますが, 対面で研究集会がどんどん実施できるようになることを祈るばかりです.

また筆者は JSPS 科研費 20K14298(若手研究) の助成を受けております.

References

[1] S. Bettin, *On the reciprocity law for the twisted second moment of Dirichlet L-functions*, Trans. Am. Math. Soc. **368** (10), 6887–6914 (2016).
[2] S. Bettin, A. Fazzari, *A weighted one-level density of the non-trivial zeros of the Riemann zeta-function*, preprint, arXiv:2208.08421 [math.NT].
[3] S. Bettin, S. M. Gonek, *The* $\theta = \infty$ *conjecture implies the Riemann hypothesis*, Mathematika, volume 63 (2017), issue 01, pp. 29–33.
[4] J. B. Conrey, N. C. Snaith, *Applications of the L-functions ratios conjecture*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **94** (2007), no. 3, 594–646.
[5] A. Fazzari, *A survey on a weighted one-level density of families of L-functions*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **80** 2022 (2022), 29–40.
[6] A. Fazzari, *A weighted one-level density of families of L-functions*, preprint, arXiv:2109.07244 [math.NT].
[7] M. Furusawa, K. Morimoto, *Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Böcherer's conjecture*, J. Eur. Math. Soc. **23**, Issue 4, (2021), 1295–1331.
[8] C.P. Hughes, Z. Rudnick, *Linear statistics of low-lying zeros of L-functions*, Q. J. Math. **54** (2003), no. 3, 309–333.
[9] N. M. Katz, P. Sarnak, *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 45. American Mathematical Society, Providence (1999).
[10] N. M. Katz, P. Sarnak, *Zeroes of zeta functions and symmetry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **36** no. 1, (1999), 1–26.
[11] H. H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, *An equidistribution theorem for holomorphic Siegel modular forms for* GSp_4 *and its applications*, J. Inst. Math. Jussieu **19** (2020), 351–419.
[12] H. H. Kim, S. Wakatsuki, T. Yamauchi, *Equidistribution theorems for holomorphic Siegel modular forms for GSp*$_4$*; Hecke fields and n-level density*, Math. Z. **295** (2020), 917–943.
[13] A. Knightly, C. Reno, *Weighted distribution of low-lying zeros of* $\mathrm{GL}(2)$ *L-functions*, Canad. J. Math. **71** (1), (2019), 153–182.
[14] E. Kowalski, A. Saha, J. Tsimerman, *Local spectral equidistribution for Siegel modular forms and applications*, Compos. Math. **148** (2012), 335–384.
[15] 松江要, 岡本健太郎, 『社会に最先端の数学が求められるワケ (1) 新しい数学と産業の協奏』, 日本評論社, 2022.
[16] R. E. A. C. Paley, *On the k-analogues of some theorems in the theory of the Riemann* ζ*-function*, Proc. London Math. Soc. (2) **32** (1931), no. 4, 273–311.
[17] A. Selberg, *Contributions to the theory of Dirichlet's L-functions*, Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo I 1946 (1946), no. 3, 62 pp.
[18] 杉山真吾, 対称べき L 関数の低い位置にある零点の重みつき密度について, 数理解析研究所講究録 2230「保型形式、保型 L 関数とその周辺」, pp. 1–15, 2022.
[19] S. Sugiyama, *Low-lying zeros of symmetric power L-functions weighted by symmetric square L-values*, preprint, arXiv:2101.06705 [math.NT].
[20] S. Sugiyama, A. I. Suriajaya, *Weighted one-level density of low-lying zeros of Dirichlet L-functions*, Res. Number Theory, **8**, Article number: 55 (2022).
[21] S. Sugiyama, M. Tsuzuki, *An explicit trace formula of Jacquet-Zagier type for Hilbert modular forms*, J. Func. Anal. **275**, Issue 11, (2018), 2978–3064.
[22] 杉山真吾, 横山俊一, 『社会に最先端の数学が求められるワケ (2) データ分析と数学の可能性』, 日本評論社, 2022.