On the screw function of the Riemann zeta function [1]

東京工業大学 理学院 数学系　鈴木正俊 (Suzuki, Masatoshi)
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1. 序文

研究集会中の講演では, まずスクリュー関数 (screw functions) とは何かを古典論から始めて解説し, Riemann 予想を仮定すると Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ にあるスクリュー関数が対応すること, 及び, その仮想的対応から Riemann 予想と同値な命題で趣の異なるものが幾つも得られることを網羅的に述べた.

本稿ではそういった同値命題たちの中で, Weil 分布に関連したものについて解説する. これによって, スクリュー関数による同値性の記述が Riemann ゼータ関数に特有のものではないことが明確になるうえ, スクリュー関数が Weil の明示公式という数論的に由緒正しいものと密接に関係していることが明らかになるからである. また, 講演中には一見 Weil 分布とは関係無さそうに見えた同値命題も, 元々はそれに由来していた場合が幾つもあったことも理由の一つである.

2. スクリュー関数と Riemann ゼータ関数

まず一般のスクリュー関数を Kreĭn–Langer ([2, p. 189]) に従って定義する.

定義 1. 実数 $0 < a < \infty$, もしくは $a = \infty$ に対して, 開区間 $(-2a, 2a)$ 上で定義された複素数値関数 $g(t)$ が $(-2a, 2a)$ 上のスクリュー関数であるとは, Hermite 性

$$g(-t) = \overline{g(t)}$$

を満たし, 核

$$G_g(t,u) := g(t-u) - g(t) - g(-u) + g(0)$$

が $(-a, a)$ 上で非負値であることを言う.

核 $G_g(t,u)$ が $(-a,a)$ 上で非負値とは, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $t_i \in \mathbb{R}$, $|t_i| < a$, $\xi_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ に対して, 非負性

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} G_g(t_i, t_j)\, \xi_i \overline{\xi_j} \geqslant 0 \tag{2.1}$$

が成り立つことである.

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ を用いて, Riemann の ξ-関数を

$$\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

と定める. Riemann ゼータ関数の非自明零点は $\xi(s)$ の零点と重複度を込めて一致するので, Riemann ゼータ関数の非自明零点がみな臨界線 $\Re(s) = 1/2$ 上にあることを予想する Riemann 予想は, $\xi(1/2 - iz)$ の零点がみな実であることと同値である.

[1] この研究は基盤研究 (C)（研究代表者：鈴木正俊, 研究課題番号：17K05163）の助成を受けています.

Riemann 予想とスクリュー関数は次のようにして関連する. まず, Lagarias [4, (1.5)] で述べられているように, Riemann 予想は

$$\Im\left[i\,\frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{1}{2}-iz\right)\right]>0 \quad \text{if} \quad \Im(z)>0 \tag{2.2}$$

と同値である. 後者は

$$Q_\xi(z):=i\,\frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{1}{2}-iz\right) \tag{2.3}$$

が Nevanlinna クラス $\mathcal{N}$ に属すことを意味する. ($\mathcal{N}$ は上半平面 $\mathbb{C}_+=\{z\,|\,\Im(z)>0\}$ 上の正則関数で, 像が $\mathbb{C}_+\cup\mathbb{R}$ に含まれるもの全体.) Kreĭn–Langer [2, Satz 5.9] は (片側) Fourier 変換の等式

$$\int_0^\infty g(t)\,e^{izt}\,dt=-\frac{i}{z^2}Q(z), \quad \Im(z)>\exists h\geqslant 0$$

が, $\mathbb{R}$ 上のスクリュー関数で $g(0)=0$ を満たすもの全体と, $\mathcal{N}$ の元で

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{Q(iy)}{y}=0 \tag{2.4}$$

を満たすもの全体の間に全単射を与えることを示した. ガンマ関数についての Stirling の公式と $\zeta'/\zeta(s)$ の Dirichlet 級数表示から, $Q_\xi(z)$ について (2.4) が成り立つことは容易に示されるので, Riemann 予想が正しいとすれば上記の議論から,

$$\int_0^\infty g_\xi(t)\,e^{izt}\,dt=-\frac{i}{z^2}Q_\xi(z), \quad \Im(z)\gg 0 \tag{2.5}$$

を満たす $\mathbb{R}$ 上のスクリュー関数 $g_\xi(t)$ が存在する. 逆に (2.5) を満たすような $[0,\infty)$ 上の連続関数 $g_\xi(t)$ で $g_\xi(0)=0$ を満たすものが存在し, それを Hermite 性により $\mathbb{R}$ 上に連続に延長したものが $\mathbb{R}$ 上のスクリュー関数ならば, (2.2) との同値性を経由して Riemann 予想が従う.

集会の際「どういった経緯でスクリュー関数などという耳慣れないものを扱うことになったのか」といった主旨の質問を何度か受けた. その答えは積分表示 (2.5) にある.

ある論文を投稿した際, レフェリーからの疑問に答えるために, 積分表示 (2.5) で定まる関数 $g_\xi(t)$ について考察する必要が生じた. そこで色々と調べている時にある論文でスクリュー関数という概念に出会い, そこからたどって上記の Kreĭn–Langer の対応を見つけたことで, レフェリーへの疑問に完全な形で答えることができた. どころが, その論文はリジェクトされた. 残念.

閑話休題, 上記のような事情から (2.5) を満たすような $g_\xi(t)$ に興味が持たれるが, それは Fourier 逆変換によって具体的に求められる. 結果として, $t>0$ のとき

$$\begin{aligned} g_\xi(t) &:= -4(e^{t/2}+e^{-t/2}-2)-\frac{t}{2}\left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right)-\log\pi\right] \\ &\quad +\frac{1}{4}\left(e^{-t/2}\Phi(e^{-2t},2,1/4)-C\right)+\sum_{n\leqslant e^t}\frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}}(t-\log n) \end{aligned} \tag{2.6}$$

とすればよい. ここで $\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数で, n が素数 p のベキならば $\log p$, それ以外は 0 の値をとる. また, $\Phi(z,s,a)=\sum_{n=0}^\infty(n+a)^{-s}z^n$ は Hurwitz–Lerch ゼータ関数, $C=\Phi(1,2,1/4)$ である. これが $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数であることは自明

で, $\lim_{t\to 0+} g_\xi(t)=0$ も容易に分かるので, $g_\xi(-t)=\overline{g_\xi(t)}=g_\xi(t)$ により $\mathbb{R}$ 上の連続な偶関数が定まる. それも同じ記号 $g_\xi(t)$ で表す.

関数 $g_\xi(t)$ を (2.6) で定めたとき, Fourier 変換の等式 (2.5) が $\Im(z)>1/2$ で無条件に成り立つ. これには証明を要するが, それを認めれば $g_\xi(t)$ が $\mathbb{R}$ 上のスクリュー関数であることと Riemann 予想の同値性は, 先の議論から直ちに結論される. そこで $g_\xi(t)$ を $\zeta(s)$ **または** $\xi(s)$ **のスクリュー関数**と呼ぶことにする.

ここで スクリュー関数の定義に立ち戻り, 非負性 (2.1) を $(-a,a)$ に制限したものは

$$\langle \phi_1,\phi_2\rangle_{G_g,a} := \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} G_g(t,u)\phi_1(t)\overline{\phi_2(u)}\,dudt \tag{2.7}$$

により定義される $L^2(-a,a)$ 上の Hermite 形式の非負性と同値であることに注意する. すると $g_\xi(t)$ が $\mathbb{R}$ 上のスクリュー関数であることは, $L^2(-a,a)$ 上の Hermite 形式 (2.7) が任意の $a>0$ に対して非負値であることと同値だから, Riemann 予想と $L^2(-a,a)$ 上の Hermite 形式 (2.7) の非負性も同値性になる. この種の同値性でよく知られたものとして, しばしば Weil の正値性と呼ばれる Weil 分布の非負性が挙げられる. こういった同値性で本質的に異なるものが数多く存在するとは考え難いので, Hermite 形式の族 (2.7) の非負性と, Weil の正値性の関連が期待される. 実際, 我々は以降で述べるような明確な関係性を見出すことになる.

3. Weil の正値性と吉田の非退化性

3.1. 数ある Riemann 予想の同値命題の中で, Weil 分布の非負性は比較的有名なものと思われる. それを述べるため, まず Weil 分布を定義する. $C_c^\infty(\mathbb{R})$ をコンパクト台をもつ C^∞ 級関数全体の成す $\mathbb{C}$-線形空間とし, $(f_n)\subset C_c^\infty(\mathbb{R})$ が $f\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に収束することを, f と f_n すべての台を含むコンパクト集合上で, 各 k 階導関数 $f_n^{(k)}$ が $f^{(k)}$ に一様収束することと定める. この位相により $C_c^\infty(\mathbb{R})$ は完備な局所凸位相線形空間を成す. このとき, 連続な線形汎関数 $C_c^\infty(\mathbb{R})\to\mathbb{C}$ は Schwartz 超関数または分布 (distribution) と呼ばれる. Weil 分布は

$$\psi \ \mapsto\ \mathsf{W}(\psi) := \sum_\gamma \int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\,e^{i\gamma t}\,dt$$

により定まる分布である. (以下の Weil の判定規準を述べるだけならば, $C_c^\infty(\mathbb{R})$ の位相を考慮する必要はない.) ここで $\sum_\gamma$ は $z\mapsto\xi(1/2-iz)$ の零点 γ 全体を重複度を込めて渡る和である. このとき Weil 分布の非負性とは,

$$\mathsf{W}(\psi(t)*\overline{\psi(-t)})\geqslant 0$$

が任意の $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対し成り立つことを指す. ここで $*$ は $L^1(\mathbb{R})$ 上の合成積である:

$$(\psi_1*\psi_2)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_1(u)\psi_2(t-u)\,du.$$

Weil [11] は Riemann 予想が Weil 分布の非負性と同値であること, 所謂 Weil の正値性判定規準, を示した. (英語だと Weil's positivity criterion などとなるが, この positive という単語には注意が必要である. 古典的な文献だと, 非負を positive, 正を strictly positive などと言っているものが少なくないからである. こちらの言い方に合わせて本節のタイトルには「正値」と書いたが, 個人的には「非負」の方が好みなので, 本論では「非負」という用語を採用している.) ただし, Weil 自身はテスト関数をガウス関数と多項式の積で考えており, テスト関数をコンパクト台な C^∞ 関数とすることは言及し

ていない. 少なくとも筆者は, Weil の論文集を含めても, 吉田 [12] 以前にコンパクト台のテスト関数で RH の同値性を述べた文献を見たことがない.

Weil 分布を用いて $C_c^\infty(\mathbb{R})$ 上の Hermite 形式を $\psi_1,\,\psi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ に対して

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_W := \mathsf{W}(\psi_1(t) * \overline{\psi_2(-t)}) \tag{3.1}$$

で定める. このとき Weil 分布の非負性は, Hermite 形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ の非負性に他ならない.

3.2. Weil の正値性判定規準に比べ, Hermite 形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ の非退化性が Riemann 予想と同値になるという吉田 [12] の結果はあまり広く知られていないと思われる. 実際, この原稿を書いている時点で Weil [11] の引用数が MathSciNet で 73 件なのに対し, 吉田 [12] の引用数は 7 件である. とはいえ, この 7 件には E. Bombieri, A. Connes, P. Sarnak, A. Zaharescu といった錚々たる顔ぶれが含まれており「知る人ぞ知る」結果とも言える.

吉田の判定規準を詳しく述べよう. 各 $0 < a < \infty$ に対して, 関数空間 $K(a)$ を, $\mathbb{R}$ 上の関数 $\psi(t)$ であって, ある周期 $2a$ を持つ $h(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ によって $|t| \leqslant a$ であるとき $\psi(t) = h(t)$ と表され, $|t| > a$ ならば $\psi(t) = 0$ であるようなもの全体の成す $\mathbb{C}$-線形空間とする. さらに, 各 $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ に対して, $K_N(a)$ を $K(a)$ の元 ψ で, すべての $|n| \leqslant N$ に対して

$$\int_{-a}^{a} \psi(x) \exp\left(\frac{\pi i n x}{a}\right) dx = 0$$

を満たすもの全体が成す部分空間とする. このとき, $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ は $K(a)$ 上で定義される.

まず吉田は, 与えられた a に対して N を十分大きくとれば, $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ は $K_N(a)$ 上で正定値であることを示した. したがって, N を a に対して十分大きくとれば, $K_N(a)$ を $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ について完備化した $\widehat{K_N(a)}$ が定義される. このとき, 直和分解

$$K(a) = W \oplus K_N(a)$$

が成り立つような W を用いて,

$$\widehat{K(a)} := W \oplus \widehat{K_N(a)}$$

と定める. このとき, $\widehat{K(a)}$ は N や W によらずに定まり, Hermite 形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ は $\widehat{K_N(a)}$ および $\widehat{K(a)}$ へ一意に延長される.

このとき吉田は, Riemann 予想が成り立つことと, Hermite 形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ の $\widehat{K(a)}$ 上での非退化性, 即ち

$$\langle \psi, \eta \rangle_W = 0,\ \forall \eta \in \widehat{K(a)} \quad \Rightarrow \quad \psi = 0,$$

が同値であることを示した ([12, Theorem 2]). しかも吉田は, $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ を $K(a)$ 上に制限すれば, それは無条件に非退化であることを任意の $a > 0$ に対して示している.

いっぽう吉田は, Weil 分布の非負性を試験関数 $\psi(t)$ の台でフィルター付けして考えることも提案し,

$$C(a) := \{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \mid \operatorname{supp} \psi \subset [-a, a]\}$$

という空間の族も導入している. Weil 分布の非負性は, 任意の $a > 0$ に対して $\langle \cdot, \cdot \rangle_W$ の $C(a)$ への制限が非負値であることに他ならない.

4. Weil の正値性と吉田の非退化性の類似

4.1. Hermite 形式 (2.7) と Weil 分布との関係を見るため, 分布について若干復習する. 連続関数 $f(x)$ に対して分布 T_f を

$$T_f(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(t)\,dx, \quad \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

で定める. このとき,

$$T_f(\psi_1(t) * \overline{\psi_2(-t)}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\psi_1(t)\overline{\psi_2(u)}\,dtdu \tag{4.1}$$

なので, 分布 T_f の非負性は核 $f(t-u)$ の非負性と同値である.

Weil 分布 W は形式的な関数

$$f_W(t) := \sum_\gamma e^{i\gamma t} \tag{4.2}$$

に対して定まる分布と理解できる.

4.2. Fourier 積分表示 (2.5) の逆変換を考え, 被積分関数の表示として $\xi(1/2 - iz)$ の Hadamard 積表示の対数微分 (と関数等式) から得られる

$$\frac{\xi'}{\xi}\left(\frac{1}{2} - iz\right) = i\sum_\gamma \left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma}\right) \tag{4.3}$$

を用いると, スクリュー関数 (2.6) に対して

$$g_\xi(t) = \sum_\gamma \frac{e^{i\gamma t} - 1}{\gamma^2} \tag{4.4}$$

という表示が得られる. これから核の表示

$$G_\xi(t,u) = \sum_\gamma \frac{e^{i\gamma t} - 1}{\gamma} \cdot \frac{e^{-i\gamma u} - 1}{\gamma}$$

が従う. ここで $G_{g_\xi}(t,u)$ を $G_\xi(t,u)$ と書いた. これから形式的に

$$\frac{d^2}{dtdu} G_\xi(t,u) = f_W(t-u)$$

という関係が成り立つので, (2.7) と (3.1), (4.1), (4.2) から, 2 種の Hermite 形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{G_\xi,a}$ と $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ の直接的な関係が示唆される. 実際, 次の関係が得られる.

命題 1. 各 $0 < a < \infty$ に対して,

$$\mathcal{C}_0(a) := \{\psi \in C(a) \mid \int \psi(t)\,dt = 0\}$$

と定める. このとき任意の $\phi \in \mathcal{C}_0(a)$ について,

$$\langle\phi,\phi\rangle_{G_\xi,a} = \langle\psi,\psi\rangle_W, \quad \psi(t) = \int_{-a}^{t} \phi(u)\,du$$

が成り立つ.

この関係から, Weil の正値性判定規準の類似として次が得られる:

定理 1. 任意の $0 < a < \infty$ に対して $\langle\cdot,\cdot\rangle_{G_\xi,a}$ が $\mathcal{C}_0(a)$ 上で非負値であることと Riemann 予想は同値である.

いっぽう, 吉田の結果の類似は次の通り:

定理 2. 任意の $0 < a < \infty$ に対して $\langle\cdot,\cdot\rangle_{G_\xi,a}$ が $L^2(-a,a)$ 上で非負値であることと Riemann 予想は同値である.

定理 1 が Weil の正値性と命題 1 から直ちに得られるのに対し, 定理 2 は独自に証明する必要がある. とはいえ, それは吉田 [12, Theorem 2] と同様の方針で証明できる ([6]). 吉田の結果と比較した際, 定理 2 の良い点は, Hermite 形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{G_\xi,a}$ が分布ではなく連続関数 $G_\xi(t,u)$ で表示できることと, 関数空間が通常の L^2 空間であることである. これらの点により, $L^2(-a,a)$ 上の積分作用素

$$f(t) \;\mapsto\; \int_{-a}^{a} G_\xi(t,u)f(u)\,du$$

を利用できるようになる. 例えば, この積分作用素は自己共役かつ Hilbert–Schmidt 型, したがって自己共役コンパクト作用素になり, 定理 1 の非負性は負の固有値の非存在, 定理 2 の非退化性は 0 固有値の非存在に言い換えられる.

5. Weil 分布の非負性から従う性質

前節までの議論により, スクリュー関数 $g_\xi(t)$ と Weil 分布の関係性が明確になった. この節では, この関係性から従う $g_\xi(t)$ の性質, およびその関連事項について述べる.

5.1. 定義から容易に得られる $g_\xi(0) = 0$ に注意して, 非負性 (2.1) を $n = 1$, $g = g_\xi$ について考えると,

$$-g_\xi(t) \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

が得られる. したがって定理 1 から, $-g_\xi(t)$ が非負値であることは Riemann 予想の必要条件である. 実は非負性が十分条件でもあることが示せる.

定理 3. $-g_\xi(t)$ が $\mathbb{R}$ 上で非負値であることと Riemann 予想は同値である.

証明は積分表示 (2.5) に着目して, 定符号関数の Laplace 変換に対する結果を用いる. この際, $\zeta(s)$ が $[1/2,\infty)$ に零点を持たないという事実も用いる ([6]).

さて, 上記のように $-g_\xi(t)$ の非負性が核 $G_\xi(t,u)$ の非負性から従うのだが, 命題 1 を考慮すると, $-g_\xi(t)$ の非負性を Weil 分布の非負性と直接に関連付けたくなる. それには次のようにすればよい. まず, $g_\xi(t)$ が偶関数なことと (4.4) から

$$-g_\xi(t) = \sum_{\gamma} \frac{1-\cos(t\gamma)}{\gamma^2} = 2\sum_{\gamma}\left(\frac{\sin(t\gamma/2)}{\gamma}\right)^2$$

が成り立つ. いっぽう, $t > 0$ に対して

$$\int_{-t/2}^{t/2} e^{i\gamma x}\,dx = \frac{2\sin(t\gamma/2)}{\gamma}$$

なので, 関数 $R_t(x)$ を $|x| < t/2$ ならば $1/\sqrt{2}$, $|x| > t/2$ ならば 0 という値をとるものとすれば,

$$-g_\xi(t) = \langle R_t, R_t\rangle_W, \quad t > 0$$

が成り立つ. したがって, $-g_\xi(t)$ の非負性は Weil 分布の非負性から従う.

5.2. Weil 分布の非負性を特殊化して得られる性質が Riemann 予想と同値になる例として, Li の判定規準 (Li's criterion) が挙げられる. それは Li 係数 $\{\lambda_n\}_{\geqslant 1}$ を

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^n}{ds^n}\left[s^{n-1}\,\log\xi(s)\right]\Big|_{s=1}\\ &= \sum_{\rho:\,\xi(\rho)=0}\left[1-\left(1-\frac{1}{\rho}\right)^n\right]\end{aligned}$$

により定めると, 全ての $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ について λ_n が非負であることが Riemann 予想と同値であるという主張である ([5]). Bombieri–Lagarias [1] は

$$g_n(x) := e^{-x/2}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{(-x)^{j-1}}{(j-1)!}$$

とすれば Li 係数が

$$2\lambda_n = \langle g_n, g_n\rangle_W$$

と表されることを示し, Li 係数の非負性は Weil 分布の非負性から従うものであることを明らかにした.

Weil 分布の特殊化として得られるという共通点があるとはいえ, $\zeta(s)$ のスクリュー関数と Li 係数の直接的関係を期待できる理由はない. ところが, $g_\xi(t)$ のモーメント

$$\mu_n = \int_0^\infty 4^{-1}e^{-t/2}\,(-g_\xi(t))\cdot t^n\,dt,\quad n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$

を用いると, 両者の間に次のような明示的な関係式が成り立つ.

定理 4. Li 係数 λ_n はモーメント μ_n によって,

$$\lambda_1=\mu_0,\quad \lambda_2=6\mu_0-\mu_1,\quad \lambda_3=19\mu_0-7\mu_1+\frac{1}{2}\mu_2, \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{n!}\,\lambda_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!(k+3)!(n-k-1)!}\left[\left(k-\frac{4n-1}{2}\right)^2+2n+\frac{7}{4}\right](-1)^k\mu_k \tag{5.2}$$

$(n\geqslant 4)$ と表される. 逆に, モーメント μ_n は Li 係数 λ_n によって,

$$\frac{1}{n!}\,\mu_n = \sum_{j=1}^{n+1}\left[\sum_{k=1}^{n-j+2}k\,2^{k-1}\binom{n-k+2}{j}\right](-1)^{j+1}\lambda_j \tag{5.3}$$

$(n\geqslant 0)$ と表される. このとき, 関係式 (5.1)–(5.2) と (5.3) は互いに逆になっている.

Li 係数 λ_n とモーメント μ_n は Riemann 予想の下で共に非負であるが, 定理 4 の関係式はどちらも交代和なので, 片方の非負性が他方の非負性を導く形にはなっていないのが少し残念である.

6. 関連する話題

研究集会と本稿で述べた事柄は [6, 7, 8] で述べた結果の一部に過ぎない. またこれらの後にも, [3, 9, 10] などのようにスクリュー関数と新しい事柄との関係性が見つかっており, 調べるべきことの多さに対して筆者の手や時間が足りていない状況である. なので, 興味を持たれた方がおられたら, 協力または研究して頂ければ大変嬉しい.

今回取り上げなかった話題に関するキーワードとして, Hilbert 空間内の screw lines, Kreĭn strings の逆問題, Stieltjes モーメント問題, de Branges 空間, Hermite–Biehler クラスの整関数, 平均周期関数 (mean-periodic functions), 無限分解可能分布, Lévy 過程, Goldbach 問題, M 関数などを挙げておく.

いっぽう, 序文でも少し述べたように, ゼータ関数とスクリュー関数の関係は, Riemann ゼータ関数に限定されるものではなく, [8] で拡張 Selberg クラスについて行ったように, 広いクラスのゼータ関数で展開できる. 例えば Selberg クラスの代わりに, 有限体上の代数曲線のゼータ関数, $GL(n)$ の保型 L 関数, A. Booker の L-data などでスクリュー関数を論じることができると思うが, やはり筆者の手や時間が足りていない.

証明の技術的な部分に関する理由により, Selberg ゼータ関数のような整関数としての位数が 2 以上のゼータ関数に対して [6, 7, 8, 9, 10] と同様なスクリュー関数の理論を展開できるかは現時点では分からない.

References

[1] E. Bombieri, J. C. Lagarias, Complements to Li's criterion for the Riemann hypothesis, *J. Number Theory* **77** (1999), no. 2, 274–287.

[2] M. G. Kreĭn, H. Langer, Über einige Fortsetzungsprobleme, die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhängen. I. Einige Funktionenklassen und ihre Darstellungen, *Math. Nachr.* **77** (1977), 187–236.

[3] T. Nakamura, M. Suzuki, On infinitely divisible distributions related to the Riemann hypothesis, to appear in Statistics and Probability Letters.
A draft is available at `https://arxiv.org/abs/2306.08317`

[4] J. C. Lagarias, On a positivity property of the Riemann ξ-function, *Acta Arith.* **89** (1999), no. 3, 217–234.

[5] X.-J. Li, The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis, *J. Number Theory* **65** (1997), no. 2, 325–333.

[6] M. Suzuki, Aspects of the screw function corresponding to the Riemann zeta-function, to appear in the Journal of the London Mathematical Society.
A draft is available at `https://arxiv.org/abs/2206.03682`.

[7] M. Suzuki, The screw line of the Riemann zeta-function,
`https://arxiv.org/abs/2209.04658`.

[8] M. Suzuki, Screw functions of Dirichlet series in the extended Selberg class,
`https://arxiv.org/abs/2209.12832`.

[9] M. Suzuki, On the Hilbert space derived from the Weil distribution,
`https://arxiv.org/abs/2301.00421`.

[10] M. Suzuki, Li coefficients as norms of functions in a model space, to appear in Journal of Number Theory. A draft is available at `https://arxiv.org/abs/2301.05779`.

[11] A. Weil, Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premiers, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]* **1952** (1952), Tome Supplémentaire, 252–265.

[12] H. Yoshida, On Hermitian forms attached to zeta functions, *Zeta functions in geometry (Tokyo, 1990)*, 281–325, Adv. Stud. Pure Math., 21, *Kinokuniya, Tokyo*, 1992.