Algebraic independence of the values and the derivatives of certain power series, infinite products, and Lambert type series

慶應義塾大学理工学部 井手春希 (Haruki Ide)
Faculty of Science and Technology, Keio University

1 先行研究

次の冪級数 $\mathcal{F}(x,z)$, 無限積 $\mathcal{G}(y,z)$, Lambert 型級数 $\mathcal{H}(x,y,z)$ を考える:

$$\mathcal{F}(x,z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} x^k z^{R_k}, \quad \mathcal{G}(y,z) \coloneqq \prod_{k=0}^{\infty}(1-yz^{R_k}), \quad \mathcal{H}(x,y,z) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k z^{R_k}}{1-yz^{R_k}}.$$

ここで, $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は漸化式

$$R_{k+n} = c_1 R_{k+n-1} + \cdots + c_n R_k \quad (k \geq 0) \tag{1.1}$$

を満たす非負整数の線形回帰数列である. 本稿を通して, 初期値 $R_0, \ldots, R_{n-1}$ のうち少なくとも 1 つは正であるとし, $c_1, \ldots, c_n$ は $c_n \neq 0$ を満たす非負整数であると仮定する. 漸化式 (1.1) に対応する多項式

$$\Phi(X) \coloneqq X^n - c_1 X^{n-1} - \cdots - c_n$$

について, 次の条件 1.1 を仮定する.

条件 1.1. $\Phi(\pm 1) \neq 0$ であり, $\Phi(X)$ の相異なる根の比は 1 の冪根でない.

このような線形回帰数列 $\{R_k\}_{k\geq 0}$ の典型例は等比数列や Fibonacci 数列であるが, 条件 1.1 において $\Phi(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の既約性は課されないことに注意する. 条件 1.1 が満たされるならば, ある実定数 $c > 0$ と $\rho > 1$ が存在して

$$R_k = c\rho^k + o(\rho^k)$$

が成り立つ (田中 [9, Remark 4] 参照). 従って, 上記の $\mathcal{F}(x,z), \mathcal{G}(y,z), \mathcal{H}(x,y,z)$ は領域 $\{(x,z) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1\}$, $\{(y,z) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < 1\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid |z| < 1,\ 1 - yz^{R_k} \neq$

$0\ (\forall k \geq 0)\}$ においてそれぞれ収束する．1929 年, Mahler [5] は, 条件 1.1 に加えて $\Phi(X)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であるとの仮定のもと, $0 < |a| < 1$ を満たす任意の代数的数 a に対する値 $\mathcal{F}(1,a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{R_k}$, $\mathcal{G}(1,a) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-a^{R_k})$, $\mathcal{H}(1,1,a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{R_k}/(1-a^{R_k})$ の超越性を示した (既約性の仮定は後年, Masser [6] の結果を用いて田中 [9, 10] により取り除かれた)．この結果に端を発し, 関数 $\mathcal{F}(x,z)$, $\mathcal{G}(y,z)$, $\mathcal{H}(x,y,z)$ の代数的数における値が超越数であるか否か, さらには代数的独立であるか否か, といった問題が研究されてきた．特に値の代数的独立性は, まず $\{R_k\}_{k\geq 0}$ が等比数列であるか否かによって大きく様相が異なる．さらに, $\{R_k\}_{k\geq 0}$ が等比数列であると等比数列でない場合の各々について, 以下の 2 方向の研究が別個に行われてきた:

(A) $x = y = 1$ と固定し, 変数 z を代数的数からなる適切な集合内で動かして得られる値の代数的独立性を証明する．

(B) z を固定し, 変数 x, y を代数的数全体の集合内で動かして得られる値の代数的独立性を証明する．

はじめに $\{R_k\}_{k\geq 0}$ が等比数列である場合の値の代数的独立性に関する既知の結果を述べる．d を 2 以上の整数とし, $R_k = d^k\ (k \geq 0)$ とする．ケース (A) においては, z の関数 $f(z) \coloneqq \mathcal{F}(1,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}$, $g(z) \coloneqq \mathcal{G}(1,z) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-z^{d^k})$, $h(z) \coloneqq \mathcal{H}(1,1,z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{d^k}/(1-z^{d^k})$ を考える．冪級数 $f(z)$ は Fredholm 級数と呼ばれる．$a_1, \ldots, a_r$ を $0 < |a_i| < 1\ (1 \leq i \leq r)$ を満たす代数的数とする．Loxton-van der Poorten [4, Theorem 3] は, Fredholm 級数の値 $f(a_1), \ldots, f(a_r)$ が代数的独立となるための $a_1, \ldots, a_r$ に関する必要十分条件を証明した．また $f(z), g(z), h(z)$ を同時に考える場合, $a_1, \ldots, a_r$ が乗法的独立ならば $3r$ 個の値 $f(a_i), g(a_i), h(a_i)\ (1 \leq i \leq r)$ が代数的独立となることが, 西岡 [8, pp. 106–107] の記述と同様の方法で証明できる．しかし, $3r$ 個の値 $f(a_i), g(a_i), h(a_i)$ $(1 \leq i \leq r)$ が代数的独立となるための $a_1, \ldots, a_r$ に関する必要十分条件は知られていない．一方ケース (B) においては, $0 < |a| < 1$ を満たす固定された代数的数 a に対する整関数 $F(x) \coloneqq \mathcal{F}(x,a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{d^k} x^k$ を扱った次の結果が知られている．

定理 1.2 (西岡 [7, Theorem 7])**.** a は $0 < |a| < 1$ を満たす代数的数, d は 2 以上の整数とし, $F(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a^{d^k} x^k$ とする．このとき無限集合 $\{F^{(l)}(\alpha) \mid l \geq 0,\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}\}$ は代数的独立である．

この定理とは対照的に, $R_k = d^k\ (k \geq 0)$ の場合, 固定された代数的数 a に対する無限積 $\mathcal{G}(y,a) = \prod_{k=0}^{\infty}(1-a^{d^k}y)$ および Lambert 型級数 $\mathcal{H}(x,y,a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{d^k}x^k/(1-a^{d^k}y)$ において x, y を動かして得られる値は必ずしも代数的独立とならない．例えば ζ を 1 の原始 d

乗根とするとき,

$$\prod_{i=1}^{d-1}\mathcal{G}(\zeta^i,a)=\frac{1}{1-a}$$

および

$$(d-1)\mathcal{H}(1,1,a)-\sum_{i=1}^{d-1}\zeta^i\mathcal{H}(1,\zeta^i,a)=\frac{ad}{1-a}$$

が成り立つ.

注意 1.3. $d=2$ の場合, 上記の無限積 $\mathcal{G}(y,a)=\prod_{k=0}^{\infty}(1-a^{2^k}y)$ および Lambert 型級数 $\mathcal{H}(x,y,a)=\sum_{k=0}^{\infty}a^{2^k}x^k/(1-a^{2^k}y)$ の値について

$$\mathcal{G}(-1,a)=\prod_{k=0}^{\infty}(1+a^{2^k})=\frac{1}{1-a}\in\overline{\mathbb{Q}}$$

および

$$\mathcal{H}(2,-1,a)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k a^{2^k}}{1+a^{2^k}}=\frac{a}{1-a}\in\overline{\mathbb{Q}}$$

である. これらを除くすべての $(d,\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}_{\geq 2}\times\overline{\mathbb{Q}}^{\times}\times\overline{\mathbb{Q}}^{\times}\setminus\{a^{-d^k}\mid k\geq 0\}$ に対して, $\mathcal{G}(\beta,a)$ および $\mathcal{H}(\alpha,\beta,a)$ は超越数である (西岡 [8, Theorems 1.2 and 1.3] 参照).

次に $\{R_k\}_{k\geq 0}$ が等比数列でない場合の値の代数的独立性に関する既知の結果を述べる. この場合は, 冪級数, 無限積, Lambert 型級数を同時に扱った結果が知られており, ケース (A), (B) のそれぞれは解決されているといってよい. ケース (A) に対しては次の定理が得られている.

定理 1.4 (田中 [11, Theorem 1])**.** $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は (1.1) を満たす線形回帰数列とし, $\Phi(X)$ は条件 1.1 を満たすとする. $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は等比数列でないと仮定する. $f^*(z):=\mathcal{F}(1,z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{R_k}$, $g^*(z):=\mathcal{G}(1,z)=\prod_{k=0}^{\infty}(1-z^{R_k})$, $h^*(z):=\mathcal{H}(1,1,z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^{R_k}/(1-z^{R_k})$ とする. $a_1,\dots,a_r$ は $0<|a_i|<1$ $(1\leq i\leq r)$ を満たす代数的数とする. このとき以下の 3 条件は同値である:

(i) $3r$ 個の値 $f^*(a_i),g^*(a_i),h^*(a_i)$ $(1\leq i\leq r)$ は代数的従属である.

(ii) r 個の値 $f^*(a_1),\dots,f^*(a_r)$ および 1 は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上 1 次従属である.

(iii) $\{a_1,\dots,a_r\}$ の空でない部分集合 $\{a_{i_1},\dots,a_{i_s}\}$ と, $a_{i_q}=\zeta_q\gamma$ $(1\leq q\leq s)$ を満たす 1 の冪根 $\zeta_1,\dots,\zeta_s$ および代数的数 γ, 少なくとも 1 つは 0 でない代数的数 $\xi_1,\dots,\xi_s$ が存在して,

$$\sum_{q=1}^{s}\xi_q\zeta_q^{R_k}=0$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つ.

またケース (B) に対しては次の定理が得られている.

定理 1.5 (井手 [1, Theorem 1.11])**.** a は $0 < |a| < 1$ を満たす代数的数, $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は (1.1) を満たす線形回帰数列とし, $\Phi(X)$ は条件 1.1 を満たすとする. $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は等比数列でないと仮定する. $F_m(x) \coloneqq \mathcal{F}(x; a^m) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{mR_k} x^k$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $G(y) \coloneqq \mathcal{G}(y, a) = \prod_{k=0}^{\infty}(1 - a^{R_k} y)$, $H(x, y) \coloneqq \mathcal{H}(x, y, a) = \sum_{k=0}^{\infty} a^{R_k} x^k / (1 - a^{R_k} y)$ とする. このとき無限集合

$$\left\{ F_m^{(l)}(\alpha) \,\middle|\, l \geq 0,\ m \geq 1,\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \right\} \bigcup \{G(\beta) \mid \beta \in \mathcal{B}\}$$
$$\bigcup \left\{ \frac{\partial^{l+m} H}{\partial x^l \partial y^m}(\alpha, \beta) \,\middle|\, l \geq 0,\ m \geq 0,\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ \beta \in \mathcal{B} \right\}$$

は代数的独立である. ただし集合 $\mathcal{B}$ は

$$\mathcal{B} \coloneqq \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \setminus \{a^{-R_k} \mid k \geq 0\} = \{\beta \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \mid G(\beta) \neq 0\}$$

により定義される.

2　主結果

前節で述べたように, 関数 $\mathcal{F}(x, z), \mathcal{G}(y, z), \mathcal{H}(x, y, z)$ の値の代数的独立性に関する従来の研究は, (A) と (B) の 2 つの方向性に分かたれていた. 本稿の主定理 2.1 は, $\{R_k\}_{k\geq 0}$ が等比数列でない場合に, 定理 1.5 において固定されていた代数的数 a を動かすことで, (A) と (B) を融合するものである (ただし, 主定理 2.1 は定理 1.5 を含意するが, 定理 1.4 との間には含意関係は存在しない).

$\{R_k\}_{k\geq 0}$ は定理 1.5 の仮定を満たす線形回帰数列とし, $a_1, \ldots, a_r$ は $0 < |a_i| < 1$ $(1 \leq i \leq r)$ を満たす代数的数とする. 各 i $(1 \leq i \leq r)$ に対して

$$F_{i,m}(x) \coloneqq \mathcal{F}(x, a_i^m) = \sum_{k=0}^{\infty} a_i^{mR_k} x^k \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

$$G_i(y) \coloneqq \mathcal{G}(y, a_i) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - a_i^{R_k} y),$$

$$H_i(x, y) \coloneqq \mathcal{H}(x, y, a_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_i^{R_k} x^k}{1 - a_i^{R_k} y},$$

$$\mathcal{B}_i \coloneqq \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \setminus \{a_i^{-R_k} \mid k \geq 0\} = \{\beta \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \mid G_i(\beta) \neq 0\}$$

と定義する．このとき定理 1.5 より, 各 i $(1 \leq i \leq r)$ に対して無限集合

$$\mathcal{T}_i := \left\{ F_{i,m}^{(l)}(\alpha) \,\middle|\, l \geq 0,\ m \geq 1,\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \right\} \bigcup \{G_i(\beta) \mid \beta \in \mathcal{B}_i\}$$
$$\bigcup \left\{ \frac{\partial^{l+m} H_i}{\partial x^l \partial y^m}(\alpha, \beta) \,\middle|\, l \geq 0,\ m \geq 0,\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ \beta \in \mathcal{B}_i \right\}$$

は代数的独立である．主定理 2.1 は, これらの集合をすべての i $(1 \leq i \leq r)$ にわたって合併した和集合

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &:= \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{T}_i \\
&= \left\{ F_{i,m}^{(l)}(\alpha) \,\middle|\, 1 \leq i \leq r,\ l \geq 0,\ m \geq 1,\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times} \right\} \bigcup \{G_i(\beta) \mid 1 \leq i \leq r,\ \beta \in \mathcal{B}_i\} \\
&\quad \bigcup \left\{ \frac{\partial^{l+m} H_i}{\partial x^l \partial y^m}(\alpha, \beta) \,\middle|\, 1 \leq i \leq r,\ l \geq 0,\ m \geq 0,\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ \beta \in \mathcal{B}_i \right\}
\end{aligned}$$

が代数的独立となるための, $a_1, \ldots, a_r$ に関する必要十分条件を明らかにしたものである:

主定理 2.1 (井手 [2, Main Theorem 1.8])**.** $a_1, \ldots, a_r$ は $0 < |a_i| < 1$ $(1 \leq i \leq r)$ を満たす代数的数, $\{R_k\}_{k \geq 0}$ は (1.1) を満たす線形回帰数列とし, $\Phi(X)$ は条件 1.1 を満たすとする．$\{R_k\}_{k \geq 0}$ は等比数列でないと仮定する．このとき無限集合 $\mathcal{T}$ が代数的独立となるための必要十分条件は, $a_1, \ldots, a_r$ のうちどの 2 つも乗法的独立であることである．

「$a_1, \ldots, a_r$ のうちどの 2 つも乗法的独立である」という条件が, 集合 $\mathcal{T}$ が代数的独立となるための必要条件であることは自明である．実際, ある正整数 d_1, d_2 に対して $a_1^{d_1} = a_2^{d_2}$ であると仮定すると, 任意の $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ に対して $F_{1,d_1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} a_1^{d_1 R_k} \alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_2^{d_2 R_k} \alpha^k = F_{2,d_2}(\alpha)$ となるから, 集合 $\mathcal{T}$ は代数的従属である．あるいはこの場合, ζ_i $(i = 1, 2)$ を 1 の原始 d_i 乗根とすれば

$$\prod_{i=0}^{d_1-1} G_1(\zeta_1^i y^{d_2}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - a_1^{d_1 R_k} y^{d_1 d_2}) = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - a_2^{d_2 R_k} y^{d_1 d_2}) = \prod_{j=0}^{d_2-1} G_2(\zeta_2^j y^{d_1})$$

および

$$\sum_{i=0}^{d_1-1} d_2 \zeta_1^i y^{d_2} H_1(1, \zeta_1^i y^{d_2}) = \sum_{j=0}^{d_2-1} d_1 \zeta_2^j y^{d_1} H_2(1, \zeta_2^j y^{d_1})$$

が成り立つ．従って, $\zeta_1^i \beta^{d_2} \in \mathcal{B}_1$ $(0 \leq i \leq d_1 - 1)$ かつ $\zeta_2^j \beta^{d_1} \in \mathcal{B}_2$ $(0 \leq j \leq d_2 - 1)$ を満たす任意の $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ に対して, $\mathcal{T}$ の有限部分集合 $\{G_1(\zeta_1^i \beta^{d_2}), G_2(\zeta_2^j \beta^{d_1}) \mid 0 \leq i \leq d_1 - 1,\ 0 \leq j \leq d_2 - 1\}$ および $\{H_1(1, \zeta_1^i \beta^{d_2}), H_2(1, \zeta_2^j \beta^{d_1}) \mid 0 \leq i \leq d_1 - 1,\ 0 \leq j \leq d_2 - 1\}$ はそれぞれ代数的従属となる．

3　証明の概略

前節最後に述べたように, 主定理 2.1 のうち「必要性」の主張は自明である. 従って本節では「十分性」を証明する. さらに本稿では, 証明の枝葉を削り根幹のみを記したい. そこで主定理 2.1 の設定を大幅に限定し, 次の定理 3.1 を証明する (主定理 2.1 の「十分性」の完全な証明に興味のある方は [2, Proof of Theorem 1.9] をご覧ください).

定理 3.1. $a_1, \ldots, a_r$ は 2 以上の整数の逆数とし, そのうちどの 2 つも乗法的独立であるとする. $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は (1.1) を満たす線形回帰数列とし, $\Phi(X)$ は条件 1.1 を満たすとする. $\{R_k\}_{k\geq 0}$ は等比数列でないと仮定する. このとき無限集合

$$\{H_i(\alpha, \beta) \mid 1 \leq i \leq r,\ \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times},\ \beta \in \mathcal{B}_i\}$$

は代数的独立である.

定理 3.1 の証明は以下の 4 ステップからなる:

ステップ 1　関数値 $H_i(\alpha, \beta)$ を, ある多変数 Mahler 関数族の共通の 1 点における特殊値として表示する. ここで, Mahler 関数とはある種の変数変換のもとで関数方程式を満たす解析関数である. 定理 3.1 の場合は線形回帰数列 $\{R_k\}_{k\geq 0}$ の満たす漸化式 (1.1) に由来して関数方程式が得られる.

ステップ 2　上記の Mahler 関数族の値が代数的従属であると仮定すると (**背理法**), Mahler 関数の値および関数自身の代数的独立性に関する Kubota の判定定理により, 上記 Mahler 関数族自身の有理関数体を法とした非自明な 1 次関係式が得られる.

ステップ 3　問題の多変数 Mahler 関数族に Kronecker 型特殊化を施し, 漸化式 (1.1) に由来する関数方程式の非自明な有理関数解の非存在を主張する田中の結果 (補題 3.2) を用いることで, ある 1 変数冪級数族の非自明な 1 次関係式が得られる.

ステップ 4　Kronecker 型特殊化の「復元」を行うことで, ある多変数冪級数族の非自明な 1 次関係式が得られる. そのような 1 次従属性は, 「$a_1, \ldots, a_r$ のうちどの 2 つも乗法的独立である」という仮定に矛盾する.

なお, 「$\{R_k\}_{k\geq 0}$ が等比数列でない」という仮定は上記ステップ 3 において用いられ, 「$a_1, \ldots, a_r$ のうちどの 2 つも乗法的独立である」という仮定はステップ 4 において用いられる.

定理 3.1 の証明. L を任意の正整数とし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_L$ を任意の相異なる代数的数とする. 各 i $(1 \leq i \leq r)$ に対して, $\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_L^{(i)}$ を任意の相異なる $\mathcal{B}_i$ の元とする. 定理 3.1 を証明す

るためには, 有限集合

$$\{H_i(\alpha_\lambda, \beta_\mu^{(i)}) \mid 1 \le i \le r,\ 1 \le \lambda, \mu \le L\} \tag{3.1}$$

の代数的独立性を示せばよい．いま $a_1, \ldots, a_r$ は 2 以上の整数の逆数であるから, 相異なる素数 $p_1, \ldots, p_s$ と非負整数 d_{ij} $(1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s)$ が存在して

$$a_i = p_1^{-d_{i1}} \cdots p_s^{-d_{is}} \quad (1 \le i \le r) \tag{3.2}$$

と表せる．ここで各 i $(1 \le i \le r)$ に対して $d_{i1}, \ldots, d_{is}$ のうち少なくとも 1 つは正である．変数 $z_1, \ldots, z_n$ の単項式 $P_k(\boldsymbol{z})$ $(k \ge 0)$ を, 線形回帰数列 $\{R_k\}_{k \ge 0}$ の一般項を用いて

$$P_k(\boldsymbol{z}) \coloneqq z_1^{R_{k+n-1}} \cdots z_n^{R_k} \quad (k \ge 0)$$

と定義する．ただし n は漸化式 (1.1) の長さである．また, 変数変換 $\boldsymbol{z} \mapsto \Omega_1 \boldsymbol{z}$ を, 漸化式 (1.1) の係数 $c_1, \ldots, c_n$ を用いて

$$\Omega_1 \boldsymbol{z} \coloneqq (z_1^{c_1} z_2, z_1^{c_2} z_3, \ldots, z_1^{c_{n-1}} z_n, z_1^{c_n})$$

により定義する．このとき漸化式 (1.1) より

$$\begin{aligned} P_k(\Omega_1 \boldsymbol{z}) &= (z_1^{c_1} z_2)^{R_{k+n-1}} \cdots (z_1^{c_{n-1}} z_n)^{R_{k+1}} (z_1^{c_n})^{R_k} \\ &= z_1^{R_{k+n}} \cdots z_n^{R_{k+1}} \\ &= P_{k+1}(\boldsymbol{z}) \quad (k \ge 0) \end{aligned} \tag{3.3}$$

が成り立つ．さて, $y_{j1}, \ldots, y_{jn}$ $(1 \le j \le s)$ を変数とし, $\boldsymbol{y}_j \coloneqq (y_{j1}, \ldots, y_{jn})$ $(1 \le j \le s)$, $\boldsymbol{y} \coloneqq (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_s)$ と表す．各 i, λ, μ $(1 \le i \le r,\ 1 \le \lambda, \mu \le L)$ に対して

$$h_{i\lambda\mu}(\boldsymbol{y}) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_\lambda^k \prod_{j=1}^s P_k(\boldsymbol{y}_j)^{d_{ij}}}{1 - \beta_\mu^{(i)} \prod_{j=1}^s P_k(\boldsymbol{y}_j)^{d_{ij}}}$$

と定める．また

$$\boldsymbol{\gamma} \coloneqq (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, p_1^{-1}, \ldots, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-1}, p_s^{-1})$$

とおく．このとき (3.2) より $h_{i\lambda\mu}(\boldsymbol{\gamma}) = H_i(\alpha_\lambda, \beta_\mu^{(i)})$ であるから, 集合 (3.1) は

$$\{h_{i\lambda\mu}(\boldsymbol{\gamma}) \mid 1 \le i \le r,\ 1 \le \lambda, \mu \le L\} \tag{3.4}$$

と一致する．さらに $\Omega_2 \boldsymbol{y} \coloneqq (\Omega_1 \boldsymbol{y}_1, \ldots, \Omega_1 \boldsymbol{y}_s)$ とすれば (3.3) より関数方程式

$$h_{i\lambda\mu}(\boldsymbol{y}) = \alpha_\lambda h_{i\lambda\mu}(\Omega_2 \boldsymbol{y}) + \frac{\prod_{j=1}^s P_0(\boldsymbol{y}_j)^{d_{ij}}}{1 - \beta_\mu^{(i)} \prod_{j=1}^s P_0(\boldsymbol{y}_j)^{d_{ij}}} \tag{3.5}$$

が得られる．以下, 集合 (3.4) が代数的従属であると仮定して矛盾を導く．このとき Kubota の判定定理 (西岡 [8, Corollary to Theorem 3.2.1, Theorem 3.6.4] および田中 [9, Lemma 4, Proof of Theorem 2] 参照) より, ある $\lambda_0 \in \{1, \dots, L\}$ と, 少なくとも 1 つは 0 でない代数的数 $c_{i\mu}$ $(1 \le i \le r,\ 1 \le \mu \le L)$ が存在して,

$$h(\boldsymbol{y}) \coloneqq \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le \mu \le L}} c_{i\mu} h_{i\lambda_0\mu}(\boldsymbol{y}) \in \overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{y})$$

が成り立つ．このとき関数方程式 (3.5) より

$$h(\boldsymbol{y}) = \alpha_{\lambda_0} h(\Omega_2 \boldsymbol{y}) + \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le \mu \le L}} c_{i\mu} \frac{\prod_{j=1}^{s} P_0(\boldsymbol{y}_j)^{d_{ij}}}{1 - \beta_\mu^{(i)} \prod_{j=1}^{s} P_0(\boldsymbol{y}_j)^{d_{ij}}} \tag{3.6}$$

を得る．ここで M を任意の正整数とし, Kronecker 型特殊化

$$\boldsymbol{y}_j = (y_{j1}, \dots, y_{jn}) = (z_1^{M^j}, \dots, z_n^{M^j}) \quad (1 \le j \le s).$$

を施す．いま $h(\boldsymbol{y}) \in \overline{\mathbb{Q}}[[\boldsymbol{y}]] \cap \overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{y})$ であるから,

$$h^*(\boldsymbol{z}) \coloneqq h(z_1^M, \dots, z_n^M, \dots, z_1^{M^s}, \dots, z_n^{M^s})$$

の分母は消えず, 従って $h^*(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}[[\boldsymbol{z}]] \cap \overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ となる (西岡 [7, Lemma 4] 参照)．関数方程式 (3.6) は

$$h^*(\boldsymbol{z}) = \alpha_{\lambda_0} h^*(\Omega_1 \boldsymbol{z}) + \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le \mu \le L}} c_{i\mu} \frac{P_0(\boldsymbol{z})^{D_i}}{1 - \beta_\mu^{(i)} P_0(\boldsymbol{z})^{D_i}}$$

と特殊化される．ただし $D_i \coloneqq \sum_{j=1}^{s} d_{ij} M^j > 0$ $(1 \le i \le r)$ である．ここで次の補題を用いる:

補題 3.2 (田中 [10, Theorem 1])**.** $\{R_k\}_{k \ge 0}$ は (1.1) を満たす線形回帰数列とし, $\Phi(X)$ は条件 1.1 を満たすとする．$\{R_k\}_{k \ge 0}$ は等比数列でないと仮定する．$f(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}[[\boldsymbol{z}]]$ は関数方程式

$$f(\boldsymbol{z}) = \alpha f(\Omega_1 \boldsymbol{z}) + Q(P_0(\boldsymbol{z}))$$

を満たすとする．ただし $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^\times$ であり, $Q(X) \in \overline{\mathbb{Q}}(X)$ は $X = 0$ を極に持たないとする．このとき, $f(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}(\boldsymbol{z})$ ならば, $f(\boldsymbol{z}) \in \overline{\mathbb{Q}}$ かつ $Q(X) = Q(0) \in \overline{\mathbb{Q}}$ である．

補題 3.2 より

$$\sum_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le \mu \le L}} c_{i\mu} \frac{X^{D_i}}{1 - \beta_\mu^{(i)} X^{D_i}} = 0 \tag{3.7}$$

を得る．ここで $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_i} \coloneqq X_1^{d_{i1}} \cdots X_s^{d_{is}}$ $(1 \le i \le r)$ とし

$$R(\boldsymbol{X}) \coloneqq \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le \mu \le L}} c_{i\mu} \frac{\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_i}}{1 - \beta_\mu^{(i)} \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_i}} \in \overline{\mathbb{Q}}(X_1, \ldots, X_s)$$

と定めれば, (3.7) の左辺は $R(X^M, \ldots, X^{M^s})$ と一致する．いま, $R(\boldsymbol{X}) = 0$ を示す．実際, $R(\boldsymbol{X}) \neq 0$ と仮定すると 0 でない $A(\boldsymbol{X}), B(\boldsymbol{X}) \in \overline{\mathbb{Q}}[X_1, \ldots, X_s]$ が存在して $R(\boldsymbol{X}) = A(\boldsymbol{X})/B(\boldsymbol{X})$ と書ける．上記 $R(\boldsymbol{X})$ の定義より, $B(\boldsymbol{0}) = 1$ と仮定してよい．多項式 $A(\boldsymbol{X})$ は正整数 M に依存しないため, あらかじめ M を $M > \max_{1 \le j \le s} \deg_{X_j} A(\boldsymbol{X})$ を満たすほどに大きくとっておけば $A(X^M, \ldots, X^{M^s}) \neq 0$, 従って $R(X^M, \ldots, X^{M^s}) \neq 0$ となり, (3.7) に矛盾する．よって $R(\boldsymbol{X}) = 0$ である．さて, 各 i $(1 \le i \le r)$ に対して

$$R_i(Y) \coloneqq \sum_{\mu=1}^{L} c_{i\mu} \frac{Y}{1 - \beta_\mu^{(i)} Y}$$

とおけば $R_i(Y) \in Y\overline{\mathbb{Q}}[[Y]]$ $(1 \le i \le r)$ であって

$$\sum_{i=1}^{r} R_i(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_i}) = R(\boldsymbol{X}) = 0$$

である．仮定より $a_1, \ldots, a_r$ のうちどの 2 つも乗法的独立であるから, (3.2) より, $1 \le i < j \le r$ ならば $P^{s-1}(\mathbb{Q})$ において $(d_{i1} : \cdots : d_{is}) \neq (d_{j1} : \cdots : d_{js})$ である．よって, $1 \le i < j \le r$ ならば, $R_i(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_i}) \in \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_i}\overline{\mathbb{Q}}[[\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_i}]]$ と $R_j(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_j}) \in \boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_j}\overline{\mathbb{Q}}[[\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_j}]]$ の間に同類項は生じない．従って, 各 i $(1 \le i \le r)$ に対して $R_i(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{d}_i}) = 0$ すなわち $R_i(Y) = 0$ でなければならない．各 i $(1 \le i \le r)$ ごとに $\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_L^{(i)}$ は相異なるからすべての $c_{i\mu}$ $(1 \le i \le r,\ 1 \le \mu \le L)$ が 0 でなければならず, 矛盾である． □

謝辞

講演の機会を与えてくださいました研究代表者の山崎義徳先生, 研究副代表者の安福悠先生にこの場をお借りして厚く御礼申し上げます．本研究は JSPS 科研費 JP20J21203 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] H. Ide, *Algebraic independence of certain entire functions of two variables generated by linear recurrences*, Acta Arith. **202** (2022), 303–336.

[2] H. Ide, *Algebraic independence results for a certain family of power series, infinite products, and Lambert type series*, Osaka J. Math., (to appear).

[3] K. K. Kubota, *On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values*, Math. Ann. **227** (1977), 9–50.

[4] J. H. Loxton and A. J. van der Poorten, *Algebraic independence properties of the Fredholm series*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **26** (1978), 31–45.

[5] K. Mahler, *Arithmetische Eigenschaften der Losungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Ann. **101** (1929), 342–366.

[6] D. W. Masser, *A vanishing theorem for power series*, Invent. math. **67** (1982), 275–296.

[7] K. Nishioka, *Algebraic independence of Mahler functions and their values*, Tohoku Math. J. **48** (1996), 51–70.

[8] K. Nishioka, Mahler functions and transcendence, Lecture Notes in Mathematics No. **1631**, Springer, 1996.

[9] T. Tanaka, *Algebraic independence of the values of power series generated by linear recurrences*, Acta Arith. **74** (1996), 177–190.

[10] T. Tanaka, *Algebraic independence results related to linear recurrences*, Osaka J. Math. **36** (1999), 203–227.

[11] T. Tanaka, *Algebraic independence of the values of power series, Lambert series, and infinite products generated by linear recurrences*, Osaka J. Math. **42** (2005), 487–497.