一般超幾何関数の値の性質について

日本大学 川島 誠

Makoto Kawashima

Department of Industrial Engineering, Nihon University

概 要

S. David 氏 (Sorbonne University), 平田典子氏 (日本大学) らとの共同研究である一般超幾何関数とその隣接する関数の異なる値の代数体上の線形独立判定法の紹介を行う.

1 導入

$p, q \in \mathbb{N}$ を正整数, $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ を非負整数とする. はじめに一般超幾何関数 ${}_pF_q$ を

$$
{}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \middle| \, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}
$$

と定義する. ここで $(a)_k$ は $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)\cdots(a+k-1)$ $(k \geq 1)$ である.

$p = q+1$, $p = q$ のとき, ${}_pF_q$ はそれぞれ, C. Siegel が [40] で定義した, G 関数および E 関数と呼ばれる級数族に属しており値の無理数性や超越性といった数論的性質が古くから調べられている (confer [36]). $p < q+1$ の場合は Siegel-Shidlovskii の定理 (confer [36]) を用いた一般超幾何関数の値の代数的独立性の判定法がいくつも知られている. 例えば [6, 36] を参照せよ. $p = q+1$ の場合は, Siegel-Shidlovskii の定理の G 関数類似が成り立たないことが知られており (confer [38]), 数論的性質, 特に超越性, は未知の部分が多い. 以下, このセクションでは $p = q+1$ の場合に ${}_pF_{p-1}$ の値の数論的性質の先行研究について概観する. はじめに Gauss の超幾何関数 ${}_2F_1$ の値に関する結果をみる. F. Von Lindeman による指数関数の 0 以外での代数的数における値の超越性 [30] の帰結として, 円周率 π の超越性や, 対数関数の branch をひとつ固定したとき, $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1\}$ に対して, $\log \alpha$ の超越性が得られる. 対数関数の値の一次形式についての超越性に関しては A. Baker [3] の次の定理が強力である.

定理 1.1. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1\}$ とする. $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_m$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であれば, $1, \log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_m$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上一次独立になる. 特に $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であれば, $(\beta_1, \ldots, \beta_m) \in \overline{\mathbb{Q}}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して, $\beta_1 \log \alpha_1 + \cdots + \beta_m \log \alpha_m$ は超越数である.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1\}$ に対して, $\log \alpha_1, \ldots, \log \alpha_m$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立になるための十分条件が G. Rhin と P. Toffin により [37] で与えられている. また ${}_2F_1$ の代数的数における値の超越性に関しては, 上記の Baker の定理の拡張である G. Wüstholz の結果 [44] を用いて J. Wolfart により考察されている (confer [43]).

次に第一種楕円積分と第二種楕円積分に関連する値の代数的独立性について G. V. Chudnovsky-D. V. Chudnovsky [13, Theorem 3.4] と Y. André [2, Théorème 1] を紹介する.

定理 1.2. $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ とし, v を $\overline{\mathbb{Q}}$ の素点とする. $|\alpha|_v < \min(1, |16|_v)$ を満たすとき,

$$\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{Q}\left({}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, \alpha\right), {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, \alpha\right) \right) = 2$$

が成り立つ.

定理 1.2 は v が無限素点において, [13] でアナウンスされその後 [2] で G 関数を用いた別証明と v が有限素点の場合に示された.

これまでは Gauss の超幾何関数の値の超越性について見てきたが, これらの値は代数的数になることもある. これについては F. Beukers [4] や Beukers-Wolfart [5] を参照せよ. つぎに ${}_pF_{p-1}$ $(p \geq 3)$ の値の性質を見る. これらの値の超越性に関する結果は殆ど知られておらず, 以下では無理数性や線形独立性に関する結果について紹介する. 一般超幾何関数の特別な場合として, 多重対数関数がある. これらの値の線形独立性に関する結果は [15, 16, 17, 27, 28] を参照せよ. 一般超幾何関数とその隣接する関数の値の有理数体上の線形独立性が D. V. Chudnovsky [8, Theorem 3.1] で得られている. また G 関数での Siegel-Shidlovskii の定理の類似を得る過程で, A. I. Galochkin [21, 22], Chudnovsky 兄弟 [12], K. Väänänen [42], W. Zudilin [45] らが微分方程式系の解になる G 関数族が関数体上一次独立になる際に, それらの原点に近い点での値が有理数体もしくは虚二次体上で線形独立になるための十分条件を与えている. 彼らの手法は Siegel の補題を用いるもので線形独立性が示される値の範囲はかなり小さくなるが, G 関数である一般超幾何関数にも適用できる. 多重対数関数を除き, ${}_pF_{p-1}$ の異なる値での線形独立性に関する結果はほとんど知られていなかった. 本小論の主結果は, ${}_pF_{p-1}$ と隣接する関数の異なる値での代数体上の線形独立性に関する結果である. 次のセクションでこれを紹介する.

2 主定理

このセクションでは主定理である ${}_pF_q$ とその隣接する関数の異なる値の一次独立性に関する結果を紹介する. はじめに主定理を述べるための記号の準備をする.

K を代数体とする. 正整数 m と, $\boldsymbol{\beta} := (\beta_0, \ldots, \beta_m) \in K^{m+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して, $\boldsymbol{\beta}$ の高さを

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{v \in \mathfrak{M}_K} \max\{1, |\beta_0|_v, \ldots, |\beta_m|_v\} \ ,$$

とし, $\boldsymbol{\beta}$ の対数的高さを $\mathrm{h}(\boldsymbol{\beta}) = \log \mathrm{H}(\boldsymbol{\beta})$ と定義する.

K の素点全体の集合を $\mathfrak{M}_K$ とかく. $v \in \mathfrak{M}_K$ に対して, $\boldsymbol{\beta}$ の v 進対数的高さを $\mathrm{h}_v(\boldsymbol{\beta}) := \log \max(1, |\beta_i|_v)$ とおくと $\mathrm{h}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{v \in \mathfrak{M}_K} \mathrm{h}_v(\boldsymbol{\beta})$ が成り立つ.

$S \subset \overline{\mathbb{Q}}$ を有限集合とする. このとき S の分母を $\mathrm{den}(S) := \min(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \mid n\alpha$ は代数的整数 $(\forall \alpha \in S))$ とおく.

$m, r \geq 2$ を正整数とし, $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (K \setminus \{0\})^m$ を成分が相違なるベクトルとする. $\beta \in K \setminus \{0\}$ に対して,

$$
\begin{aligned}
V_v(\boldsymbol{\alpha}, \beta) = \log |\beta|_{v_0} - rm\mathrm{h}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) - (rm+1) \log \|\boldsymbol{\alpha}\|_{v_0} + rm \log \|(\boldsymbol{\alpha}, \beta)\|_{v_0} \\
- \left(rm \log(2) + r \left(\log(rm+1) + rm \log \left(\frac{rm+1}{rm} \right) \right) \right) \\
- \sum_{j=1}^{r} \left(\log \mu(a_j) + 2 \log \mu(b_j) + \frac{\mathrm{den}(a_j)\mathrm{den}(b_j)}{\varphi(\mathrm{den}(a_j))\varphi(\mathrm{den}(b_j))} \right) \quad ,
\end{aligned}
$$

と定義する. ここで φ は Euler のトーシェント関数である. 以上の準備の下, 主定理である ${}_rF_{r-1}$ とその隣接する関数の値の線形独立判定法は次である.

定理 2.1. v_0 を K の素点, $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ を負の整数と異なる有理数とし次を仮定する.

任意の $1 \leq k \leq r, 1 \leq j \leq r-1$ に対して, a_k, 若しくは, $a_k + 1 - b_j$は正整数ではない.

$V_{v_0}(\boldsymbol{\alpha}, \beta) > 0$ を満たす $\boldsymbol{\alpha}, \beta$ に対して, $(rm+1)$ 個の K_{v_0} の元, 1 と

$$
{}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_{r-1} \end{matrix} \,\middle|\, \frac{\alpha_i}{\beta} \right) \ , \quad {}_rF_{r-1}\left(\begin{matrix} a_1+1, \ldots, \ldots, \ldots, a_r+1 \\ b_1+1, \ldots, b_{r-s}+1, b_{r-s+1}, \ldots, b_{r-1} \end{matrix} \,\middle|\, \frac{\alpha_i}{\beta} \right) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq s \leq r-1)
$$

は K 上線形独立である.

また $p < q+1$ に対して, ${}_pF_q$ とその隣接する関数の値に関する線形独立性も次のように得られる.

定理 2.2. K を有理数体, 若しくは, 虚二次体とする. p, q を $p < q+1$ を満たす非負整数とし, $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q$ を負の整数と異なる有理数とし次を仮定する.

任意の $1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq q$ に対して, a_k, 若しくは, $a_k + 1 - b_j$は正整数ではない.

このとき $[(q+1)m+1]$ 個の複素数, 1 と

$$
{}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \,\middle|\, \alpha_i \right) \ , \quad {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1+1, \ldots, \ldots, \ldots, a_p+1 \\ b_1+1, \ldots, b_{q-s}+1, b_{q-s+1}, \ldots, b_q \end{matrix} \,\middle|\, \alpha_i \right) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq s \leq q)
$$

は K 上線形独立である.

注意 2.3. 最近の S. Fishcler と T. Rivoal の結果 [20] から, 定理 2.2 で考察している値達は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上線形独立になる.

3 一般超幾何関数の Padé 近似

定理 2.1, 定理 2.2 は一般超幾何関数の Padé 近似を用いて示される. このセクションでは一般超幾何関数の Padé 近似の明示的構成を行う. Padé 近似については, [28] を参照せよ. K を標数 0 の体とする. ${}_pF_q$ を一般化した一般超幾何関数を定義する.

多項式 $A(X), B(X) \in K[X]$ が $\max(\deg A, \deg B) > 0$ かつ

$$A(k)B(k) \neq 0 \quad (k \geq 0) \ , \tag{1}$$

を満たすとする. 以下 $\max(\deg A, \deg B) = r$ とおく. 数列 $\mathbf{c} := (c_k)_{k\geq 0}$ が $c_k \in K \setminus \{0\}$ と

$$c_{k+1} = c_k \cdot \frac{A(k)}{B(k+1)} \quad (k \geq 0) \ , \tag{2}$$

を満たすとする. このとき一般超幾何関数を

$$F_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+1} \ ,$$

と定義し, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1} \in K$ に対して, F_r に隣接する級数 $F_s(z)$ を

$$F_s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\gamma_1)\cdots(k+\gamma_{r-s}) c_k z^{k+1} \quad (1 \leq s \leq r-1) \ ,$$

と定義する.

例 3.1. p, q を $p \leq q+1$ を満たすと自然数とし, $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in K \setminus \{0\}$ を負の整数でないとする. 多項式 $A(X) = (X+a_1+1)\cdots(X+a_p+1)$, $B(X) = (X+b_1)\cdots(X+b_q)(X+1)$ に対して, 数列を $\boldsymbol{c} = (c_k)_k$ を

$$c_k = \frac{(a_1)_{k+1}\cdots(a_p)_{k+1}}{(b_1)_{k+1}\cdots(b_q)_{k+1}(k+1)!} \quad (k \geq 0) \ ,$$

と定義すると

$$c_{k+1} = c_k \cdot \frac{A(k)}{B(k+1)} \ ,$$

が成り立つ. $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = b_q, \ldots, \gamma_{q-1} = b_2$ とするとき, 一般超幾何関数と隣接する関数 $F_s(1/z)$ は次である.

$$F_{q+1}(1/z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{z}\right) - 1 \ ,$$

$$F_s(1/z) = \frac{a_1\cdots a_r}{b_1\cdots b_s} \cdot \frac{1}{z} \cdot {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1+1, \ldots, \ldots, \ldots, a_p+1 \\ b_1+1, \ldots, b_s+1, b_{s+1}, \ldots, b_q \end{matrix} \,\middle|\, \frac{1}{z}\right) \quad (1 \leq s \leq q) \ .$$

以降で使用する記号を導入する.

記号 3.2. (i) $\alpha \in K$ に対し, 代入写像, Eval_α を $K[t] \longrightarrow K$, $P \longmapsto P(\alpha)$ とする.

(ii) 多項式 $P(t) \in K[t]$, に対し, P 倍写像を $[P]$ $(Q \longmapsto PQ)$ とする.

m を正整数, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K \setminus \{0\}$ を相違なる元, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1} \in K$ とする. $1 \leq i \leq m, 1 \leq s \leq r$ に対して, K 準同型 $\psi_{i,s} \in \mathrm{Hom}_K(K[t], K)$ を

$$\psi_{i,s} : K[t] \longrightarrow K; \ t^k \mapsto (k+\gamma_1)\cdots(k+\gamma_{r-s}) c_k \alpha_i^{k+1} \ ,$$

と定義する．ここで $(k+\gamma_1)\cdots(k+\gamma_{r-s})=1$ $(s=r,\, k\geq 0)$ である．$\mathcal{T}_{\mathbf{c}}\in \mathrm{Aut}_K(K[t])$ を

$$\mathcal{T}_{\mathbf{c}}: K[t] \longrightarrow K[t];\ t^k \mapsto \frac{t^k}{c_k}\ , \tag{3}$$

と定義する．Euler 作用素 $t\frac{d}{dt}$ を θ_t とかく．

さて一般超幾何関数とその隣接する関数の異なる値での Padé 近似を構成しよう．

命題 3.3. (*confer* [14, Theorem 5.5]) 非負整数 ℓ に対して，多項式族を

$$P_{n,\ell}(z)=P_\ell(z)=\left[\frac{1}{(n-1)!^r}\right]\circ \mathrm{Eval}_z\circ \mathcal{T}_{\mathbf{c}}\bigcirc_{j=1}^{n-1}B(\theta_t+j)\left(t^\ell\prod_{i=1}^{m}(t-\alpha_i)^{rn}\right)\ ,$$

$$P_{n,\ell,i,s}(z)=P_{\ell,i,s}(z)=\psi_{i,s}\left(\frac{P_\ell(z)-P_\ell(t)}{z-t}\right)\quad (1\leq i\leq m, 1\leq s\leq r)\ ,$$

と定義する．このとき $(P_\ell(z),P_{\ell,i,s}(z))_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq s\leq r}}$ は $(F_s(\alpha_i/z))_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq s\leq r}}$ の重さ $(n,\ldots,n)\in\mathbb{N}^{rm}$, 次数 $rmn+\ell$ の *Padé* 型近似である．

命題 3.3 の証明のため補題をひとつ用意する．

補題 3.4. k を正整数とする．

(i) 多項式 $H(X)\in K[X]$ に対して，$[t^k]\circ H(\theta_t)=H(\theta_t-k)\circ[t^k]$ が成り立つ．

(ii) $\mathcal{T}_{\mathbf{c}}\in\mathrm{Aut}_K(K[t])$ を (3) で定義される K 自己同型とする．このとき

$$[t^k]\circ\mathcal{T}_{\mathbf{c}}=\mathcal{T}_{\mathbf{c}}\circ A(\theta_t-1)\circ\cdots\circ A(\theta_t-k)\circ B(\theta_t)^{-1}\circ\cdots\circ B(\theta_t-k+1)^{-1}\circ[t^k]\ ,$$

が成り立つ．ただし $B(\theta_t-j)^{-1}$ は，(t^k) を $K[t]$ の t^k で生成されるイデアルとし，

$$B(\theta_t-j):(t^k)\longrightarrow(t^k):\quad t^{k+m}\mapsto B(k+m-j)t^{k+m}$$

の逆写像である．

証明. (i) n を非負整数とする．$H(X)=X^n$ と仮定して一般性を失わない．非負整数 m に対して，

$$[t^k]\circ\theta_t^n(t^m)=m^nt^{m+k}\ ,$$

が成り立ち，一方で

$$(\theta_t-k)^n\circ[t^k](t^m)=(k+m-k)^nt^{m+k}=m^nt^{m+k}\ ,$$

も成り立つ．これらの等式から主張を得る．

(ii) m を非負整数とする．漸化式 (2) から

$$\frac{1}{c_{m+k}}=\frac{B(m+k)\cdots B(m+1)}{A(m+k-1)\cdots A(m)}\cdot\frac{1}{c_m}\ ,$$

が成り立つことに注意すると，等式:

$$\begin{aligned}[t^k]\circ\mathcal{T}_{\mathbf{c}}(t^m)&=\frac{t^{k+m}}{c_m}=\frac{1}{c_{m+k}}\frac{A(m+k-1)\cdots A(m)}{B(m+k)\cdots B(m+1)}t^{k+m}\\ &=\mathcal{T}_{\mathbf{c}}\circ A(\theta_t-1)\circ\cdots\circ A(\theta_t-k)\circ B(\theta_t)^{-1}\circ\cdots\circ B(\theta_t-k+1)^{-1}\circ[t^k](t^m)\ .\end{aligned}$$

を得る．これで (ii) が示された． □

これより命題 3.3 の証明を与える.

命題 3.3 の証明. $P_\ell(z)$ の定義より, $\deg P_\ell(z) = rmn+\ell$ が成り立つ. $\mathcal{T}_{\mathbf{c}}$ と $\psi_{i,s}$ の定義から, 等式:

$$\psi_{i,s} = \psi_{i,0}\circ(\theta_t+\gamma_1)\circ\cdots\circ(\theta_t+\gamma_{r-s}) \ , \tag{4}$$

$$\psi_{i,0}\circ\mathcal{T}_{\mathbf{c}} = [\alpha_i]\circ \mathrm{Eval}_{\alpha_i} \ \text{for}\ 1\le i\le m \ , \tag{5}$$

が成り立つ. $R_{\ell,i,s}(z) = P_\ell(z)F_s(\alpha_i/z) - P_{\ell,i,s}(z)$ とおく. このとき $R_{\ell,i,s}(z)$ の定義から,

$$R_{\ell,i,s}(z) = P_\ell(z)\psi_{i,s}\left(\frac{1}{z-t}\right) - P_{\ell,i,s}(z) = \psi_{i,s}\left(\frac{P_\ell(t)}{z-t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi_{i,s}(t^kP_\ell(t))}{z^{k+1}}$$

が成り立つ. $0\le k\le n-1$ を満たす整数 k に対して,. 補題 3.4 (i) (ii) から等式:

$$\begin{aligned}
(n-1)!^r t^k P_\ell(t) &= [t^k]\circ\mathcal{T}_{\mathbf{c}} \bigcirc_{j=1}^{n-1} B(\theta_t+j)\left(t^\ell\prod_{i=1}^m (t-\alpha_i)^{rn}\right)\\
&= \mathcal{T}_{\mathbf{c}} \bigcirc_{j'=1}^{k} A(\theta_t-j') \bigcirc_{j''=0}^{k-1} B(\theta_t-j'')^{-1} \bigcirc_{j=1}^{n-1} B(\theta_t+j-k)\left(t^{\ell+k}\prod_{i=1}^m (t-\alpha_i)^{rn}\right)\\
&= \mathcal{T}_{\mathbf{c}} \bigcirc_{j'=1}^{k} A(\theta_t-j') \bigcirc_{j=1}^{n-1-k} B(\theta_t+j)\left(t^{\ell+k}\prod_{i=1}^m (t-\alpha_i)^{rn}\right) \ ,
\end{aligned}$$

を得る. ここで $\bigcirc_{j'=1}^{k} A(\theta_t-j') = \mathrm{id}_{K[t]}$ if $k=0$ である. 従って, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\psi_{i,s}((n-1)!^r t^k P_\ell(t)) &= \psi_{i,s}\circ\mathcal{T}_{\mathbf{c}} \bigcirc_{j'=1}^{k} A(\theta_t-j') \bigcirc_{j=1}^{n-1-k} B(\theta_t+j)\left(t^{\ell+k}\prod_{i=1}^m (t-\alpha_i)^{rn}\right)\\
&= \psi_{i,0}\circ\mathcal{T}_{\mathbf{c}} \bigcirc_{j''=1}^{r-s}(\theta_t+\gamma_{j''}) \bigcirc_{j'=1}^{k} A(\theta_t-j') \bigcirc_{j=1}^{n-1-k} B(\theta_t+j)\left(t^{\ell+k}\prod_{i=1}^m (t-\alpha_i)^{rn}\right) \qquad (6)\\
&= [\alpha_i]\circ\mathrm{Eval}_{\alpha_i} \bigcirc_{j''=1}^{r-s}(\theta_t+\gamma_{j''}) \bigcirc_{j'=1}^{k} A(\theta_t-j') \bigcirc_{j=1}^{n-1-k} B(\theta_t+j)\left(t^{\ell+k}\prod_{i=1}^m (t-\alpha_i)^{rn}\right) \ . \qquad (7)
\end{aligned}$$

等式 (6), (7) において, (4) と (5) をそれぞれ使用したことに注意する. 不等式

$$\deg\left(\prod_{j''=1}^{r-s}(X+\gamma_{j''})\prod_{j'=1}^{k}A(X-j')\prod_{j=1}^{n-1-k}B(X+j)\right)\le r-s+rk+r(n-1-k)\le rn-1 \ ,$$

と Leibniz の公式から, 多項式:

$$\bigcirc_{j''=1}^{r-s}(\theta_t+\gamma_{j''}) \bigcirc_{j'=1}^{k} A(\theta_t-j') \bigcirc_{j=1}^{n-1-k} B(\theta_t+j)\left(t^{\ell+k}\prod_{i=1}^m (t-\alpha_i)^{rn}\right)$$

はイデアル $(t-\alpha_i)=\ker\mathrm{Eval}_{\alpha_i}$ に含まれるため,

$$\psi_{i,s}(t^kP_\ell(t)) = 0 \quad (0\le k\le n-1, 1\le i\le m, 1\le s\le r) \ .$$

を得る. $R_{\ell,i,s}(z)$ の展開から

$$\mathrm{ord}_\infty R_{\ell,i,s}(z)\ge n+1 \ \text{for}\ 1\le i\le m, 1\le s\le r \ ,$$

が成り立ち, 命題 3.3 が示された. □

注意 3.5. D. V. Chudnovsky と G. V. Chudnovsky は [14, Theorem 5.5] において, 命題 3.3 に相当する Padé 近似を考察している. しかしながら彼らは数論的な応用は与えてはいない. また関連する話題として [32] も参照せよ.

4　主定理の証明の概略

ここでは前セクションで考察した多項式 $A(X), B(X)$ が $r' := \deg A \le r := \deg B$ を満たし, それぞれ K 上で分解して,

$$A(X) = (X+\eta_1)\cdots(X+\eta_{r'}), \quad B(X) = (X+\zeta_1)\cdots(X+\zeta_r)$$

と書けるとする.

定理 2.1 は線形独立性の判定条件 [28, 命題 3.1] を用いて示される. 定理 2.2 は [28, 命題 3.1] の類似である次のよく知られた補題を用いて示される.

補題 4.1. $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m \in \mathbb{C}$ とする. K を有理数体, もしくは虚二次体とし, $\mathcal{O}_K$ でその整数環をあらわす. 行列の族, $M_n = (a_{i,j})_{0\le i\le m, 0\le j\le m} \in \mathrm{GL}_{m+1}(K) \cap \mathrm{M}_{m+1}(\mathcal{O}_K)$ で, ある $C, a > 0$ が存在し, 条件:

$$\max_i(|a_{i,0}\theta_j - a_{i,j}\theta_0|) \le e^{Cn}(n!)^{-a} \quad (1 \le j \le m)$$

を満たすものが存在すると仮定する. このとき, $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m$ は K 上線形独立である.

命題 3.3 で構成した Padé 近似を成分に持つ行列を

$$M_n(z) := \begin{pmatrix} P_0(z) & \cdots & P_{rm}(z) \\ P_{0,1,r}(z) & \cdots & P_{rm,1,r}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{0,m,r}(z) & \cdots & P_{rm,m,r}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{0,1,r}(z) & \cdots & P_{rm,1,r}(z) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{0,m,r}(z) & \cdots & P_{rm,m,r}(z) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{rm+1}(K[z])$$

とおく. 行列族 $(M_n := M_n(\beta))_n$ に対して [28, 命題 3.1] や補題 4.1 をそれぞれ用いて定理 2.1, 定理 2.2 を示す. 最も重要なのは M_n の可逆性に関する次の命題である.

命題 4.2. 次を仮定する.

$$\text{任意の } 1 \le i \le r', 1 \le j \le r \text{ に対して}, \eta_i - \zeta_j \notin \mathbb{Z}_{\ge 1} \quad . \tag{8}$$

このとき $C_n \in K \setminus \{0\}$ が存在して

$$\det M_n(z) = \det M_n = C_n \prod_{i=1}^{m} \alpha_i^{ru+r^2n+\binom{r}{2}} \prod_{1\le i_1<i_2\le m} (\alpha_{i_2}-\alpha_{i_1})^{(2n+1)r^2} \in K \setminus \{0\}$$

が成り立つ.

注意 4.3. 命題 4.2 の証明の方針は [16, Proposition 4.5] と同様である. 命題 4.2 において, $\det M_n(z)$ の値は z によらず定数で, C_n は具体的に計算できる値であり, その非零性を示すために仮定 (8) を用いている. さらに C_n の具体的計算は [17, Lemma 4.2] を用いる.

謝辞: 最後になりますが, 講演の機会をくださいました組織委員の山崎義徳先生 (愛媛大学), 安福悠先生 (日本大学) に感謝致します.

参考文献

[1] K. Alladi and M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew Math. **318**(1980), 137–155.

[2] Y. André, *G-fonctions et transcendance*, J. Reine Angew Math.,**476** (1996), 95–126.

[3] A. Baker, *Approximations to the logarithms of certain rational numbers*, Acta Arith. **10** (1964), 315–323.

[4] F. Beukers, *Algebraic values of G-functions*, J. Reine Angew Math. **434**, (1993), 45–65.

[5] F. Beukers and J. Wolfart, *Algebraic values of hypergeometric functions*, New advances in transcendence theory (Durham, 1986), 68–81, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[6] F. Beukers, W. D. Brownawell and G. Heckman, *Siegel normality*, Annals of Math, **127** (1988), 279–308.

[7] G. Christol, *Fonctions hypergéometriques bornées*, Groupe d'etude d'analyse ultramétrique, 1986/1987 Secrétariat, Institut H. Poincare, Paris.

[8] G. V. Chudnovsky, *Padé approximations to the generalized hypergeometric functions I*, J. Math. Pures et Appl. **58** (1979) 445–476.

[9] G. V. Chudnovsky, *Hermite-Padé approximations to exponential functions and elementary estimates of the measure of irrationality of* π, Lecture Notes in Math. **925**, 1982, 299–322.

[10] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *Recurrences, Padé Approximations and their Applications*, In: Classical and Quantum Models and Arithmetic Problems, Lecture Notes in Pure and Applied Math. **92** 1984, 215–238.

[11] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *The Wronskian Formalism for Linear Differential Equations and Padé Approximations*, Advances in Math.**53** (1984) 28–54.

[12] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *Applications of Padé approximations to diophantine inequalities in values of G-functions*, Lecture Notes in Math. **1135**, 1985, 9–51.

[13] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *Approximations and Complex Multiplication According to Ramanujan*, In: Ramanujan Revisited, Proceedings of the Centenary Conference, University of Illinois at Urbana-Champaign, June 1-5, 1987, eds. E. Andrews et al., Academic Press, (1988), 375–472.

[14] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *Use of Computer Algebra for Diophantine and Differential Equations*, in Computer algebra, M. Dekker, NY, 1988, 1–82.

[15] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent?*, Mosc. J. Comb. Number Theory **9** (2020), 389–406.

[16] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear Forms in Polylogarithms*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci, **23** no. 3, (2022), 1447–1490.

[17] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear independence criteria for generalized polylogarithms with distinct shifts*, Acta Arithmetica, **206** no. 2, (2022), 127—169.

[18] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Generalized hypergeometric G-functions take linear independent values*, available at https://arxiv.org/abs/2203.00207

[19] N. I. Fel'dman and Yu. V. Nesterenko, Number Theory IV (eds. A. N. Parshin and I. R. Schfarevich), Encyclopaedia of Mathematical Sciences **44** Springer, 1998.

[20] S. Fischler and T. Rivoal, *Values of E-functions are not Liouville numbers*, available at https://arxiv.org/pdf/2301.01158.pdf

[21] A. I. Galochikin, *Lower bounds for polynomials in values of analytic functions of certain class*, Mat. Sb. **95** (1974), 396–417; English transl. in Math. USSR-Sb. **24** (1974).

[22] A. I. Galochikin, *Lower bounds for linear forms in values of certain G-functions*, Mat. Zametki **18** (1975), 541–552; English transl. in Math. Note **18** (1975).

[23] A. I. Galochkin, *Hypergeometric Siegel functions and E-functions*, Math. Notes **29** (1981), 3–8; English translation of Mat. Zametki **29**.1 (1981), 3???-14 (in russian).

[24] M. Hata, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions*, J. Math. Pures et Appl., **69**, (1990), 133–173.

[25] M. Hata, *Rational approximations to the dilogarithms*, Trans. Amer. Math. Soc., **336**, no. 1, (1993), 363–387.

[26] N. Hirata-Kohno, M. Ito and Y. Washio, *A criterion for the linear independence of polylogarithms over a number field*, RIMS Kokyouroku Bessatu, **64**, (2017), 3–18.

[27] M. Kawashima, 多重対数関数の特殊値の線形独立性について *(*解析的整数論とその周辺*)*, 数理解析研究所講究録 2020, 2162: 197-209

[28] M. Kawashima, 異なる *shift* の一般 *Lerch* 関数の特殊値の線形独立性について *(*解析的整数論の展望と諸問題*)*, 数理解析研究所講究録 2021, 2196: 125–137.

[29] M. Kawashima and A. Poëls, *Padé approximations for shifted functions and parametric geometry of numbers*, Journal of Number Theory, **243**, (2023), 646–687.

[30] F. Von Lindeman, *Über die Zahl* π, Math. Ann. **20** (1882), 213–225.

[31] R. Marcovecchio, *Linear independence of forms in polylogarithms*, Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa CL. Sci., **5**, (2006), 1–11.

[32] T. Matala-aho, *Type II Hermite-Padé approximations of generalized hypergeometric series*, Constr. Approx. **33**, no. 3 (2011) 289–312.

[33] Yu. Nesterenko, *Hermite-Padé approximants of generalized hypergeometric functions*, In: Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–92, ed. S. David, Progress in Math. **116** (1993), 1191–216.

[34] Yu. V. Nesterenko, *Hermite-Padé approximants of generalized hypergeometric functions*, Mat. Sb. **185** no. 10 (1994), 39–72; English translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. **83**, no. 1 (1995), 189–219.

[35] E. M. Nikisin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, American Math. Society, 1991.

[36] *Number Theory IV Transcendental Numbers*, A. N. Parshin and I. R. Shafarevich (Eds.) Encyclopaedia of Mathematical Sciences (EMS, volume 44)

[37] G. Rhin and P. Toffin, *Approximants de Padé simultanés de logarithmes*, J. Number Theory, **24**, (1986), 284–297.

[38] T. Rivoal, *Remarks on the impossibility of a Siegel-Shidlovskii like theorem for G-functions*, Hardy-Ramanujan Journal **38** (2015), 29–35.

[39] T. Rivoal, *On Galochkin's characterization of hypergeometric G-functions*, Mosc. J. Comb. Number Theory **11** (1), (2022): 11–19.

[40] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abh. Preuss. Akad. Wiss. (1) (1929), 70S.

[41] V. N. Sorokin, *On the irrationality of the values of hypergeometric functions*, Sb. Math. **55** (1986) 243–257.

[42] K. Väänänen, *On linear forms of a certain class of* G*-functions and* p*-adic* G*-functions*, Acta Arith., **36** (1980) 273–295.

[43] J. Wolfart, *Werte hypergeometrischer funktionen*, Inv. Math. **92**, 187–216.

[44] G. Wüstholz, *Algebrausche Punkte auf analytischen Untergruppen algebraischer Gruppen*, Annals of Math. **129**, 501–517.

[45] V. V. Zudilin, *On a measure of irrationality for values of G-functions*, Izvestiya: Mathematics **60**: 1 91–118.

Makoto Kawashima
kawashima.makoto@nihon-u.ac.jp
Department of Liberal Arts and Basic Sciences
College of Industrial Engineering
Nihon University
Izumi-chou, Narashino, Chiba
275-8575, Japan