On the series expression of the logarithmic derivative of an absolute zeta function and its absolute Euler product

慶應義塾大学大学院・理工学研究科 * 冨田拓希 †
Takuki Tomita
Graduate School of Science and Technology
Keio University

1 絶対ゼータ関数

X を $\mathbb{Z}$ 上有限型スキームとし、$X_p := X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ とする。X_p に対する合同ゼータ関数

$$Z(X, p^{-s}) := \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\#X_p(\mathbb{F}_{p^m})}{m} p^{-sm}\right) \in \mathbb{Q}[\![p^{-s}]\!]$$

は重要な研究対象である。もし任意の素数 p と $m \in \mathbb{N}$ に対して $f_X(p^m) = \#X_p(\mathbb{F}_{p^m})$ となる整数係数多項式 $f_X(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j t^j$ が存在するならば、

$$Z(X, p^{-s}) = \exp\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{f_X(p^m)}{m} p^{-sm}\right) = \exp\left(\sum_{j=0}^{d} a_j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{-(s-j)m}}{m}\right) = \prod_{j=0}^{d} (1 - p^{j-s})^{-a_j}$$

となる。そこで、Soulé はこのような設定の下で $Z(X, p^{-s})$ を p について $\mathbb{R}_{>0}$ 上の関数に拡張すると、その $p = 1$ での先頭項が

$$\lim_{p \to 1} (p-1)^{f_X(1)} Z(X, p^{-s}) = \prod_{j=0}^{d} (s-j)^{-a_j}$$

という有理関数になることを見抜き、この有理関数を X の絶対ゼータ関数と呼んだ [5]。

上述の通り、特殊な性質を持つスキームに対する Soulé による絶対ゼータ関数は有理関数であったが、これを一般化するにあたって Manin の指摘は注意に値する。その Manin の指摘は、補正項付きガンマ関数の逆数 $(2\pi)^s \Gamma(s)^{-1}$ が "$\mathbb{F}_1$ 上の双対無限次元射影空間"

[0] 〒 223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1
[0]Email address: takuki@keio.jp

のゼータ関数と捉えることができるというものである [4, §1.7]。このアイデアを受けて、黒川・落合はガンマ関数をもゼータ関数と捉えられるように、Soulé による絶対ゼータ関数の定義を次のように拡張した。

定義 1.1 ([7], [3], [1])**.** $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{C}$ を、ある $C > 0$ と領域 $D \subset \mathbb{C}$ が存在して $\mathrm{Re}(s) > C$ と $w \in D$ に対して

$$Z_f(w,s) := \frac{1}{\Gamma(w)} \int_1^\infty f(t) t^{-s} (\log t)^{w-1} \frac{dt}{t} = \frac{1}{\Gamma(w)} \int_0^\infty f(e^x) e^{-sx} x^{w-1} dx$$

が well-defined となる関数とする。さらに、Z_f が $w = 0$ を含む領域まで一意に正則関数に解析接続できると仮定する。このとき、

$$\zeta_f(s) := \exp\left(\frac{\partial}{\partial w} Z_f(w,s) \bigg|_{w=0} \right)$$

を f の絶対ゼータ関数という。

例 1.2 ([3, Theorem A])**.** $f(t) = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j t^j \in \mathbb{Z}[t]$ の絶対ゼータ関数は

$$\zeta_f(s) = \prod_{j=0}^{d} (s-j)^{-a_j}$$

となる。これは Soulé の意味での絶対ゼータ関数である有理関数と一致しているので、定義 1.1 は Soulé の意味での絶対ゼータ関数の一般化を与えていると言える。

さらに、絶対ゼータ関数は以下のように Barnes の多重ガンマ関数や完備 Riemann ゼータ関数の無限積表示の “有限版” に相当するものも含んでいる。

例 1.3 ([3], [8])**.** $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_r) \in (0,\infty)^r$ とし、$f_{\boldsymbol{\omega}}(t) = \frac{1}{(1-t^{-\omega_1})\cdots(1-t^{-\omega_r})}$ とする。このとき、$f_{\boldsymbol{\omega}}$ の絶対ゼータ関数は

$$\zeta_{f_{\boldsymbol{\omega}}}(s) = \Gamma_r(s, \boldsymbol{\omega}) \quad (\text{Barnes の多重ガンマ関数})$$

である。特に、$r = 1$ のとき、$\zeta_{f_\omega}(s) = \Gamma_1(s,\omega) = \frac{\omega^{\frac{s}{\omega}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{s}{\omega}\right)$ となる。

例 1.4 ([10])**.** $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g) \in [0,\infty)^g$ とする。黒川は

$$f_{\boldsymbol{\alpha}}(t) := t - 2\sqrt{t} \sum_{k=1}^{g} \cos(\alpha_k \log t) + 1 = t - \sum_{k=1}^{g} \left(t^{\frac{1}{2}+i\alpha_k} + t^{\frac{1}{2}-i\alpha_k} \right) + 1$$

を種数 g の絶対 Riemann 面の計数関数[1]と呼んでいる。$f_{\boldsymbol{\alpha}}$ の絶対ゼータ関数は

$$\zeta_{f_{\boldsymbol{\alpha}}}(s) = \frac{1}{s(s-1)} \prod_{k=1}^{g} \left(\left(s - \frac{1}{2} - i\alpha_k \right) \left(s - \frac{1}{2} + i\alpha_k \right) \right)$$

となる。これは Riemann (cf. [10, p. 44]) や Deninger (cf. [4, 式 (1.5)]) による完備 Riemann ゼータ関数の無限積またはゼータ正規化表示の “有限版” と言えるものである。

[1] 「種数 g の絶対 Riemann 面」の定義はまだ与えられていない。

本稿では、§2 において良い性質を持った $[1,\infty)$ 上の解析関数のクラス $\mathcal{A}$ を導入し、その元に対する絶対ゼータ関数の 3 つの結果を紹介する。まず、§3 において、絶対ゼータ関数の対数微分が与えられた関数の反復オイラー微分値の母関数として記述できることを述べる。次に、§4 において、絶対ゼータ関数が絶対 Euler 積と呼ばれる無限積で表されることを述べる。絶対 Euler 積とは、黒川が [8] で導入した無限積展開であり、§4 で先行研究と共に詳細を述べる。さらに、§5 において、t^ρ $(\rho\in\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}$ 線形和 f に対する絶対ゼータ関数の絶対 Euler 積の絶対収束領域が、f に関する仮定の下で f の不変量によって記述できることを述べる。

2　関数のクラス $\mathcal{A}$

まず、本稿で扱う関数のクラスを導入する。

定義 2.1. $d>0$ に対して、

$$\mathcal{A}_d := \{f\in C^\omega([1,\infty),\mathbb{C}) \mid \exists C>0,\ \forall n\in\mathbb{N}_0,\ |\alpha_n(f)|\le Cd^n\}$$

と定義する。ただし、

$$\alpha_n(f) := \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f(e^x)\bigg|_{x=0} = \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n f(t)\bigg|_{t=1}$$

とする。さらに、$\mathcal{A} := \bigcup_{d>0}\mathcal{A}_d$ とする。

注意 2.2. 定義 1.1 において f は $t=1$ で定義されている必要はなかったが、$\mathcal{A}$ の元 f はすべて $t=1$ も定義域に含んでいる。

本研究で関数のクラス $\mathcal{A}$ を導入した理由は、$f\in\mathcal{A}$ から定まる絶対ゼータ関数 $\zeta_f(s)$ を計算する際に種々の極限操作を容易に交換できるからである。
このような関数のクラス $\mathcal{A}$ は次のような性質を持つことが定義から分かる。

命題 2.3. 任意の $d_1,d_2>0$ に対して、

- $d_1<d_2 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{A}_{d_1}\subset\mathcal{A}_{d_2}$
- $f\in\mathcal{A}_{d_1},\ g\in\mathcal{A}_{d_2} \quad\Longrightarrow\quad f+g\in\mathcal{A}_{\max\{d_1,d_2\}},\ fg\in\mathcal{A}_{d_1+d_2}$

が成り立つ。よって、$\mathcal{A}$ は *continuously filtered ring* をなす。

この命題により、以下の具体的な関数が少なくとも $\mathcal{A}$ のどのフィルターに属しているかが簡単に分かる。ちなみに、これらの例は §3 以降の具体例として扱うものである。

例 2.4. $t^\rho\in\mathcal{A}_{|\rho|}$ $(\rho\in\mathbb{C})$ であるから、有限集合 $\Phi\subset\mathbb{C}$ に対して $\sum_{\rho\in\Phi}c_\rho t^\rho\in\mathcal{A}_{\max_{\rho\in\Phi}|\rho|}$ $(c_\rho\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ となる。

例 2.5. 任意の $\varepsilon>0$ に対して $t\in\mathcal{A}_1$, $\log t\in\mathcal{A}_\varepsilon$ であるから、$t\log t\in\mathcal{A}_{1+\varepsilon}$ となる。

$|\alpha_n| \le Cd^n$ を満たす α_n を適当に取ってきて、その指数型母関数を log で引き戻した関数が $C^\omega([1,\infty),\mathbb{C})$ の元となっていれば、それも $\mathcal{A}$ の元である。

例 2.6 ($\alpha_n(f)$ が多重調和スター和の場合)**.** $k \in \mathbb{N}$ とし、

$$f_k(t) := -t\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-\log t)^l}{l!\ l^k}$$

とする。このとき、

$$f_k(e^x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}x^{m+l}}{m!\ l!\ l^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{l=1}^{\infty}(-1)^{l+1}\binom{n}{l}\frac{1}{l^k}$$

となる。Hoffman の恒等式 [2, Theorem 4.2] より、

$$f_k(e^x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}H_n^\star(\underbrace{1,\ldots,1}_{k})$$

となる。ここで、$H_n^\star(s_1,\ldots,s_k) := \displaystyle\sum_{0<l_1\le\cdots\le l_k\le n}\frac{1}{l_1^{s_1}\cdots l_k^{s_k}}$ は多重調和スター和である。これより、$\alpha_n(f) = H_n^\star(1,\ldots,1)$ を得る。$H_n^\star(1,\ldots,1) \le (H_n^\star(1))^k = O((\log n)^k)$ であるから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $f_k \in \mathcal{A}_{1+\varepsilon}$ となる。

3 絶対ゼータ関数の対数微分

定義 1.1 において、絶対ゼータ関数は $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きい右半平面で定義されていた。本節では、前節で定義した $\mathcal{A}$ の元に対して、絶対ゼータ関数をより広い領域に解析接続できることを述べる。さらに、それを用いることで、絶対ゼータ関数の対数微分が与えられた関数の反復オイラー微分値の母関数と等しいことを述べる。

定理 3.1. $d > 0$ とし、$f(t) \in \mathcal{A}_d$ とする。このとき、$\mathrm{Re}(s) > d$ に対して

$$\log\zeta_f(s) = -f(1)\log s + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(f)}{ns^n}$$

が成り立つ。特に、$s^{f(1)}\zeta_f(s)$ は $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| > d\}$ 上一価正則関数に解析接続できる。さらに、$s^{f(1)}\zeta_f(s) \to 1$ *($s \to \infty$ in $\mathbb{R}$)* である。

Sketch of proof. ここでは、積分と級数の交換可能性などの議論は省略する。$f \in \mathcal{A}_d$ より、

$$f(e^x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n(f)x^n}{n!}$$

となる。$\mathrm{Re}(s) > d$, $\mathrm{Re}(w) > 0$ に対して

$$\begin{aligned} Z_f(w,s) &= \frac{1}{\Gamma(w)} \int_0^\infty f(e^x) e^{-sx} x^w \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{\Gamma(w)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha_n(f)}{n!} \frac{\Gamma(n+w)}{s^{n+w}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha_n(f)(w)_n}{n!\ s^{n+w}} \end{aligned}$$

となる。$Z_f(w,s)$ を $|s| > d$, $|w| < 1$ まで解析接続することによって、$|s| > d$ に対して

$$\log \zeta_f(s) = \frac{\partial}{\partial w} Z_f(w,s) \Big|_{w=0} = -\alpha_0(f) \log s + \sum_{n=1}^\infty \frac{\alpha_n(f)}{n} s^{-n}$$

となる。この両辺の exp を取ることで、定理の残りについて所望の帰結を得る。 □

次の系が本稿の 1 つ目の主結果である。これは定理 3.1 から導かれる。

系 3.2. $d > 0$ とし、$f(t) \in \mathcal{A}_d$ とする。このとき、$\mathrm{Re}(s) > d$ に対して

$$\frac{\zeta_f'(s)}{\zeta_f(s)} = -\sum_{n=1}^\infty \alpha_{n-1}(f) s^{-n}$$

が成り立つ。

例 3.3. $f(t) = \sum_{j=-d_-}^{d_+} a_j t^j \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ とする。$\alpha_n(f) = \sum_{j=-d_-}^{d_+} a_j j^n$ であるから、$f \in \mathcal{A}_{\max\{|d_-|,|d_+|\}}$ となる。系 3.2 より、$\mathrm{Re}(s) > \max\{|d_-|, |d_+|\}$ に対して

$$\frac{\zeta_f'(s)}{\zeta_f(s)} = -\sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{j=-d_-}^{d_+} a_j j^{n-1} \right) s^{-n}$$

となる。

定理 3.1 より、同じ重さの多重ポリログの総和の exp も絶対ゼータ関数であると分かる。

例 3.4. 定理 3.1 より、例 2.6 で扱った

$$f_k(t) := -t \sum_{l=1}^\infty \frac{(-\log t)^l}{l!\ l^k} \ \in \mathcal{A}_{1+\varepsilon} \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

に対する絶対ゼータ関数の対数は、$\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して

$$\log \zeta_{f_k}(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{H_n^\star(1,\ldots,1)}{ns^n} = \sum_{0<l_1\le\cdots\le l_k\le n} \frac{\left(\frac{1}{s}\right)^n}{l_1\cdots l_k n} = \sum_{|\boldsymbol{k}|=k+1} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{1}{s}\right)$$

となる。これより

$$\zeta_{f_k}(s) = \prod_{|\boldsymbol{k}|=k+1} \exp\left(\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{1}{s}\right)\right)$$

となる。さらに、系 3.2 より、$\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して

$$\frac{\zeta_{f_k}'(s)}{\zeta_{f_k}(s)} = -\sum_{n=1}^\infty \frac{H_n^\star(1,\ldots,1)}{s^{n+1}} = \frac{1}{1-s} \sum_{|\boldsymbol{k}|=k} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}\left(\frac{1}{s}\right)$$

となる。

4 絶対ゼータ関数の絶対 Euler 積表示

本節では、系 3.2 から得られる絶対 Euler 積に関する結果を紹介する。絶対 Euler 積とは、黒川によって導入された絶対ゼータ関数の無限積表示である [8]。$\mathbb{Z}$ 上有限型の可換環 R のゼータ関数 (Spec R の Hasse ゼータ関数) $\zeta_R(s)$ は

$$\zeta_R(s) := \prod_{\mathfrak{a} \in \text{m-Spec}R} (1 - (\#R/\mathfrak{a})^{-s})^{-1} = \prod_{p:\text{prime}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p^{-ns})^{-\kappa(p,n;R)}$$

と無限積で表すことができる。ただし、m-Spec$R$ は R の極大イデアルの集合とし、$\kappa(p,n;R) := \#\{\mathfrak{a} \in \text{m-Spec}R \mid \#R/\mathfrak{a} = p^n\}$ とする。また、$\mathbb{F}_p$ 上有限型スキーム X に対する合同ゼータ関数 $Z(X, p^{-s})$ も

$$Z(X, p^{-s}) = \prod_{x \in |X|} (1 - \#k(x)^{-s})^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p^{-ns})^{-\kappa(p,n;X)}$$

と無限積で表すことができる。ただし、$|X|$ は X の閉点の集合であり、$\kappa(p,n;X) := \#\{x \in |X| \mid \#k(x) = p^n\}$ である。黒川はこれらの無限積表示をそれぞれのゼータ関数の Euler 積であると捉えた [9]。これらを踏まえ、黒川はいくつかの具体例を計算することで、ある種の絶対ゼータ関数はこれらの無限積と類似した無限積表示を持つのではないかと示唆した。

予想 4.1 ([8])**.** *$f(t)$ を "良い関数" とする。そのとき、$\zeta_f(s)$ には絶対 Euler 積と呼ばれる*

$$\zeta_f(s) = s^{-f(1)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - s^{-n})^{-\kappa(n,f)} \tag{1}$$

という形の無限積展開が存在する。さらに、この無限積は $\mathrm{Re}(s) > \deg f$ で絶対収束する。

注意 4.2. 式 (1) の両辺に $s^{f(1)}$ をかけて $s^{f(1)}\zeta_f(s)$ の無限積表示としたとき、この無限積の s を p^s に置き換えると合同ゼータ関数の Euler 積表示と似ている。

この示唆を受けて、次のような結果が得られている。

定理 4.3 ([9]+[6])**.** *$f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ であるとき、式 (1) が成り立つ。ここで、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $\kappa(n,f) \in \mathbb{Z}$ であり、明示的に記述することができる。さらに、式 (1) の右辺の無限積の絶対収束領域は $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| > \deg f\}$ である。*

本稿では、この定理を一般化する。式 (1) に現れる $\kappa(n,f)$ を明示的に記述するために、いくつかの記号を導入する。

定義 4.4. $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ を複素数列とする。$\mathcal{M}\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ を $\mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha})_0 := \alpha_0$,

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha})_n := \frac{1}{n} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \alpha_m \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

と定義する。特に、$\rho \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ に対して $\kappa_\rho(n) := \mathcal{M}(\{\rho^n\}_{n=0}^{\infty})_n$ と定義する。

注意 4.5. $\mathcal{M}\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ は線形性を持つ。

この定義を $\alpha_n(f) = \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n f(t)\Big|_{t=1}$ からなる数列に適用する。

定義 4.6. $d > 0$ とし、$f \in \mathcal{A}_d$ とする。このとき、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $M_n(f) := \mathcal{M}(\{\alpha_n(f)\}_{n=0}^{\infty})_n$ と定義する。

注意 4.7. $\mathcal{M}\colon \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ は線形なので、$M_n\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ は線形である。

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 内で級数 $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$ は絶対収束するので、以下 $\log(1-z)\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ を $\log(1-z) := -\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$ と定義する。次の定理が本稿の 2 つ目の主結果である。

定理 4.8. $d > 0$ として、$f \in \mathcal{A}_d$ とするとき、$|s| > \max(d, 1)$ に対して

$$S_f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} M_n(f) \log\left(1 - s^{-n}\right)$$

は絶対収束する。これにより、$|s| > \max(d, 1)$ に対して

$$\zeta_f(s) = s^{-f(1)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - s^{-n}\right)^{-M_n(f)}$$

が成り立つ。ただし、$s^{-f(1)} := e^{-f(1)\log s}$, $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - s^{-n}\right)^{-M_n(f)} := \exp\left(-S_f(s)\right)$ とする。

Sketch of proof.

$$|M_n(f)| \le \frac{1}{n} \sum_{l|n} |\alpha_l(f)| \le \frac{C}{n} \sum_{l|n} d^l \le C(\max\{d, 1\})^n$$

であるから、$|s| > \max\{d, 1\}$ に対して級数 $S_f(s)$ は絶対収束する。系 3.2 より

$$\frac{\zeta_f'(s)}{\zeta_f(s)} = -\frac{1}{s} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha_N(f)}{s^N} \quad (|s| > \max\{d, 1\})$$

となる。ここで、Möbius 反転公式より任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\alpha_N(f) = \sum_{n|N} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \alpha_m(f) = \sum_{n|N} n M_n(f)$$

となるから、$\frac{d}{ds} \log(1 - s^{-n}) = \frac{n}{s^{n+1} - s}$ より

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_f'(s)}{\zeta_f(s)} &= -\frac{1}{s}\left(\alpha_0(f) + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{s^N} \sum_{n|N} n M_n(f)\right) = -\frac{1}{s}\left(\alpha_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} n M_n(f) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{s^{nm}}\right) \\ &= -\frac{1}{s}\left(\alpha_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n M_n(f)}{s^n - 1}\right) = -\frac{\alpha_0(f)}{s} - \sum_{n=1}^{\infty} M_n(f) \frac{d}{ds} \log(1 - s^{-n}) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\frac{d}{ds}\left(-\log\zeta_f(s)-\alpha_0(f)\log s-\sum_{n=1}^{\infty}M_n(f)\log\left(1-s^{-n}\right)\right)=0$$

となる。定理 3.1 より $s^{f(1)}\zeta_f(s)\to 1$ $(s\to\infty \text{ in } \mathbb{R})$ であったから、

$$\log\zeta_f(s)=-f(1)\log s-\sum_{n=1}^{\infty}M_n(f)\log\left(1-s^{-n}\right)$$

を得る。この両辺の exp を取ることで、所望の式を得る。 □

例 4.9. $f(t)=t\log t\in\mathcal{A}_{1+\varepsilon}$ $(\forall\varepsilon>0)$ とする。この絶対ゼータ関数は $\zeta_f(s)=\exp\left(\frac{1}{s-1}\right)=\exp\left(\mathrm{Li}_0\left(\frac{1}{s}\right)\right)$ である。$\alpha_n(f)=n$ であるから、$M_0(f)=0$,

$$M_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{m|n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)m=\sum_{m|n}\mu\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{-1}=\prod_{\substack{p|n\\ p\text{: prime}}}(1-p^{-1})$$

となる。ここで、これが有限 Euler 積であることに注意する。よって、

$$\zeta_f(s)=\exp\left(\frac{1}{s-1}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^{-n})^{-\prod_{p|n}(1-p^{-1})}$$

となる。

5 絶対 Euler 積の絶対収束領域

$d(f):=\inf\{d>0\mid f\in\mathcal{A}_d\}$ とする。このとき、定理 4.8 より、級数 $S_f(s)$ は少なくとも $|s|>\max\{d(f),1\}$ で絶対収束する。では、級数 $S_f(s)$ が $|s|>\max\{d(f),1\}$ の外で絶対収束することがあるのだろうか？

先行研究 [6] において、$f(t)\in\mathbb{Z}[t]$ のときはそのようなことがないということが分かっている。つまり、級数 $S_f(s)$ の絶対収束領域は $\{s\in\mathbb{C}\mid |s|>\deg f\}$ となる。ここで、$d(f)=\deg f$ であり、絶対収束領域が f の不変量で記述できていることは注意に値する。

この先行研究を踏まえ、$\mathcal{A}$ の元の中で多項式を一般化したような元に対して先行研究を一般化した。これが本稿の 3 つ目の主結果である。

定理 5.1. Φ を $\mathbb{C}$ の有限部分集合とし、$r(\Phi):=\max_{\rho\in\Phi}\{|\rho|,1\}$ とする。さらに、

$$f_\Phi(t):=\sum_{\rho\in\Phi}c_\rho t^\rho\quad(c_\rho\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$$

とする。$\Phi_{\max}:=\{\rho\in\Phi\mid|\rho|=r(\Phi)\}=:\{\rho_1,\dots,\rho_l\}$, $\theta_k:=\frac{\operatorname{Arg}\rho_k}{2\pi}$ とし、以下を仮定する。以下、c_{ρ_k} を単に c_k と書くことにする。

(1) $0 \le r \le l$ が存在して $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbb{Q}$, $\theta_{r+1}, \ldots, \theta_l \notin \mathbb{Q}$ が成り立つ[2]

(2) $0 \le h \le \frac{l-r}{2}$ が存在して $\theta_{l-h+1} = -\theta_{l-2h+1}, \ldots, \theta_l = -\theta_{l-h}$ が成り立つ[3]

(3) $1, \theta_{r+1}, \ldots, \theta_{l-h}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である

(4) $c_{l-2h+1}, \ldots, c_l \in \mathbb{R}$ である[4]

このとき、絶対 *Euler* 積の対数 $S_f(s)$ の絶対収束領域は $\{s \in \mathbb{C} \mid |s| > r(\Phi)\}$ である。

この定理を証明する際に次の補題を用いる。定理 5.1 の仮定はこの補題の仮定に由来している。

補題 5.2. $\theta_1, \ldots, \theta_l \in \mathbb{R}$, $c_1, \ldots, c_l \in \mathbb{C}$ とし、以下を仮定する。

(1) $0 \le r \le l$ が存在して $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathbb{Q}$, $\theta_{r+1}, \ldots, \theta_l \notin \mathbb{Q}$ が成り立つ

(2) $0 \le h \le \frac{l-r}{2}$ が存在して $\theta_{l-h+1} = -\theta_{l-2h+1}, \ldots, \theta_l = -\theta_{l-h}$ が成り立つ

(3) $1, \theta_{r+1}, \ldots, \theta_{l-h}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である

(4) $c_{l-2h+1}, \ldots, c_l \in \mathbb{R}$ である

このとき、もし $(c_1, \ldots, c_l) \neq (0, \ldots, 0)$ であるならば、ある自然密度が正の $N \subset \mathbb{N}$ が存在して

$$\liminf_{n \in N} \left| \sum_{j=1}^{l} c_j e^{2\pi i n \theta_j} \right| > 0$$

が成り立つ。

注意 5.3. 補題 5.2 の仮定 (3) である $\mathbb{Q}$ 上線形独立性は不可欠である。例えば $l = 2$, $r = 0$, $h = 0$, $c_1 = -c_2 \neq 0$ のとき、$1 + \theta_1 - \theta_2 = 0$ となる θ_1, θ_2 と取ると、$c_1 e^{2\pi i n \theta_1} + c_2 e^{2\pi i n \theta_2} = (c_1 + c_2) e^{2\pi i n \theta_1} = 0$ となるので、これが反例となる。

補題 5.2 は無理数回転のエルゴード性を用いて証明するが、本稿ではその証明は省略する。以下、補題 5.2 を用いて定理 5.1 の証明の概略を述べる。

Sketch of proof of Theorem 5.1. 定理 4.8 より、$S_f(s)$ は $|s| > r(\Phi)$ で絶対収束する。以下、$|s| \le r(\Phi)$ とする。$r(\Phi) = 1$ のとき、$-\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{s^{-nm}}{m}$ は $|s| \le r(\Phi) = 1$ で絶対収束しない。以下、$r(\Phi) > 1$ とする。$\kappa_\rho(n) := \mathcal{M}(\{\rho^n\}_{n=0}^{\infty})_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \rho^m$ を用いると、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| M_n(f) \log\left(1 - s^{-n}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{\rho \in \Phi} c_\rho \frac{n \kappa_\rho(n)}{r(\Phi)^n} \right| \left| \frac{r(\Phi)^n}{n} \log\left(1 - s^{-n}\right) \right|$$

---

[2] r は有理数の θ_j の個数である。$r = l$ のとき、$\theta_1, \ldots, \theta_l$ はすべて有理数である。$r = 0$ のとき、$\theta_1, \ldots, \theta_l$ はすべて無理数である。

[3] h は符号違いの θ_j の個数である。

[4] $h = 0$ のとき、符号違いの θ_j がなく c_j に実数の制限がない。

と書ける。$n \in \mathbb{N}$ を固定して各項の前半部分を評価すると

$$\left|\sum_{\rho\in\Phi} c_\rho \frac{n\kappa_\rho(n)}{r(\Phi)^n}\right| \geq \left|\sum_{\rho\in\Phi_{\max}} c_\rho e^{in\arg\rho}\right| - R_n$$

となる。ただし、

$$R_n := \sum_{\rho\in\Phi_{\max}} |c_\rho| \sum_{n\neq m|n} \frac{|\rho|^m}{r(\Phi)^n} + \sum_{\rho\in\Phi\setminus\Phi_{\max}} |c_\rho| \sum_{m|n} \frac{|\rho|^m}{r(\Phi)^n}$$

である。補題 5.2 より、ある自然密度が正の $N' \subset \mathbb{N}$ と $M > 0$ が存在して、任意の $n \in N'$ に対して

$$\left|\sum_{\rho\in\Phi_{\max}} c_\rho e^{in\arg\rho}\right| > M$$

が成り立つ。$R_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから、任意の $n \geq n_0$ に対して

$$R_n < \frac{M}{2} \quad \text{かつ} \quad \left|\log\left(1 - s^{-n}\right)\right| \geq \frac{1}{2|s|^n} \geq \frac{1}{2r(\Phi)^n}$$

を満たすような十分大きい $n_0 \in \mathbb{N}$ を取ることができる。これらにより、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|M_n(f)\log\left(1 - s^{-n}\right)\right| \geq \sum_{n\in N'\cap[n_0,\infty)} \frac{M}{2} \cdot \frac{r(\Phi)^n}{n} \cdot \frac{1}{2r(\Phi)^n} = \infty$$

と発散を示すことができる。 □

謝辞

本稿は 2022 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「解析的整数論とその周辺」での筆者の講演を元に作成されたものです。貴重な講演の機会を与えていただいた研究代表者の山崎義徳先生ならびに研究副代表者の安福悠先生に感謝いたします。また、講演時に有益なコメントをしていただいた赤塚広隆先生と Ade Irma Suriajaya 先生、および別の研究集会で有益なコメントをしていただいた関真一朗先生にも感謝いたします。

さらに、本稿の執筆にあたり、原稿に目を通していただき多くの有益なコメントをしていただいた共同研究者である平川義之輔さんに感謝申し上げます。また、原稿に目を通していただいた坂内健一先生にも感謝申し上げます。

本研究を行うにあたり、および本研究を発表するにあたり、JSPS 科研費 Grant Number JP22J10658 の支援を受けています。

参考文献

[1] Anton Deitmar, Shin-ya Koyama, and Nobushige Kurokawa, *Counting and zeta functions over* $\mathbb{F}_1$, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **85** (2015Apr), no. 1, 59–71.

[2] Michael E Hoffman, *Quasi-symmetric functions and mod p multiple harmonic sums*, Kyushu Journal of Mathematics **69** (2015), no. 2, 345–366.

[3] Nobushige Kurokawa and Hiroyuki Ochiai, *Dualities for absolute zeta functions and multiple gamma functions*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **89** (2013), no. 7, 75–79.

[4] Yuri Manin, *Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa)*, Astérisque **228** (1995), 121–163.

[5] Christophe Soulé, *Les Variétés sur le Corps à un Élément*, Moscow Mathematical Journal **4** (2004), no. 1, 217–244.

[6] Takuki Tomita, *The absolute Euler product representation of the absolute zeta function for a torsion free Noetherian $\mathbb{F}_1$-scheme*, Journal of Number Theory **238** (2022), 197–220.

[7] 黒川信重, 現代三角関数論, 岩波書店, 2013.

[8] ______, 絶対ゼータ関数論, 岩波書店, 2016.

[9] ______, 絶対数学原論, 現代数学社, 2016.

[10] ______, ゼータ進化論 〜究極の行列式表示を求めて〜, 現代数学社, 2021.