非加法的測度が定める Lorentz 空間の完備性

信州大学工学部　河邊　淳
Jun Kawabe
Faculty of Engineering, Shinshu University

1　はじめに

可測空間 $(X,\mathcal{A})$ 上で定義された $\mathcal{A}$-可測な実数値関数全体を $\mathcal{F}_0(X)$ で表す．また，$0<p<\infty$，$0<q\le\infty$ は定数とする．$(X,\mathcal{A})$ 上の σ-加法的測度 μ に対して，関数 $f\in\mathcal{F}_0(X)$ の Lorentz 擬セミノルムと Lorentz 空間は，それぞれ

$$\|f\|_{p,q} := \begin{cases} \left(p\displaystyle\int_0^\infty \left[t\mu(\{|f|>t\})^{1/p}\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} & \text{if } q<\infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t\mu(\{|f|>t\})^{1/p} & \text{if } q=\infty \end{cases} \tag{1}$$

$$\mathcal{L}^{p,q}(\mu) := \{f\in\mathcal{F}_0(X) \colon \|f\|_{p,q}<\infty\}$$

で定義される [2]．(1) 式の右辺は Choquet 積分と Shilkret 積分

$$\mathrm{Ch}(\mu,|f|) := \int_0^\infty \mu(\{|f|>t\}dt, \quad \mathrm{Sh}(\mu,|f|) := \sup_{t>0} t\mu(|f|>t\})$$

を用いれば

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\dfrac{p}{q}\right)^{1/q} \mathrm{Ch}(\mu^{q/p},|f|^q)^{1/q} & \text{if } q<\infty \\ \mathrm{Sh}(\mu^{1/p},|f|) & \text{if } q=\infty \end{cases} \tag{2}$$

と表せる．そこで，非加法的測度 μ に対しても (2) 式を用いて空間 $\mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ を定義し，**Choquet-Lorentz 空間** ($q<\infty$ のとき)，**Shilkret-Lorentz 空間** ($q=\infty$ のとき) とよぶ．これらの空間の完備性と可分性を議論するには，

- 汎関数 $\|\cdot\|_{p,q}$ は一般に三角不等式の類の不等式評価をもとない．
- μ が加法的であっても $\mu^{q/p}$ や $\mu^{1/p}$ は加法的でない．
- 完備性の証明で用いる可測関数列の測度収束に関する Cauchy の判定条件 (μ-測度収束に関する Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}_0(X)$ が常に μ-測度収束する) が成立するために，非加法的測度 μ に課すべき特性は何か?
- 証明ではどんなタイプの非線形積分の収束定理を用いるか?

などの問題点を解決する必要がある．この小論では，非加法的測度 μ にどんな特性を課せば，上記の問題点が解決できるかを考察した山田直貴氏との共同研究 `https://doi.org/10.1016/j.fss.2022.10.001` の一部を紹介する．

2　非加法的測度と非線形積分

以下では，$(X,\mathcal{A})$ は可測空間とする．また，$\mathbb{N}$ は自然数全体，$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ は実数全体，$\overline{\mathbb{R}}:=[-\infty,\infty]$ は通常の全順序構造と代数構造をもつ拡大実数体とし，測度論を展開する際に便利な規約 $(\pm\infty)\cdot 0=0\cdot(\pm\infty)=0$ を仮定する．また，$\inf\emptyset=\infty$ と定める．

拡大実数 $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ に対して，$\max\{a,b\}$ を $a\vee b$，$\min\{a,b\}$ を $a\wedge b$ で表し，関数 $f,g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ の上限関数 $f\vee g$ と下限関数 $f\wedge g$ を各 $x\in X$ に対して

$$(f\vee g)(x):=f(x)\vee g(x),\quad (f\wedge g)(x):=f(x)\wedge g(x)$$

で定める．また，すべての $x\in X$ に対して $f(x)\le g(x)$ が成り立つとき $f\le g$ とかく．このとき，X 上で定義された $\mathcal{A}$-可測な実数値関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ の全体を $\mathcal{F}_0(X)$ で表せば，$(\mathcal{F}_0(X),\le)$ は通常の関数の加法とスカラー倍に関して Dedekind σ-完備なベクトル束となり，その正錐は $\mathcal{F}_0^+(X):=\{f\in\mathcal{F}_0(X)\colon f\ge 0\}$ である．

集合 A の定義関数を χ_A，補集合を $A^c:=X\setminus A$ で表す．また，X の部分集合の全体を 2^X で表す．集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset 2^X$ と集合 $A\in 2^X$ に対して，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加で $A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ であることを $A_n\uparrow A$，$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少で $A=\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ であることを $A_n\downarrow A$ で表す．以下では，取り扱う集合はすべて σ-集合体 $\mathcal{A}$ に属しているとする．

定義 1　集合関数 $\mu\colon\mathcal{A}\to[0,\infty]$ は次の 2 つの条件

(i) $\mu(\emptyset)=0$　(下方有界性)

(ii) $A\subset B$ ならば $\mu(A)\le\mu(B)$　(単調性)

を満たすとき X 上の**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．特に，$\mu(X)<\infty$ のとき μ は**有限**という．

非加法的測度の研究では，取り扱う問題に応じて，加法性に代わる最小限の合理的な特性を仮定して議論する必要がある．今回の研究では以下の特性が必要となる．

定義 2　$\mu\in\mathcal{M}(X)$ とする．

(1) 任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mu(A_n)\to 0$ かつ $\mu(B_n)\to 0$ ならば $\mu(A_n\cup B_n)\to 0$ が成り立つとき，μ は**擬距離生成的** [5] という．

(2) 定数 $K\ge 1$ が存在して，互いに素な任意の A,B に対して

$$\mu(A\cup B)\le K(\mu(A)+\mu(B))$$

が成り立つとき，μ は**緩劣加法的**という．特に，$K=1$ のときは，**劣加法的**という．

(3) 任意の A と任意の単調減少列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mu(B_n)\to 0$ ならば $\mu(A\setminus B_n)\to\mu(A)$ が成り立つとき，μ は**下から単調自己連続** [19] という．

(4) 任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と A に対して，$\mu(A_n)\to\mu(A)$ が $A_n\uparrow A$ のとき成り立つならば，μ は**下から連続**という．

(5) 任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と A に対して，$\mu(A_n)\to\mu(A)$ が $A_n\downarrow A$ のとき成り立つならば，μ は**上から連続**，$A_n\downarrow A$ かつ $\mu(A_1)<\infty$ のとき成り立つならば，μ は**上から条件連続**という．特に $A=\emptyset$ のときは，μ が上から連続であることを**順序連続** [6]，上から条件連続であることを**条件順序連続**という．また，$\mu(A)=0$ のときは，μ が上から連続であることを**強順序連続** [9] という．

(6) $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=0$ が $\mu(A_n)=0\ (n=1,2,\ldots)$ を満たす任意の単調増加列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して成り立つとき，μ は**零連続** [24] という．

これらの特性の間には以下の相互関係が成り立つ．

- 劣加法的 $\Rightarrow$ 緩劣加法的 $\Rightarrow$ 擬距離生成的
- 劣加法的 $\Rightarrow$ 下から単調自己連続
- 零加法的 $+$ 下から連続 $\Rightarrow$ 下から単調自己連続
- 下から連続 $\Rightarrow$ 零連続
- 上から連続 $+$ 零加法的 $\Rightarrow$ 零連続 [1]
- 上から連続 $\Rightarrow$ 上から条件連続 $\Rightarrow$ 条件順序連続
- 上から連続 $\Rightarrow$ 順序連続

次に紹介する非線形積分は非加法的測度論の応用領域でよく利用され，どれも被積分関数 f の非加法的測度 μ に関する**減少分布関数**

$$G_\mu(f):=\mu(\{f>t\}),\quad t\in\mathbb{R}$$

を用いて定義されているので，総称して**分布型非線形積分**とよばれる．

定義 3 $(\mu,f)\in\mathcal{M}(X)\times\mathcal{F}_0^+(X)$ とする．

(1) **Choquet 積分** [3,20]: $\mathrm{Ch}(\mu,f):=\displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f>t\})\,dt$

(2) **Shilkret 積分** [21,26]: $\mathrm{Sh}(\mu,f):=\displaystyle\sup_{t>0}\big[t\cdot\mu(\{f>t\})\big]$

非加法的測度は，測度の σ-加法性をより弱い単調増加性に置き換えた集合関数であり，その積算概念である非線形積分とともに，期待効用理論，決定理論，ゲーム理論，不完全

な情報のもとでの数理経済学などの分野に多くの応用をもつ [7,8,16,22]．非加法的測度を単調測度，ファジィ測度，容量ということもある．非加法的測度と非線形積分に関する詳細な情報は [4,11,17,25] などを見よ．

3　測度収束関数列に対するコーシーの判定条件

σ-加法的測度が定める Lorentz 空間の完備性の証明では，可測関数列の測度収束に関する Cauchy の判定条件が重要な役割を果たす．この判定条件の説明の前に，可測関数列の収束に関する幾つかの定義を紹介する．以下の概念は加法性をもつ測度に対して導入されてきたが，非加法的測度に対しても何ら変更することなく定義でき，様々な場面で役立つ．

定義 4　$\mu \in \mathcal{M}(X)$，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$，$f \in \mathcal{F}_0(X)$ とする．

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **μ-測度収束**するという．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(\{|f_m - f_n| > \varepsilon\}) = 0$$

が成り立つ，すなわち，任意の $\delta > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m, n \geq n_0$ ならば

$$\mu(\{|f_m - f_n| > \varepsilon\}) < \delta$$

が成り立つとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は **μ-測度 Cauchy 列**という．

(3) $\mu(N) = 0$ となる $N \in \mathcal{A}$ が存在して，任意の $x \notin N$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

が成り立つとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に**概収束**するという．

(4) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$ を満たす $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\notin A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

が成り立つとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は f に **μ-概一様収束**するという．

可測関数列の収束概念の間に成り立つ相互関係は，非加法的測度の特性により特徴づけることができる．

命題 1　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．

(1) 次は同値である [12].

(i) μ は強順序連続である．すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と A に対して，$A_n \downarrow A$ かつ $\mu(A) = 0$ ならば，$\mu(A_n) \to 0$ が成り立つ．

(ii) μ に対して Lebesgue の定理が成り立つ．すなわち，μ-概収束する $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は同じ極限関数に μ-測度収束する．

(2) 次は同値である [23].

(i) μ は性質 (S) をもつ．すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mu(A_n) \to 0$ ならば，部分列 $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=i}^{\infty} A_{n_k}\right) = 0$$

が成り立つ．

(ii) μ に対して Riesz の定理が成り立つ．すなわち，μ-測度収束する $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は同じ極限関数に μ-概収束する部分列をもつ．

(3) 次は同値である [13, 15].

(i) μ は Egoroff 条件を満たす．すなわち，次の 2 つの条件

(a) 任意の $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$ に対して, $m \geq m'$ かつ $n \leq n'$ ならば $A_{m,n} \supset A_{m,n'}$

(b) $\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}\right) = 0$

を満たす任意の 2 重集合列 $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ に対して，

$$\inf_{\theta\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_{m,\theta(m)}\right) = 0$$

が成り立つ．

(ii) μ に対して，Egoroff の定理が成り立つ．すなわち，μ-概収束する $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は同じ極限関数に μ-概一様収束する．

(4) 次は同値である [14].

(i) μ は性質 (S_1) をもつ．すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mu(A_n) \to 0$ ならば，部分列 $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，

$$\lim_{i\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=i}^{\infty} A_{n_k}\right) = 0$$

が成り立つ．

(ii) μ-測度収束する任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は同じ極限に μ-概一様収束する部分列をもつ.

測度 Cauchy 列に関する研究もすでに進められており，以下の結果が知られている.

命題 2 ([10]) $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする.

(1) 次は同値である.

(i) μ は擬距離生成的である.

(ii) μ-測度収束する $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は μ-測度 Cauchy 列である.

(2) μ は擬距離生成的とする．μ-測度 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は，μ-測度収束する部分列をもてば，同じ極限関数に μ-測度収束する.

(3) μ は下から連続かつ擬距離生成的とする．任意の μ-測度 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は μ-概一様収束する部分列をもつ.

(4) μ は下から連続かつ擬距離生成的とする．任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ に対して，次は同値である.

(i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は μ-測度 Cauchy 列である.

(ii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は μ-測度収束する.

命題 2 の (1) と (4) より，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の μ-測度収束性を μ-測度 Cauchy 性で判定するには，μ は少なくとも擬距離生成的でなければならない．そこで今回の研究では，命題 2 の (4) における μ の下からの連続性をどの程度弱められるかを考察する．そのために，新たに次の概念を導入する.

定義 5 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．任意の集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して，

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{l\in\mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{k+l} A_n\right) = 0$$

ならば

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) = 0$$

が成り立つとき，μ は**性質 (C)** をもつという.

定義から直ちに，下から連続な非加法的測度は常に性質 (C) をもつ．しかも，次の命題が示すように，それ以外にも性質 (C) をもつものは数多くある.

命題 3　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．

(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，どんな単調増加集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対しても

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \delta \;\Rightarrow\; \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \varepsilon \tag{$*$}$$

が成り立つならば，μ は性質 (C) をもつ．特に，定数 $M \geq 1$ が存在して，どんな単調増加集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対しても

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq M \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

が成り立つならば，μ は性質 (C) をもつ．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，どんな集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対しても条件 $(*)$ が成り立つならば，μ は擬距離生成的で性質 (C) をもつ．

(3) $\lambda \in \mathcal{M}(X)$ とする．関数 $\theta\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ は単調増加で $\theta(0) = 0$ を満たし，原点の近傍で連続かつ狭義単調増加とする．非加法的測度 $\theta \circ \lambda\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ を

$$\theta \circ \lambda(A) := \theta(\lambda(A)), \quad A \in \mathcal{A}$$

で定義する．このとき，λ が下から連続かつ擬距離生成的ならば，$\theta \circ \lambda$ は擬距離生成的で性質 (C) をもつ．

(4) 関係式

$$\inf_{A\neq\emptyset} \mu(A) > 0$$

を満たすどんな非加法的測度 μ も擬距離生成的で性質 (C) をもつ．

命題 3 の (1) の仮定が単調増加とは限らない任意の集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して成り立つとき，非加法的測度 μ は性質 (C_1) をもつということにすれば，明らかに

下からの連続性 $\Rightarrow$ 性質 (C);　性質 (C_1) $\Rightarrow$ 性質 (C)+ 擬距離生成性

が成り立つ．しかし，次の例が示すように，逆向きの含意は一般には成立しない．

例 1　$X := \mathbb{N}$，$\mathcal{A} := 2^{\mathbb{N}}$ とする．非加法的測度 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ を

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{if } A = X \\ 1/2 & \text{if } \emptyset \subsetneq A \subsetneq X \\ 0 & \text{if } A = \emptyset \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A})$$

で定めると，μ は零連続，擬距離生成的で性質 (C) をもつが，下から連続でない．さらに，

任意の集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq 2\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

が成り立つので，μ は性質 (C_1) を満たす．これより，下からの連続性は性質 (C) と擬距離生成性の組み合わせから導けないし，性質 (C_1) からも導けないことがわかる．

例 2　$\nu \in \mathcal{M}(X)$ とする．ν は下から連続かつ劣加法的とする．非加法的測度 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ を

$$\mu(A) := \begin{cases} \nu(A) & \text{if } \nu(A) < 1 \\ 1+\nu(A) & \text{if } \nu(A) \geq 1 \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{A})$$

で定めると，μ は零連続，擬距離生成的で性質 (C) をもつが，下から連続でない．さらに，ν が $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度のときは，μ は性質 (C_1) をもたない．実際，任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\delta_0 := \frac{1\wedge\delta}{2} > 0, \quad A_n := [(n-1)\delta_0, n\delta_0] \ \ (n = 1, 2, \ldots)$$

とおくと，$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \delta$ であるが，$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$ となる．これは，性質 (C) と擬距離生成性の組み合わせの方が，性質 (C_1) より真に弱い条件であることを示している．

非加法的測度に対して，擬距離生成性と性質 (C) を仮定すれば，可測関数列の測度収束に関して Cauchy の判定条件が成り立つ．

定理 1　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．μ が擬距離生成的で性質 (C) をもつならば，μ-測度 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は μ-概一様収束する部分列をもつ．

定理 2　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．μ は擬距離生成的で性質 (C) をもつとする．このとき，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ に対して，次は同値である．

(i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は μ-測度 Cauchy 列である．

(ii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は μ-測度収束する．

(iii) 関数 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ が存在して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のどんな部分列も f に μ-概一様収束するさらなる部分列をもつ．

(iv) 関数 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ が存在して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ のどんな部分列も f に μ-測度収束するさらなる部分列をもつ．

次の例は，定理 1 や定理 2 では性質 (C) を取り除けないことを示している．

例 3 $X := \mathbb{N}$，$\mathcal{A} := 2^{\mathbb{N}}$ とする．非加法的測度 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,2]$ を

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{if } A = \emptyset \\ \sum_{i \in A} 1/2^i & \text{if } A \text{ は } \mathbb{N} \text{ の空でない有限集合} \\ 1 + \sum_{i \in A} 1/2^i & \text{if } A \text{ は } \mathbb{N} \text{ の無限集合} \end{cases}$$

で定める．このとき，以下が成り立つ．

(1) μ は劣加法的 (それゆえ擬距離生成的) かつ零連続で，性質 (S) をもつ．

(2) μ は下から連続でも，順序連続でもない．

(3) μ は性質 (C) をもたない．

(4) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n := \{1, 2, \ldots, n\}$，$f_n := \chi_{A_n}$ とおく．このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は μ-測度 Cauchy 列であるが，μ-測度収束しないし，μ-測度収束する部分列ももとない．

(5) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n := \{n\}^c$，$f_n := \chi_{A_n}$ とおく．このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は μ-測度 Cauchy 列で，定数関数 1 に μ-測度収束するが，μ-概一様収束する部分列をもとない．

定理 2 より，擬距離生成的な非加法的測度 μ が性質 (C) をもてば，μ-測度収束に関する Cauchy の判定条件が成り立つことがわかる．特に，X が可算集合であれば，零連続かつ擬距離生成的な非加法的測度 μ が性質 (C) をもつことと，μ-測度収束に関する Cauchy の判定条件の成立性は同値となる．

定理 3 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．μ は擬距離生成的とする．X が可算集合ならば，次は同値である．

(i) μ は性質 (C) をもつ．

(ii) 任意の μ-測度 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は μ-概一様収束する部分列をもつ．

(iii) μ は零連続で，任意の μ-測度 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は μ-測度収束する部分列をもつ．

(iv) μ は零連続で，任意の μ-測度 Cauchy 列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0(X)$ は μ-測度収束する．

問題 1 定理 2 より，非加法的測度 μ が擬距離生成的で性質 (C) をもつことが，μ-測度収束に関して Cauchy の判定条件が成立するための十分条件であることはわかるが，必要条件になっているかは未だ不明である．それゆえ，測度収束に関する Cauchy の判定条件の成立性を非加法的測度 μ の特性で完全に特徴づけることは，解決すべき問題の一つである．

4　Choquet-Lorentz 空間と Shilkret-Lorentz 空間の完備性

σ-加法的測度が定める Lorentz 空間の完備性の証明では，Lebesgue 積分に関する Fatou の補題が重要な役割を果たしている．そこでまず，Choquet 積分と Shilkret 積分に関して Fatou の補題を定式化する．

命題 4　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次は同値である．

(i) μ は下から単調自己連続である．

(ii) μ-概一様収束と Choquet 積分に関して Fatou の補題が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に μ-概一様収束すれば，

$$\mathrm{Ch}(\mu, f) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Ch}(\mu, f_n)$$

が成り立つ．

(iii) μ-概一様収束と Shilkret 積分に関して Fatou の補題が成り立つ．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_0^+(X)$ と $f \in \mathcal{F}_0^+(X)$ に対して，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が f に μ-概一様収束すれば，

$$\mathrm{Sh}(\mu, f) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Sh}(\mu, f_n)$$

が成り立つ．

定理 1 と命題 4 で得られた Fatou の補題を用いて次の完備性定理が示せる．

定理 4　μ は下から単調自己連続とする．このとき，μ が擬距離生成的で性質 (C) をもてば，$(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は準完備，すなわち，任意の $\|\cdot\|_{p,q}$-有界な Cauchy 列は収束する．特に，μ が緩劣加法的で性質 (C) をもてば，$(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は完備擬セミノルム空間となる．

注意 1　汎関数 $\|\cdot\|_{p,q}$ は一般には三角不等式の類の不等式評価をもたないので，$\|\cdot\|_{p,q}$ に関する Cauchy 列は必ずしも $\|\cdot\|_{p,q}$-有界とは限らない．

次の例は，定理 4 では性質 (C) の仮定を取り除けないことを示している．

例 4　$X := \mathbb{N}$, $\mathcal{A} := 2^{\mathbb{N}}$ とする．μ は例 3 で定めた非加法的測度とする．このとき，μ は劣加法的 (それゆえ緩劣加法的かつ擬距離生成的) で下から単調自己連続であるが，性質 (C) をもたない．各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$A_n := \{1, 2, \ldots, n\}$，$f_n := \chi_{A_n}$ とおくと，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は

μ-測度収束しない．ところが，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|f_n\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\dfrac{p}{q}\right)^{1/q} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\right)^{1/p} & (q < \infty) \\ \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}\right)^{1/p} & (q = \infty) \end{cases}$$

$$\|f_{n+l} - f_n\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\dfrac{p}{q}\right)^{1/q} \left(\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+l} \frac{1}{2^i}\right)^{1/p} & (q < \infty) \\ \left(\displaystyle\sum_{i=n+1}^{n+l} \frac{1}{2^i}\right)^{1/p} & (q = \infty) \end{cases}$$

が成り立つので，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ は $\|\cdot\|_{p,q}$-有界な Cauchy 列となる．$\mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ が準完備であると仮定すると，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\|\cdot\|_{p,q}$ に関して収束するので，μ-測度収束し，矛盾が生じる．よって，$\mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ は準完備でない．

5　Choquet-Lorentz 空間の可分性

非加法的測度 μ が定める Choquet-Lorentz 空間の稠密集合と可分性に関しては次の結果が得られている．X 上で定義された $\mathcal{A}$-可測な単関数 (すなわち，有限個の値をとる $\mathcal{A}$-可測な実数値関数) 全体を $\mathcal{S}(X)$ で表す．

定理 5　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．μ は条件順序連続ならば，$\mathcal{S}(X) \cap \mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ は $(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ で稠密である．

定理 6　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．μ は条件順序連続かつ緩劣加法的とする．このとき，次は同値である．

(i) μ は有限な μ-測度をもつ $\mathcal{A}$-可測集合からなる可算基底をもつ．すなわち，μ-測度が有限な $\mathcal{A}$-可測集合からなる可算集合族 $\mathcal{D}$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$\mu(A \triangle D) < \varepsilon$ を満たす $D \in \mathcal{D}$ が存在する．

(ii) $(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は可分である．すなわち，可算関数族 $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ が存在して，任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $f \in \mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ に対して，$\|f - g\|_{p,q} < \varepsilon$ を満たす $g \in \mathcal{E}$ が存在する．

一方，Shilkret-Lorentz 空間では，$\mathcal{S}(X) \cap \mathcal{L}^{1,\infty}(\mu)$ は $(\mathcal{L}^{1,\infty}(\mu), \|\cdot\|_{1,\infty})$ で稠密ではない．

例 5 $X := (0,1]$, $\mathcal{A}$ は $(0,1]$ の Borel 集合からなる σ-集合体とする．$\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度を λ とする．各 $x \in X$ に対して $f(x) := 1/x$ とおくと，$f \in \mathcal{L}^{1,\infty}(\lambda)$, $\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{L}^{1,\infty}(\lambda)$ となる．ところが，どんな $h \in \mathcal{S}(X)$ に対しても $\|f-h\|_{1,\infty} \geq 1$ が成り立つので，単関数全体 $\mathcal{S}(X)$ は $(\mathcal{L}^{1,\infty}(\lambda), \|\cdot\|_{1,\infty})$ で稠密でない．

6 Choquet-Lorentz 空間と Choquet L^p 空間の関係性

関数 $f \in \mathcal{F}_0(X)$ と非加法的測度 μ に対して，

$$|f|_{\mu,q} = |f:\mu|_q := \mathrm{Ch}(\mu, |f|^q)^{1/q}, \quad (f)_{\mu,1} = (f:\mu)_1 := \mathrm{Sh}(\mu, |f|)$$

を用いて，Choquet-L^q 空間 $(\mathcal{L}^q_{\mathrm{Ch}}(\mu), |\cdot|_{\mu,q})$ と Shilkret-L^1 空間 $(\mathcal{L}^1_{\mathrm{Sh}}(\mu), (\cdot)_{\mu,1})$ を定める．このとき，

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} (p/q)^{1/q}\, |f:\mu^{q/p}|_q & \text{if } q < \infty, \\ (f:\mu^{1/p})_1 & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

なので，非加法的測度 μ が定める Choquet-Lorentz 空間 $(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は，非加法的測度 $\mu^{q/p}$ が定める Choquet-L^q 空間 $(\mathcal{L}^q_{\mathrm{Ch}}(\mu^{q/p}), |\cdot|_{\mu^{q/p},q})$ と同一視でき，非加法的測度 μ が定める Shilkret-Lorentz 空間 $(\mathcal{L}^{1,\infty}(\mu), \|\cdot\|_{1,\infty})$ は，非加法的測度 $\mu^{1/p}$ が定める Shilkret-L^1 空間 $(\mathcal{L}^1_{\mathrm{Sh}}(\mu^{1/p}), (\cdot)_{\mu^{1/p},1})$ と一致する．この事実は，非加法的測度論の枠組みで Lorentz 空間を定式化することにより，Choquet-L^p 空間や Shilkret-L^1 空間の性質から Choquet-Lorentz 空間や Shilkret-Lorentz 空間の多くの性質が導けることを意味しており，今後の研究の深化を期待できる．

参考文献

[1] S. Asahina, K. Uchino, T. Murofushi, Relationship among continuity conditions and null-additivity conditions in non-additive measure theory, Fuzzy Sets Syst. 157 (2006) 691–698.

[2] R.E. Castillo, H. Rafeiro, An Introductory Course in Lebesgue Spaces, Springer, Switzerland, 2016.

[3] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 5 (1953–54) 131–295.

[4] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[5] I. Dobrakov, J. Farková, On submeasures II, Math. Slovaca 30 (1980) 65–81.

[6] L. Drewnowski, Topological rings of sets, continuous set functions, integration I, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972) 269–276.

[7] M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno (eds.), Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications, Stud. Fuzziness Soft Comput. 40, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[8] M. Grabisch, Set Functions, Games and Capacities in Decision Making, Springer, Switzerland, 2016.

[9] Q.S. Jiang, G.J. Klir, Z.Y. Wang, Null-additive fuzzy measures on S-compact spaces, Int. J. Gen. Syst. 25 (1996) 219–228.

[10] Q.S. Jiang, H. Suzuki, Z.Y. Wang, G.J. Klir, J. Li, M. Yasuda, Property (p.g.p.) of fuzzy measures and convergence in measure, J. Fuzzy Math. 3 (1995) 699-710.

[11] J. Kawabe, Nonadditive measures and nonlinear integrals, Sugaku Exp. 34 (2021) 61–92.

[12] J. Li, Order continuous of monotone set function and convergence of measurable function sequence, Appl. Math. Comput. 135 (2003) 211–218.

[13] J. Li, A further investigation for Egoroff's theorem with respect to monotone set functions, Kybernetika (Prague) 39 (2003) 753–760.

[14] Y.K. Liu, B. Liu, The relationship between structural characteristics of fuzzy measure and convergences of sequences of measurable functions, Fuzzy Sets Syst. 120 (2001) 511–516.

[15] T. Murofushi, K. Uchino, S. Asahina, Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory, Fuzzy Sets Syst. 146 (2004) 135–146.

[16] K.G. Nishimura, H. Ozaki, Economics of Pessimism and Optimism, Springer, Japan, 2017.

[17] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1995.

[18] D. Ralescu, G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980) 562–570.

[19] Y. Rébillé, Autocontinuity and convergence theorems for the Choquet integral, Fuzzy Sets Syst. 194 (2012) 52–65.

[20] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, Proc. Am. Math. Soc. 97 (1986) 255–261.

[21] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math. 33 (1971) 109–116.

[22] M. Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph.D. Dissertation, Tokyo Inst. of Tech., Tokyo, 1974.

[23] Q.H. Sun, Property (S) of fuzzy measure and Riesz's theorem, Fuzzy Sets Syst. 62 (1994) 117–119.

[24] K. Uchino, T. Murofushi, Relations between mathematical properties of fuzzy measures, Proceedings of the 10th International Fuzzy Systems Association World Congress, Istanbul, 2003, pp. 27–30.

[25] Z.Y. Wang, G.J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, New York, 2009.

[26] Ru Huai Zhao, (N) fuzzy integral, J. Math. Res. Exposition 1 (1981) 55–72 (in Chinese).

Jun Kawabe
Faculty of Engineering, Shinshu University
4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, JAPAN
jkawabe@shinshu-u.ac.jp