場の量子論における正値性
～シュレディンガー表現とフォック表現～

By

廣島 文生 *
九大・数理

Abstract

ネルソン模型 H([12]) は場の理論の典型的な模型の一つである．ポテンシャルが $V=0$ のとき, H は全運動量作用素と可換になり, $H=\int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} H(P)dP$ と直和分解される．全運動量 $P\in\mathbb{R}^d$ をパラメターとする並行移動不変ネルソン模型 $H(P)$ から生成される熱半群 $e^{-TH(P)}$ が $F\geq 0$, $G\geq 0$ に対して $(F, e^{-TH(P)}G)\gtrsim 0$ となるとき正値改良型作用素という．フォック表現のファインマン・カッツ公式を使って, $e^{-TH(P)}$ の正値改良性を示す．

§1. はじめに

京都大学数理解析研究所共同利用で開催された研究会

「関数空間論とその周辺」(2023/2/13-15)

で講演する機会を得た．松岡勝男先生からの突然のお誘いで少し驚いた．３回の講演で, １回目は「ヒルベルト空間の命名とその後～フォン・ノイマンの時代 ～」というタイトルで講演し, ２, ３回目は「場の量子論における正値性 シュレディンガー表現とフォック表現 」というタイトルで講演した．しかし, ２, 3回目の講演はうまく話すことができず, 主催者の大和田智義先生, 松岡勝男先生の期待に応えられなかったと後悔している．この小論文では, ２, ３回目の講演をまとめた．１回目の講演については拙著 [14, 15, 16] をご覧いただきたい．本研究会のタイトルにある「関数空間論」とう言葉に引きずられて, 場の理論にあるフォック表現とシュレディンガー表現について講演しようと決めた．両表現は同値であるが, ある種の正値性を議論するときにはどちらの表現を採用するかは非自明

2010 Mathematics Subject Classification(s): Q81S40
Key Words: 正値改良型作用素, フォック表現, シュレディンガー表現
この研究は基盤研究 (B) 課題番号 20H01808 の支援を受けています．

*この小論文を日本大学経済学部教授 松岡勝男先生の古希のお祝いに捧げます．本研究期間中に松岡先生が古希を迎えられた．このような機会を共有できたことに感激しています．松岡先生の更なるご活躍を心から祈念し, ますますのご健康とご繁栄をお祈り申し上げます．

になる．多くの場合はシュレディンガー表現を採用する．その結果, 非自明な正値改良性を示すことができる．例えば, [3] ではスピン・ボゾン模型の正値改良性を示し, [4, 6] ではパウリ・フィールツ模型の正値改良性を示すことができた．また, [10] ではくりこんだネルソン模型の正値改良性が証明されている．筆者は長く, ここに登場する $e^{-tH(P)}$ の正値改良性に興味があった．最近, [11, 9] が $e^{-tH(P)}$ の正値改良性を独立に証明した．この結果に触発され, 心を入れ換え改めて証明方法を吟味した．その結果, シュレディンガー表現にこだわっていたために, うまくいかなかったことに気が付き, フォック表現を採用すれば証明できることに気がついた．

§2.　場の量子論の基本的な設定

§2.1.　フォック表現

$L^2(\mathbb{R})$ の調和振動子を考える．$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right)$, $a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right)$ とする．$\phi_0(x) = \pi^{-1/4}e^{-|x|^2/2}$ とすれば, $\|\phi_0\| = 1$ かつ $a\phi_0 = 0$ を満たす．さらに $[a, a^*] = \mathbb{1}$ を満たす．

$$h = a^* a$$

は調和振動子と呼ばれる．$\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}\underbrace{a^* \cdots a^*}_{n}\phi_0$ は $(\phi_n, \phi_m) = \delta_{nm}$ を満たし, 交換関係から $h\phi_n = n\phi_n$ となる．そこで, $F_n = \{\phi_n\}$ とすれば,

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} F_n$$

という分解が導かれ, $a : F_n \to F_{n-1}$, $a^* : F_n \to F_{n+1}$, $h : F_n \to F_n$ となる．また, $h + a^* + a$ とする．そうすると

$$\begin{aligned} h + a^* + a &= -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{2}x \\ &= -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}(x + \sqrt{2})^2 - \frac{3}{2} \\ &\cong -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

になる．これは, 対称な摂動 $a^* + a$ を加えることによって基底状態エネルギーが下がったことを意味する．ここで紹介するネルソン模型は, この調和振動子の無限自由度版というべきものである．

準備から始める．参考文献として [8, Chapter 1] および [13] をあげる．場の量子論で使う基本的な概念を説明する．$\mathcal{W}$ をヒルベルト空間とし, $\otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{W}$ は $\mathcal{W}$ の n-重対称テンソル積を表す．$\mathcal{F}^{(n)} = \mathcal{F}^{(n)}(\mathcal{W}) = \otimes_{\mathrm{s}}^n \mathcal{W}$, $\otimes_{\mathrm{s}}^0 \mathcal{W} = \mathbb{C}$ として, 無限直和空間

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{W}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(\mathcal{W})$$

を考える．ここにスカラー積を次で定める．

$$(\Psi,\Phi)_{\mathcal{F}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\Psi^{(n)},\Phi^{(n)})_{\mathcal{F}^{(n)}}$$

$(\mathcal{F}(\mathcal{W}),(\cdot,\cdot)_{\mathcal{F}(\mathcal{W})})$ は $\mathcal{W}$ 上の ボゾン・フォック空間といわれるヒルベルト空間である．フォック空間 $\mathcal{F}$ は $(\Psi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で $\Psi^{(n)}\in\mathcal{F}^{(n)}$ かつ $\|\Psi\|_{\mathcal{F}}^2=\sum_{n=0}^{\infty}\|\Psi^{(n)}\|_{\mathcal{F}^{(n)}}^2<\infty$ となるものと同一視される．$\Omega=(1,0,0,...)$ はフォック真空とよばれる．生成・消滅作用素という $\mathcal{F}$ 上の閉作用素を定義しよう．それは $a^*(f)$, $a(f)$ と表され,

$$\begin{aligned}&(a^*(f)\Psi)^{(n)}=\sqrt{n}S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)}),n\geq 1,\\&(a^*(f)\Psi)^{(0)}=0\end{aligned}$$

で定義される．S_n は対称化作用素である．これらは可閉作用素でその閉包も同じ記号で書く．さらに $a(f)=(a^*(\bar{f}))^*$ とする．$D\subset\mathcal{W}$ を稠密な部分集合とすれば

$$\mathrm{L.H.}\{a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega,\Omega|\,f_j\in D,j=1,..,n,n\geq 1\}$$

も稠密になる．つまり, 真空に生成作用素を作用させてボゾン・フォック空間全体を張ることができる．

$$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}=\left\{(\Psi^{(n)})_{n\geq 0}\in\mathcal{F}\,\middle|\,\exists M\ s.t.\ \Psi^{(m)}=0\ \forall m\geq M\right\}$$

は有限粒子部分空間といわれる．a,a^* は $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ を不変にし, $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ 上で正準交換関係

$$[a(f),a^*(g)]=(\bar{f},g)\mathbb{1},\quad[a(f),a(g)]=0,\quad[a^*(f),a^*(g)]=0$$

をみたす．T を $\mathcal{W}$ 上の縮小作用素とする．T の第 2 量子化 $\Gamma(T)$ を

$$\Gamma(T)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}(\otimes^n T)$$

で定義する．ここで $\otimes^0 T=\mathbb{1}$. $\Gamma(T)$ も $\mathcal{F}$ 上の縮小作用素になる．ゆえに, Γ は $\mathcal{W}$ 上の縮小作用素を $\mathcal{F}$ 上の縮小作用素へ移すファンクターになっている．

自己共役作用素 h に対して $\{\Gamma(e^{ith}):t\in\mathbb{R}\}$ は $\mathcal{F}$ 上の強連続 1 径数ユニタリー群になる．ストーンの定理 により一意的な自己共役作用素 $d\Gamma(h)$ で

$$\Gamma(e^{ith})=e^{itd\Gamma(h)},\quad t\in\mathbb{R},$$

となるものが存在する．これも h の第 2 量子化という．$d\Gamma(h)=-i\dfrac{d}{dt}\Gamma(e^{ith})\lceil_{t=0}$ だから

$$d\Gamma(h)\Omega=0,\quad d\Gamma(h)a^*(f_1)\cdots a^*(f_n)\Omega=\sum_{j=1}^{n}a^*(f_1)\cdots a^*(hf_j)\cdots a^*(f_n)\Omega.$$

$a^\sharp(f)$ は非有界作用素である．そこで有用な不等式を紹介する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H} \arrow[r, "T"] \arrow[d, dotted] & \mathcal{H} \arrow[d, dotted] \\
\mathcal{F}(\mathcal{H}) \arrow[r, "\Gamma(T)"'] & \mathcal{F}(\mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

Figure 1. ファンクター Γ

命題 2.1. h は正の自己共役作用素, $f \in D(h^{-1/2})$, $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{1/2})$ とする．このとき $\Psi \in D(a^\sharp(f))$ かつ

$$\|a(f)\Psi\| \le \|h^{-1/2}f\|\|d\Gamma(h)^{1/2}\Psi\|,$$
$$\|a^*(f)\Psi\| \le \|h^{-1/2}f\|\|d\Gamma(h)^{1/2}\Psi\| + \|f\|\|\Psi\|.$$

特に $f \in D(h^{-1/2})$ のとき $D(d\Gamma(h)^{1/2}) \subset D(a^\sharp(f))$.

最後に第 2 量子化作用素と生成・消滅作用素の交換関係を与えておく．

$$[d\Gamma(h), a^*(f)]\Psi = a^*(hf)\Psi, \quad [d\Gamma(h), a(f)]\Psi = -a(JhJf)\Psi.$$

ここで $Jf = \bar{f}$, $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{3/2}) \cap \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$. これは極限操作により $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{3/2})$ まで拡張できる．$a^\sharp$ から作られる対称作用素は次のものがある．シーガル場 $\Phi(f)$ は

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(f) + a(\bar{f}))$$

で定義される．またその共役運動量作用素は

$$\Pi(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^*(f) - a(\bar{f}))$$

で定義される．すぐに

$$[\Phi(f), \Pi(g)] = i\mathrm{Re}(f,g), \quad [\Phi(f), \Phi(g)] = i\mathrm{Im}(f,g), \quad [\Pi(f), \Pi(g)] = i\mathrm{Im}(f,g)$$

がわかる．$\Phi(f)$ と $\Pi(g)$ はともに $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ 上本質的自己共役作用素である．その閉包も同じ記号で表す．心の中で, $\Phi(f) \sim x$, $\Pi(g) \sim -id_x$ と思っている．ウイック積 $:\prod_{i=1}^n \Phi(f_i):$ は帰納的に

$$:\Phi(f): := \Phi(f),$$
$$:\Phi(f)\prod_{i=1}^n \Phi(f_i): := \Phi(f) :\prod_{i=1}^n \Phi(f_i): - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (f, f_j) :\prod_{i\ne j} \Phi(f_i):$$

で定義される．すぐに

$$:\Phi(f)^n := \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!}\Phi(f)^{n-2k}\left(-\frac{1}{4}\|f\|^2\right)^k$$

がわかる．また次も成り立つ．

$$\Phi(f)^n = n!\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{l+m+2k=n}\frac{(\frac{\|f\|^2}{4})^k}{k!}\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}a^*(f))^l}{l!}\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}a(\bar{f}))^m}{m!}.$$

さらに

$$:e^{\alpha\Phi(f)}:\Omega = e^{-(1/4)\alpha^2\|f\|^2}e^{\alpha\Phi(f)}\Omega.$$

実は,

$$e^{\alpha\Phi(f)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l+m+2k=n}\frac{(\alpha\frac{\|f\|^2}{4})^k}{k!}\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}a^*(f))^l}{l!}\frac{(\frac{1}{\sqrt{2}}a(\bar{f}))^m}{m!} \tag{2.1}$$

が適当な定義域で成り立つ．この等式は非常に有用な等式である．

§2.2.　シュレディンガー表現

確率空間 $(\mathcal{Q},\Sigma,\mu)$ 上の実ベクトル空間 $\mathscr{E}$ を指数にもつガウス型確率変数について考える．

定義 2.2. (**ガウス超過程**) $\phi(f)$, $f\in\mathscr{E}$, が確率空間 $(\mathcal{Q},\Sigma,\mu)$ 上の $\mathscr{E}$ を指数にもつガウス超過程であるとは次を満たすことである．

(1) $\phi(f)$ は $(\mathcal{Q},\Sigma,\mu)$ 上のガウス過程で平均ゼロ, 共分散が $\int\phi(f)\phi(g)d\mu = \frac{1}{2}(f,g)_{\mathscr{E}}$.

(2) $\phi(\alpha f+\beta g) = \alpha\phi(f)+\beta\phi(g)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(3) Σ は $\{\phi(f)\mid f\in\mathscr{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

ガウス超過程の存在は知られている．$L^2(\mathcal{Q}) = L^2(\mathcal{Q},\Sigma,\mu)$ とおく．$\mathscr{E}$ を実ヒルベルト空間とする．$L^2(\mathcal{Q})$ と $\mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ はユニタリー同値になることが知られている．ここで $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ は複素ヒルベルト空間で $\mathscr{E}$ の複素化である．これを以下でみよう．フォック空間のウイック積と同様に $L^2(\mathcal{Q})$ 上の ウイック 積を定義する．部分空間を

$$L_n^2(\mathcal{Q}) = \overline{\mathrm{L.H.}\left\{:\prod_{i=1}^n\phi(f_i):\,\middle|\, f_i\in\mathscr{E}, i=1,...,n\right\}},$$

$$L_0^2(\mathcal{Q}) = \mathrm{L.H.}\{\mathbb{1}\}$$

としよう．このとき $L^2_m(\mathcal{Q}) \perp L^2_n(\mathcal{Q})$ $(n \neq m)$ がわかる．

$$L^2(\mathcal{Q}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_n(\mathcal{Q})$$

は Wiener-Itô 分解として知られている. $\mathcal{U} : \mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) \to L^2(\mathcal{Q})$ を

$$\mathcal{U} : \prod_{i=1}^n \Phi(f_i) : \Omega =: \prod_{i=1}^n \phi(f_i) :, \quad f_1, ..., f_n \in \mathscr{E}, \quad \mathcal{U}\Omega = \mathbb{1}$$

で定める．

命題 2.3. (**Wiener-Itô-Segal 同型**) $\mathcal{U} : \mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) \to L^2(\mathcal{Q})$ は次を満たす*:*

(1) $\mathcal{U}\Omega = \mathbb{1}$,

(2) $\mathcal{U}\mathcal{F}^{(n)}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) = L^2_n(\mathcal{Q})$,

(3) $f \in \mathscr{E}$ のとき $\mathcal{U}\Phi(f)\mathcal{U}^{-1} = \phi(f)$.

これで, $\mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ と $L^2(\mathcal{Q})$ が同型になることがわかった．次に, $T : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ を縮小作用素とし, $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ 上の縮小作用素に拡張しておく．

$$\mathcal{U}\Gamma(T)\mathcal{U}^{-1} : L^2(\mathcal{Q}) \to L^2(\mathcal{Q})$$

も $L^2(\mathcal{Q})$ 上の第 2 量子化作用素とよばれ, 簡単に $\Gamma(T)$ と書くことにする．すぐに

$$\Gamma(T) : \prod_{i=1}^n \Phi(f_i) :=: \prod_{i=1}^n \phi(Tf_i) : \quad \Gamma(T)\mathbb{1} = \mathbb{1}$$

がわかる．さらに自己共役作用素 h に対して $\mathcal{U}d\Gamma(h)\mathcal{U}^{-1}$ も混乱しない限りは簡単に $d\Gamma(h)$ と書くことにする．もちろん, 次が成り立つ．

$$d\Gamma(h)\mathbb{1} = 0 \quad d\Gamma(h) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) := \sum_{j=1}^n : \phi(f_1) \cdots \phi(hf_j) \cdots \phi(f_n) : .$$

次の命題は重要である．

命題 2.4. (**正値保存性**) T を実ヒルベルト空間 $\mathscr{E}$ 上の縮小作用素とする．このとき $\Gamma(T)$ は $L^2(\mathcal{Q})$ 上の正値保存作用素になる*.*

証明: $\Gamma(T) : \exp(\alpha\phi(f)) :=: \exp(\alpha\phi(Tf)) :$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して成立する. よって

$$\Gamma(T)e^{\alpha\phi(f)} =: e^{\alpha\phi(Tf)} : e^{\frac{1}{4}\alpha^2\|f\|^2} = e^{\alpha\phi(Tf)}e^{\frac{1}{4}\alpha^2(f,(1-T^*T)f)}$$

となる. $F \in \mathscr{S}$ として, $F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))$ に対しては,

$$\begin{aligned}&\Gamma(T)F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n))\\&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{F}(\vec{k}) e^{-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n (f_i,(1-T^*T)f_j)k_i k_j} e^{i\sum_{j=1}^n k_j \phi(Tf_j)} d\vec{k}.\end{aligned}$$

$\|T\| \leq 1$ なので, $\{(f_i, (1-T^*T)f_j)\}_{i,j}$ は正定値. よって F とガウス核 D_T のたたみこみで

$$\Gamma(T)F(\phi(f_1), \cdots, \phi(f_n)) = (2\pi)^{-n/2}(F * D_T)(\phi(Tf_1), \cdots, \phi(Tf_n))$$

と表せる. これから $F \geq 0$ は $\Gamma(T)F \geq 0$ を意味する. $\Psi \in L^2(\mathcal{Q})$ を非負としよう. $F_n \in \mathscr{S}_{\mathcal{Q}}$ で $0 \leq F_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$ となる列が存在するので極限操作により命題が従う. □

§3. スカラー場と FKN 公式

§3.1. スカラー場

具体的な模型を考える. $\mathcal{W} = L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき $\mathcal{F}^{(n)}$ は $L^2(\mathbb{R}^{dn})$ 上の対称関数の全体 $\{f \in L^2(\mathbb{R}^{dn}) | f(k_1, \ldots, k_n) = f(k_{\pi(1)}, \ldots, k_{\pi(n)}), \forall \pi \in \wp_n\}$ と同一視できる. 生成・消滅作用素は

$$\begin{aligned}&(a(f)\Psi)^{(n)}(k_1, ..., k_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^d} f(k)\Psi^{(n+1)}(k, k_1, ..., k_n) dk,\ n \geq 0,\\&(a^*(f)\Psi)^{(n)}(k_1, ..., k_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n f(k_j)\Psi^{(n-1)}(k_1, ..., \hat{k}_j, ..., k_n),\ n \geq 1,\\&(a^*(f)\Psi)^{(0)} = 0\end{aligned}$$

となる. $\omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ はかけ算作用素で, 次で定義される.

$$\omega(k) = \sqrt{|k|^2 + m^2}, \quad k \in \mathbb{R}^d. \tag{3.1}$$

ここで $m \geq 0$ はボゾンの質量を表す. 物理的には, $\sqrt{|k|^2 + m^2}$ は運動量 k のボゾンの相対論的なエネルギーを表す. その第 2 量子化作用素は

$$(d\Gamma(\omega)\Psi)^{(n)}(k_1, ..., k_n) = \left(\sum_{j=1}^n \omega(k_j)\right)\Psi^{(n)}(k_1, ..., k_n)$$

となる. $d\Gamma(\omega)$ は自由ハミルトニアンといわれ,

$$H_{\mathrm{f}} = d\Gamma(\omega) \tag{3.2}$$

とおく．運動量作用素 P_{f} は次で定義する．

$$P_{\mathrm{f}} = d\Gamma(k) \tag{3.3}$$

H_{f}, P_{f} は共に粒子数を不変にする．つまり, $L^2(\mathbb{R}^{dn})$ をそれ自身に移す．交換関係は

$$[H_{\mathrm{f}}, a(f)] = -a(\omega f), \quad [H_{\mathrm{f}}, a^*(f)] = a^*(\omega f)$$
$$[P_{\mathrm{f}\mu}, a(f)] = -a(k_\mu f), \quad [P_{\mathrm{f}\mu}, a^*(f)] = a^*(k_\mu f)$$

もし $f/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば次の不等式

$$\|a(f)\Psi\| \le \|f/\sqrt{\omega}\|\|H_{\mathrm{f}}^{1/2}\Psi\|,$$
$$\|a^*(f)\Psi\| \le \|f/\sqrt{\omega}\|\|H_{\mathrm{f}}^{1/2}\Psi\| + \|f\|\|\Psi\|$$

が成り立つ．以降, 形式的な表記 $a^\sharp(f) = \int a^*(k)f(k)dk$ を断りなしに使う．

§ 3.2.　FKN 公式

ガウス超過程のつくる空間 $L^2(\mathcal{Q}, d\mu)$ で $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ と自然に同型となるものを構成しよう．$\mathcal{Q} = \mathscr{S}'_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ として,

$$\phi(f) = \langle \phi, f \rangle, \quad f \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$$

とすれば, ミンロスの定理により, $\phi(f)$ がガウス型になる測度 μ が $\mathcal{Q}$ 上に存在する．その結果

$$\int |\phi(f)|^2 d\mu = \frac{1}{2}\|f\|^2$$

となるから, $\phi(f)$ は $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ まで拡大することが出来る．実際 $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して $f_n \to f$ となる列 $f_n \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ が存在するので $\phi(f) = s - \lim_{n\to\infty} \phi(f_n)$ として定義できる．さて, $\phi(f)$ を確率空間 $(\mathcal{Q}, \Sigma, \mu)$ 上の $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ を指数にもつガウス超過程としよう．さらに $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi(f) = \phi(\Re f) + i\phi(\Im f)$ として $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ まで拡張しておく．$L^2(\mathcal{Q}) \cong \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ が Wiener-Itô-Segal 同型から従い, 同様に

$$\mathcal{U}\phi(f)\mathcal{U}^{-1} = \Phi(\hat{f}), \quad f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$$

となる．ここで, 細かな注意をあたえる．$\phi(f)$ で $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ を $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に

$$\phi(f) = \phi(\Re f) + i\phi(\Im f)$$

と拡張する．もちろん, $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ のとき, $\phi(f)$ は自己共役作用素になるが, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては $\phi(f)$ は自己共役作用素ではない．一般の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては $\phi(f)$ と

$$\Phi(\hat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(a^*(k)\hat{f}(k) + a(k)\bar{\hat{f}}(k)\right) dk$$

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathbb{R}^d) \arrow[r, "\mathrm{j}_t"] \arrow[d, "e^{-|s-t|\hat{\omega}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & L^2(\mathbb{R}^4) \arrow[dl, "\mathrm{j}_s^*"] \\ L^2(\mathbb{R}^d) & \end{tikzcd}$$

Figure 2. $e^{-|s-t|\hat{\omega}}$ の分解

$$\begin{tikzcd} L^2(\mathcal{Q}) \arrow[r, "\mathrm{J}_t"] \arrow[d, "e^{-|s-t|H_{\mathrm{f}}}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & L^2(\mathcal{Q}_{\mathrm{E}}) \arrow[dl, "\mathrm{J}_s^*"] \\ L^2(\mathcal{Q}) & \end{tikzcd}$$

Figure 3. $e^{-|s-t|H_{\mathrm{f}}}$ の分解

は同型にならない．なぜならば, $\phi(f)$ は f について複素線形だが, $\Phi(\hat{f})$ は実線形なため．そこで,

$$\Phi_b(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \Big(a^*(k)\hat{f}(k) + a(k)\hat{f}(-k) \Big)\, dk$$

とすれば, $\phi(f)$ と $\Phi_b(f)$ は同型になる．もちろん $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ のとき $\Phi(\hat{f}) = \phi_b(f)$ である．例えば, 物理的に意味のある次の作用素を考える．

$$\Phi_b(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} e^{-ikx} + a(k) \frac{\hat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega(k)}} e^{+ikx} \right) dk.$$

任意の φ に対して $\Phi_b(x)$ は $\phi(\varphi(\cdot - x))$ と同型になる．一方で,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} e^{-ikx} + a(k) \frac{\bar{\hat{\varphi}}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} e^{+ikx} \right) dk$$

は φ が $\mathbb{R}$-値のときのみ $\phi(\varphi(\cdot - x))$ と同型になる．

さて, $\phi_{\mathrm{E}}(F)$ は確率空間 $(\mathcal{Q}_{\mathrm{E}}, \Sigma_{\mathrm{E}}, \mu_{\mathrm{E}})$ 上の $F \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ を指数にもつガウス超過程とする．構成の仕方は $\phi(f)$ と全く同じである．違うのは次元が $d+1$ 次元におきかわったところだけである．$\mathrm{J}_t : L^2(\mathcal{Q}) \to L^2(\mathcal{Q}_{\mathrm{E}})$ を $\mathrm{j}_t : L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d) \to L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ の第 2 量子化作用素で定義しよう．ここで

$$\widehat{\mathrm{j}_s f}(k_0, k) = \frac{e^{-itk_0}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\omega(k)}}{\sqrt{\omega(k)^2 + |k_0|^2}} \hat{f}(k). \tag{3.4}$$

$f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\overline{\mathrm{j}_t f} = \mathrm{j}_t f$ だから j_t は実を実にうつす．

$$\hat{\omega} = \omega(-i\nabla) = \sqrt{-\Delta + m^2}$$

とする．$t, s \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathrm{j}_s^* \mathrm{j}_t = e^{-|t-s|\hat{\omega}}$ となる．特に j_t は等長作用素である．$\mathrm{J}_t : L^2(\mathcal{Q}) \to L^2(\mathcal{Q}_{\mathrm{E}})$ を

$$\mathrm{J}_t \mathbb{1}_{\mathrm{M}} = \mathbb{1}_{\mathrm{E}}, \quad \mathrm{J}_t : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) :=: \phi_{\mathrm{E}}(\mathrm{j}_t f_1) \cdots \phi_{\mathrm{E}}(\mathrm{j}_t f_n) : \tag{3.5}$$

で定義する. 恒等式 $\mathrm{j}_s^*\mathrm{j}_t = e^{-|t-s|\hat{\omega}}$ から

$$\mathrm{J}_t^*\mathrm{J}_s = e^{-|t-s|\mathcal{U}^{-1}H_{\mathrm{f}}\mathcal{U}} \tag{3.6}$$

が従う. ここで $\mathcal{U}^{-1}H_{\mathrm{f}}\mathcal{U}$ は $L^2(\mathcal{Q})$ の自由ハミルトニアンで, 以降 H_{f} と書くことにする.

命題 3.1. (**自由ハミルトニアンの汎関数積分表示**) $F, G \in L^2(\mathcal{Q})$ とし $t \geq 0$ とする. このとき $(F, e^{-tH_{\mathrm{f}}}G)_{L^2(\mathcal{Q})} = (\mathrm{J}_0F, \mathrm{J}_tG)_{L^2(\mathcal{Q}_{\mathrm{E}})}$.

証明: (3.6) から従う. □多項式

$$P(X) = a_{2n}X^{2n} + a_{2n-1}X^{2n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

で $a_{2n} > 0$ とする. $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して $H_{\mathrm{I}} =: P(\phi(f)) :$ として,

$$H_P = H_{\mathrm{f}} \dotplus H_{\mathrm{I}}$$

としよう. ここで, $(F, (H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}})F) \geq 0$ なので $(F, (H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}})G)$ は非負対称 2 次形式になる. ゆえに, 非負自己共役作用素 T で $(F, (H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}})G) = (\sqrt{T}F, \sqrt{T}G)$ となるものが存在する. $T = H_{\mathrm{f}} \dotplus H_{\mathrm{I}}$ と記す. 次の定理が知られている.

定理 3.2. (**FKN 公式**) $H_{\mathrm{I}}(s) =: P(\phi_E(\mathrm{j}_s f)) :$ とする. このとき, $F, G \in L^2(\mathcal{Q})$ に対して

$$(F, e^{-tH_P}G) = (F, \mathrm{J}_0^* e^{-\int_0^t H_{\mathrm{I}}(s)ds}\mathrm{J}_tG).$$

上の定理の $P(X)$ は下から有界な多項式であった. しかし, $P(X) = X$ のときも, 下から有界ではないが考察することができる. $P(X) = X$ のとき,

$$(F, e^{-t(H+\phi(f))}G) = (F, \mathrm{J}_0^* e^{-\int_0^t \phi_E(\mathrm{j}_s f)ds}\mathrm{J}_tG).$$

となる. $e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}$ はもちろん有界作用素ではない. しかし, $m > 0$ のとき, $\mathrm{J}_0^* e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}\mathrm{J}_t$ は有界作用素で $\|\mathrm{J}_0^* e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}\mathrm{J}_t\| \leq e^{\|h\|^2/4}$ となることは, $e^{-tH_{\mathrm{f}}}$ の hypercontractivity (超縮小性)[13] という概念を適用すると瞬く間に証明できる. 一方, $m = 0$ のときも $\mathrm{J}_0^* e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}\mathrm{J}_t$ は有界になるが, その証明はかなり技巧的である. [8, Cor1.88] を参照せよ.

命題 3.1 と定理 3.2 を比べると, $e^{-tH_{\mathrm{f}}}$ の積分核は $\mathrm{J}_0^*\mathrm{J}_t$ で, $e^{-t(H+\phi(f))}$ のそれは $\mathrm{J}_0^* e^{\phi_{\mathrm{E}}(h)}\mathrm{J}_t$ であることがわかる.

§ 4. 並行移動不変ネルソン模型

ネルソン模型はスカラー場とシュレディンガー 方程式に従う非相対論的な粒子が線形の相互作用をする模型である. E. ネルソンは 1964 年に今日ネルソン模型といわれるものを厳密に定義し, [12] でくりこみを行って厳密に紫外切断のない自己共役作用素を定義し

た．さらに, [2, 10] で汎関数積分による繰り込みが行われた．ここでは, 並行移動不変ネルソン模型を考える．

§4.1. フォック空間上のネルソン模型

空間次元を d とする．$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフォック空間を簡単に $\mathcal{F}$ とおく．

仮定 4.1. (1) $\omega = \omega(k) = \sqrt{|k|^2 + m^2}$, $m \geq 0$. (2) $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, (3) $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\varphi}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

以降, 断らない限り仮定 4.1 を仮定する．H_{I} を

$$H_{\mathrm{I}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^*(\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}) + a(\widetilde{\hat{\varphi}}/\sqrt{\omega}) \right\}$$

で定める．ここで $\widetilde{\hat{\varphi}}(k) = \hat{\varphi}(-k)$ である．仮定より $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k)$ なので H_{I} は対称作用素で $\mathcal{F}$ の有限粒子部分空間上で本質的に自己共役になる．自由ハミルトニアンは $H_{\mathrm{f}} = d\Gamma(\omega)$ で与えられる．

定義 4.2. ($\mathcal{F}$ **上の並行移動不変ネルソンハミルトニアン**)

$$H(P) = \frac{1}{2}(P - P_{\mathrm{f}})^2 + H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}} \qquad P \in \mathbb{R}^d$$

を並行移動不変ネルソンハミルトニアンという．

$H(P)$ は $D(H_0) = D(P_{\mathrm{f}}^2 + H_{\mathrm{f}})$ 上非負自己共役である．

§4.2. 汎関数空間上のネルソン模型

ガウス超過程 (Q, Σ, μ), $(\phi(f), f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d))$ を固定する．$\mathcal{U} H_{\mathrm{I}} \mathcal{U}^{-1} = \phi(\tilde{\varphi})$ となる．ここで

$$\tilde{\varphi} = (\hat{\varphi}/\sqrt{\omega})^{\vee}.$$

$L^2(Q)$ 上の自由ハミルトニアンは $\tilde{H}_{\mathrm{f}} = \mathcal{U} H_{\mathrm{f}} \mathcal{U}^{-1}$, 運動量作用素は $\tilde{P}_{\mathrm{f}} = \mathcal{U} H_{\mathrm{f}} \mathcal{U}^{-1}$ だった．

定義 4.3. ($L^2(Q)$ **上の並行移動不変ネルソンハミルトニアン**) $L^2(Q)$ 上のネルソンハミルトニアンは

$$\tilde{H}(P) = \frac{1}{2}(P - \tilde{P}_{\mathrm{f}})^2 + \tilde{H}_{\mathrm{f}} + \tilde{H}_{\mathrm{I}} \qquad P \in \mathbb{R}^d$$

で定義する．

$\tilde{H}(P)$ と $H(P)$ は同型である．

§4.3. 正値改良性

半群 $e^{-t\tilde{H}(P)}$ のファインマン・カッツ型汎関数積分表示 (FKF) を求めよう．$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を $\mathbb{R}$ 上の d 次元ブラウン運動とする．$B_0 = 0$ a.s. とする．期待値を $\mathbb{E}[\ldots]$ と表す．

定理 4.4 ([5, Theorem 3.3])**.** $F, G \in L^2(\mathcal{Q})$ とする．このとき，

$$(F, e^{-2T\tilde{H}(P)}G) = \mathbb{E}\left[\left(F, e^{-i(P-\tilde{P}_{\mathrm{f}})B_{-T}} \mathrm{J}_0^* e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_{-T}^{T} \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds\right)} \mathrm{J}_t e^{i(P-\tilde{P}_{\mathrm{f}})B_T} G\right)\right].$$

我々は $e^{-T\tilde{H}(P)}$ の正値改良性に興味がある．$P=0$ のとき，

$$(F, e^{-2T\tilde{H}(0)}G) = \mathbb{E}\left[\left(F, e^{i\tilde{P}_{\mathrm{f}}B_{-T}} \mathrm{J}_0^* e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_{-T}^{T} \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds\right)} \mathrm{J}_t e^{-i\tilde{P}_{\mathrm{f}}B_T} G\right)\right].$$

となる． しかも，$e^{-i\tilde{P}_{\mathrm{f}}B_T}$ は場の理論におけるシフト作用素なので非負性を保存している． また，$\mathrm{J}_0^* e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_{-T}^{T} \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds\right)} \mathrm{J}_t$ は正値改良性なので，$F \geq 0$，$G \geq 0$ のとき，$(F, e^{-2T\tilde{H}(0)}G) > 0$ となることがわかる． しかし，一般に $P \neq 0$ のときは，積分核に現れる e^{iPB_T} のために一般には符号を決めることすらできない．そこで，フォック空間上で FKF を構成する．本質的には定理 4.4 と変わらないのだが，正値性の議論に関しては非自明である．(2.1) から次が成り立つことがわかる．

$$e^{\alpha\Phi(f)} = e^{\alpha\frac{\|f\|^2}{4}} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}a^*(f)} e^{\frac{1}{\sqrt{2}}a(\bar{f})} \tag{4.1}$$

これは Baker-Campbell-Hausdorff 公式と呼ばれている．Baker-Campbell-Hausdorff を定理 4.4 の積分核 $\mathrm{J}_0^* e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_{-T}^{T} \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds\right)} \mathrm{J}_t$ に適応すると次の定理が得られる．

定理 4.5 ([7, Proposition 3.2])**.** $F, G \in \mathcal{F}$ とする．このとき，

$$(F, e^{-2TH(P)}G) = \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}S}\left(F, e^{-i(P-P_{\mathrm{f}})B_{-T}} e^{a^*(U_T)} e^{-2TH_{\mathrm{f}}} e^{a(\tilde{U}_T)} e^{i(P-P_{\mathrm{f}})B_T} G\right)\right].$$

ここで

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} W(B_s - B_t, s-t) ds dt \\
W(x,t) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ikx} e^{-|t|\omega(k)} dk \\
U_T &= \int_{-T}^{T} e^{-|s+T|\omega(k)} \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} e^{-ikB_s} ds \\
\tilde{U}_T &= \int_{-T}^{T} e^{-|s+T|\omega(k)} \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} e^{ikB_s} ds.
\end{aligned}$$

フォック空間に正凸集合を定義する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\geq 0} &= \{F = \oplus_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F} \mid F^{(n)} \geq 0\}, \\
\mathcal{F}_{> 0} &= \{F = \oplus_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F} \mid F^{(n)} > 0\}.
\end{aligned}$$

次が主定理である．

定理 4.6 ([7])**.** *$\hat{\varphi} \geq 0$ で $\hat{\varphi} \not\equiv 0$ とする．このとき, 次が成り立つ.*

$$e^{-TH(P)}(\mathcal{F}_{\geq 0} \setminus \{0\}) \subset \mathcal{F}_{>0}.$$

証明: 基本的なアイデアは

$$\mathbb{E}\left[\prod_{j=0}^{n} e^{ik_j B_{s_j}}\right] = e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}|k_j+\cdots+k_n|^2(s_j-s_{j-1})} > 0 \tag{4.2}$$

の正値性を使うことにある．$F, G \in \mathcal{F}_{\geq 0} \setminus \{0\}$ とすれば, $F^{(n)} \geq 0$, $G^{(m)} \geq 0$ かつ恒等的にゼロにならないような n, m が存在する．$(F, e^{-2TH(P)}G) \geq (F^{(n)}, e^{-2TH(P)}G^{(m)})$ の右辺を定理 4.5 と (4.2) を使って評価する． □

定理 4.6 は [11, 9] で既に別証明が与えられている．興味深いことに, H_{I} のない非結合な模型 $H_0(P) = \frac{1}{2}(P - P_{\mathrm{f}})^2 + H_{\mathrm{f}}$ に関しては, シュレディンガー表現では $e^{-TH_0(P)}$ は正値改良型であることが示せるが, フォック表現では $e^{-TH_0(P)}$ は正値保存型でしかない．また, これらの結果はくりこんだネルソン模型でも成り立つ.

定理 4.6 の帰結として次がなりたつ.

系 4.7. *$P \in \mathbb{R}^d$, $\hat{\varphi} \geq 0$ $(\not\equiv 0)$ とする．このとき, $H(P)$ の基底状態が存在すれば一意的である.*

証明: 非可換ペロン・フロベニウスの定理 ([1]) によって系が従う． □

References

[1] L. Gross. A noncommutative extension of the Perron-Frobenius theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77:343–347, 1971.

[2] M. Gubinelli, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration. *J. Funct. Anal.*, 267:3125–3153, 2014.

[3] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Spin-boson model through a Poisson driven stochastic process. *Math. Zeitschrift*, 277:1165–1198, 2014.

[4] F. Hiroshima. Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II. *J. Math. Phys.*, 41:661–674, 2000.

[5] F. Hiroshima. Fiber Hamiltonians in the non-relativistic quantum electrodynamics. *J. Funct. Anal.*, 252:314–355, 2007.

[6] F. Hiroshima. Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models. *Adv. Math.*, 259:784–840, 2014.

[7] F. Hiroshima. Positivity of the semigroup generated by translation invariant Nelson Hamiltonian. *preprint*, 2023.

[8] F. Hiroshima and J. Lőrinczi. *Feynman-Kac type theorems and its applications, volume 2 (2nd ed).* De Gruyter, 2020.

[9] J. Lampart. The resolvent of the Nelson Hamiltonian improves positivity. *Math. Phys. Anal. Geom.*, 24:17pp, 2021.

[10] O. Matte and J. Møller. Feynman-Kac formulas for the ultra-violet renormalized Nelson model. *arXiv:1701.02600*, preprint, 2017.
[11] T. Miyao. On the semigroup generated by the renormalized nelson hamiltonian. *J. Funct. Anal.*, 276:1948–1977, 2019.
[12] E. Nelson. Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field. *J. Math. Phys.*, 5:1990–1997, 1964.
[13] B. Simon. *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory.* Princeton University Press, 1974.
[14] 廣島文生. **フォン・ノイマン１. 知の巨人と数理の黎明**. 大数学者の数学 19. 現代数学社, 2021.
[15] 廣島文生. **フォン・ノイマン２. 量子力学の数学定式化**. 大数学者の数学 20. 現代数学社, 2021.
[16] 廣島文生. **フォン・ノイマン３. 疾風怒濤の時代**. 大数学者の数学 21. 現代数学社, 2021.