複雑領域のポテンシャル解析

中部大学・理工学部　相川弘明
Hiroaki Aikawa
College of Science and Engineering
Chubu University

アブストラクト

ラプラス方程式や熱方程式は基本的ですべてわかっているように思われがちだが，まったく一般の領域における解や優解の境界挙動にはいまだにわからないことが多い．領域の複雑さが境界挙動にどう関わってくるかを以下のような複雑領域

$$C^{2,\alpha} \subsetneqq C^{1,1} = \text{球条件} \subsetneqq \text{Lipschitz} \subsetneqq \text{NTA} \subsetneqq \text{一様} \subsetneqq \text{内部一様} \subsetneqq \text{John} \subsetneqq \text{QHB}$$
$$\subsetneqq \text{Hölder} \subsetneqq \text{有界グラフ領域} \subsetneqq L^p\text{-領域}$$

について考察する．

具体的には正優調和関数の可積分性，Martin 境界，境界 Harnack 原理，Green 関数の減衰レート，境界層の最小固有値，放物型境界 Harnack 原理，Intrinsic Ultracontractivity などを通して，領域の複雑さが境界挙動に影響する様子を観察する．

1　なめらかな領域

次元 $n \geq 2$ とする．ラプラス方程式

$$\Delta u = \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\Big)u = 0$$

をみたす関数 u を調和関数という．$\mathbb{R}^n$ の領域 D に対する最も基本的な境界値問題は与えられた境界値をもつ調和関数を求めること：

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } D \\ u &= f \quad \text{on } \partial D \end{aligned}$$

である．これを Dirichlet 問題という．領域 D がなめらかであれば，Dirichlet 問題は Green 関数の法線微分を用いた Poisson 積分によって解かれる．

定義 **1** (Green 関数：Green 1828 [26])**.** $G_D(x,y)$ が D の Green 関数とは，$y \in D$ を任意に固定したとき，以下の 3 条件をみたす関数である．

(i) $G_D(\cdot,y)$ は $D \setminus \{y\}$ で調和
(ii) $-\Delta G_D(\cdot,y)$ は $\{y\}$ における点測度
(iii) $G_D(\cdot,y) = 0$ on ∂D

定理 **2** (Poisson 1823 [37])**.** D をなめらかな領域，f を境界 ∂D 上の連続関数とすると Dirichlet 問題 (1) の解は

$$u(x) = -\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_y} G_D(x,y) f(y)\, d\sigma(y) \tag{2}$$

で与えられる．ただし，$\dfrac{\partial}{\partial n_y}$ は y における外向き法線微分を表し，$P_D(x,y) = -\dfrac{\partial}{\partial n_y} G_D(x,y)$ を Poisson 核という．

この定理によりなめらかな領域に対しては Dirichlet 問題は完全に解かれる．とくに球の Green 関数と Poisson 核は具体的に計算され，$B(z,R)$ に対する Dirichlet 問題の解は

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{\partial B} \frac{R^2 - |x-z|^2}{R|x-y|^n} f(y) d\sigma(y)$$

となる（σ_n は単位球面の面積）．この Poisson 積分表示により，調和関数の平均値原理，最大値原理，Harnack 不等式が簡単に示される．

- 平均値原理：$u(z) = ⨍_{\partial B} u\, d\sigma = ⨍_B u\, dx$.
- 最大値原理：D が有界ならば $\inf_{\partial D} u \le u \le \sup_{\partial D} u$.
- 比較原理：u, v が有界領域 D で調和ならば $u \le v$ on $\partial D \implies u \le v$ on D.
- Harnack 不等式：u が $B = B(z,R)$ で正調和，$0 < \kappa < 1$ ならば

$$\frac{1-\kappa}{(1+\kappa)^{n-1}} \le \frac{u(x)}{u(z)} \le \frac{1+\kappa}{(1-\kappa)^{n-1}} \quad \text{for } x \in B(z,\kappa R).$$

x を y に取り替えた不等式を作り，比を取ると

$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le \frac{(1+\kappa)^n}{(1-\kappa)^n} \quad \text{for } x, y \in B(z,\kappa R).$$

- 積分記号下の微分により，調和関数は無限回微分可能．

球条件・$C^{1,\alpha}$-領域 一定の半径 r_0 があって，各境界点で接する内部球と外部球がとれる領域は球条件をみたすという．D が球条件をみたせば Green 関数の各点評価が得られる．図 1 のように内部球 B_i と外部閉球 B_e をとると Green 関数の領域に関する単調性から

$$G_{B_i}(x,y) \le G_D(x,y) \le G_{B_e^c}(x,y)$$

となる．以下，簡単のために $\delta_D(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ とすると，球および球の外部の Green 関数の具体的表示から，∂D に近い $x \in D$ に対して

$$G_D(x,y) \approx \delta_D(x) \tag{3}$$

が導かれる．ただし記号 $f \approx g$ は定数 $A > 1$ があって $\dfrac{1}{A} g \le f \le Ag$ となることを意味する．

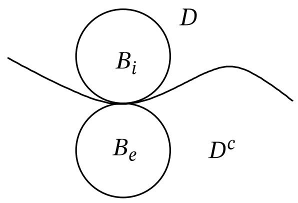


図 1　球条件をみたす領域

実は，球条件をみたす領域は $C^{1,1}$-領域と一致する（[8]）．この方向では Green 関数の各点評価が $C^{1,\alpha}$-領域まで拡張される（Widman (1967) [41]）．PDE でよく仮定されるのは $C^{2,\alpha}$-領域（Gilbarg-Trudinger [25]）である．なめらかな領域に対しては Poisson 積分の具体的な形は不明でも，Dirichlet 問題の解の境界挙動がよくわかる．

ところが，D が一般になると，とたんに数々の問題が起こってくる．図 2 参照．

- Green 関数は具体的に計算できない．
- Green 関数の評価が難しい．
- 法線方向が定まらない．
- 境界の面測度が定まらない．
- 境界値に一致する調和関数が存在しないことがある．

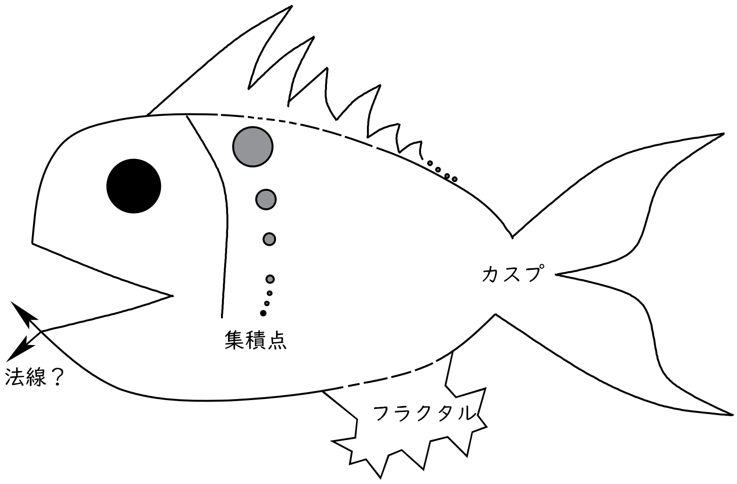


図 2　複雑領域の例

2　Perron の方法・正則境界点・調和測度

解の境界挙動を気にしなければ，一般の有界領域に対して Dirichlet 問題を解くことができる．

Perron の方法 Perron の方法（[35]）はまったく一般の有界領域に対する Dirichlet 問題の解法である．$-\Delta u \geq 0$ となる下半連続関数 u を優調和関数，$-\Delta s \leq 0$ となる上半連続関数 s を劣調和関数という．f を境界 ∂D 上の有界関数とするとき，$\mathcal{U}_f$ を $\liminf_{x\to\xi} u(x) \geq f(\xi)$　$({}^\forall\xi \in \partial D)$ をみたす優調和関数 u の全体とし，$\mathcal{S}_f$ を $\limsup_{x\to\xi} s(x) \leq f(\xi)$　$({}^\forall\xi \in \partial D)$ をみたす劣調和関数 s の全体とする．このとき

$$\overline{H}_f(x) = \inf_{u\in\mathcal{U}_f} u(x), \quad \underline{H}_f(x) = \sup_{s\in\mathcal{S}_f} s(x)$$

はどちらも D 上の調和関数となり，$\underline{H}_f \leq \overline{H}_f$ をみたす．さらに f が連続であればこれらは一致して，「Dirichlet 問題の解」となる．Perron の方法を発展させた Wiener と Brelot を加えて，この Dirichlet 問題の解を **PWB-解**という．

正則境界点 PWB-解に対しては境界条件 $u = f$ は厳密には成り立たない．$\xi \in \partial D$ が正則境界点とは，境界関数 f が ξ で連続であれば，PWB-解の ξ における境界値が $f(\xi)$ であるときをいう．一般の領域は非正則境界点をもつことがある．たとえば，円板から 1 点を除くと，その点は非正則境界点となる．ただ非正則境界点は少なく，非

正則境界点全体は**極集合**である．ここに E が極集合とは，E 上で ∞ となる優調和関数が存在することである．極集合を除いて成立することを quasi everywhere (q.e.) で成立するという．極集合は $n-2$ 次元であり，q.e. は a.e. より詳しい性質である．有界関数に限れば最大値原理の境界条件は q.e. に成立だけでよい（Phragmén-Lindelöf 原理）．したがって有界な境界関数 f に対しては

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } D \\ u &= f \quad \text{q.e. on } \partial D \end{aligned} \tag{4}$$

が拡張された Dirichlet 問題であり，Green 関数の定義は

(i) $G_D(\cdot, y)$ は $D \setminus \{y\}$ で調和
(ii) $-\Delta G_D(\cdot, y)$ は $\{y\}$ における点測度
(iii) $G_D(\cdot, y) = 0$ q.e. on ∂D

となる．境界点 ξ が正則である必要十分条件はバーリア（ξ の近傍の正優調和関数で ξ に近づいたとき 0 になるもの）が存在することである．これは Green 関数 $G_D(\cdot, y)$ の ξ における境界値が 0 になることと同値である．

調和測度 $x \in D$ を固定して (4) の解 u の x おける値 $u(x)$ が f によって定まるとみると，これは境界関数 f の正汎関数であり，境界上の Radon 測度になる．これを**調和測度**といい，$\omega_D(x, E)$ で表す．Dirichlet 問題の解は

$$u(x) = \int_{\partial D} f(y)\omega_D(x, dy) \tag{5}$$

となる．境界関数が恒等的に 1 のとき Dirichlet 解は 1 であるから，$\omega(x, \partial D) = 1$ であり，確率測度となる．実際，$\omega(x, E)$ は x から出発した Brown 運動が E を通って初めて D から脱出する確率となっている（角谷 [30]）．調和測度と Green 関数は

$$\omega(x, dy) = \delta_x + \Delta_y G_D(x, y) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{6}$$

で結びついている．ただし，$G_D(x, y)$ は $y \notin D$ のとき 0 で拡張している．

一般化された Dirichlet 問題 (4) は調和測度によって (5) と解かれ，調和測度は Green 関数によって (6) で与えられる．このようにして Dirichlet 問題は調和測度や Green 関数に言い換えられる．

3 Martin 境界

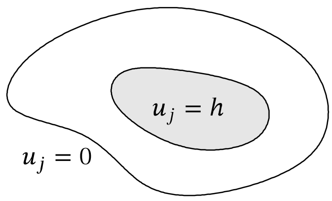
なめらかな領域 D に対する Poisson 積分公式 (2) を一般化すると D 上の正調和関数 h は境界上の測度 μ_h による Poisson 積分

$$u(x) = -\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n_y} G_D(x, y)\, d\mu_h(y)$$

で表されることがわかる．なめらかな領域に対しては $G_D(x_0, y) \approx \delta_D(y)$ であり，$-\dfrac{\partial G_D(x, y)}{\partial n_y} \approx \dfrac{G_D(x, y)}{G_D(x_0, y)}$ となる．ただし，$x_0 \in D$ は固定点である．

Martin [33] は Poisson 積分を一般化して **Martin 境界**を導入し，まったく一般の領域 D 上の正調和関数を Martin 境界上の積分で表示できることを示した．D を Green 関数 G_D をもつ一般の領域とし，h を D 上の正調和関数とする．正則領域の列 $D_j \uparrow D$ に対して D_j では $u_j = h$ とし，$D \setminus D_j$ では Dirichlet 問題：

$$\begin{aligned} \Delta u_j &= 0 \quad \text{in } D \setminus \overline{D_j} \\ u_j &= h \quad \text{on } \partial D_j \\ u_j &= 0 \quad \text{on } \partial D \end{aligned}$$



の解を u_j とすれば，これは D 上の優調和関数となり，∂D_j 上の測度 ν_j によって

$$u_j = G_D \nu_j = \int_D G_D(\cdot, y) d\nu_j(y)$$

と表される．Poisson 核が Green 関数の法線微分であること，および，なめらかな領域に対しては Green 関数が距離関数と比較可能であることを考慮して，Poisson 核の代わりに，Green 関数の比 $\dfrac{G_D(x, y)}{G_D(x_0, y)}$ を用いよう．D_j で $u_j = h$ であるから

$$h(x) = \int G_D(x, y) d\nu_j(y) = \int \frac{G_D(x, y)}{G_D(x_0, y)} G_D(x_0, y) d\nu_j(y) \quad (x \in D_j).$$

測度 μ_j を $d\mu_j(y) = G_D(x_0, y) d\nu_j(y)$ と定義すれば，$\|\mu_j\| = h(x_0)$（一定値）であるから，w^*-収束する部分列の極限を μ_h とすれば，

$$h(x) = \int \frac{G_D(x, y)}{G_D(x_0, y)} d\mu_h(y) \quad (x \in D)$$

という積分表示を得る．ただし，これには問題があって，Green 関数の比 $\dfrac{G_D(x,\cdot)}{G_D(x_0,\cdot)}$ が境界まで連続に延びるか保証がない（なめらかな領域ならば正しい）．そこで発想を転換して，$\dfrac{G_D(x,\cdot)}{G_D(x_0,\cdot)}$ の極限が存在し，連続に延びるような最小の**理想境界** Δ と連続拡張 $K(x,\cdot)$ を導入すれば積分表示 $h(x) = \int_\Delta K(x,y)d\mu_h(y)$ を得ることができる．Δ を **Martin 境界**，$K(x,y)$ を **Martin 核**という．$K(\cdot,y)$ は D 上の正調和関数で $K(x_0,y)=1$ となるものである．ただし，測度 μ_h は一意ではない．一意な測度を得るために，Martin 境界の本質的な部分を抜き出す．正調和関数 u が**極小**とは u 以下の正調和関数は u の定数倍に限るときをいい，$K(\cdot,y)$ が極小であるような Martin 境界点 y の全体を Δ_1 で表し，**極小 Martin 境界**という．

定理 **3** (Martin の積分表示 [33]). D 上の正調和関数 h に対し，極小 Martin 境界 Δ_1 上の Radon 測度 μ_h が一意に存在し

$$h(x) = \int_{\Delta_1} K(x,y)d\mu_h(y).$$

注意 **1.** Green 関数が存在すれば Martin 境界が定義でき，すべての正調和関数からなる関数空間を完全に決定できる．しかし，Martin 境界が具体的にどうなるかという，新たな課題が生ずる．たとえば Martin 境界は位相境界に一致するだろうか?

4 Lipschitz 領域 〜 NTA 領域

Lipschitz 領域 境界が局所的に Lipschitz 連続な関数のグラフで表される領域を Lipschitz 領域という．球や半空間における**非接境界値**を考えると，自然に Lipschitz 領域が現れてくる．$\mathbb{R}^n_+$ の Green 関数は具体的に計算され，Poisson 積分は

$$h(x) = \frac{2}{\sigma_n}\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{x_n}{|x-y|^n} f(y)dy$$

となる．f が ξ で連続であれば $\lim_{x\to\xi} h(x) = f(\xi)$ であるが，f が可積分のときにはほとんどすべての境界点 ξ に対して $\text{nt-}\lim_{x\to\xi} h(x) = f(\xi)$ となる（**大域 Fatou 定理**）．ここで $\text{nt-}\lim_{x\to\xi} h(x)$ は非接極限を表す．より一般に $\mathbb{R}^n_+$ の正調和関数 h は測度による Poisson 積分で表され，ほとんどすべての $\xi \in \partial\mathbb{R}^n_+$ で非接境界値をもつ．

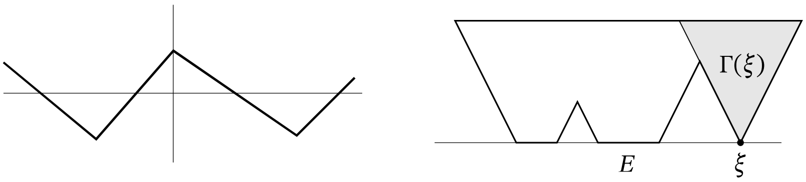


図 3　Lipschitz 領域・局所 Fatou の定理

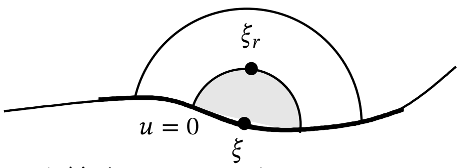
定理 4 (局所 Fatou 定理： Carleson [18]). h は半空間 $\mathbb{R}^n_+$ の調和関数で $E \subset \partial\mathbb{R}^n_+$ で非接有界とする．このとき h はほとんどすべての $\xi \in E$ で非接境界値をもつ．

注意 2.
- h が**非接有界**とは $^\forall\xi \in E$ に対し，頂点が ξ の錐 $\Gamma(\xi)$ の上で h が有界．
- 簡単な解析により，$\Gamma(\xi)$ は同じ高さと開きをもつとしてよい．
- 定数を加えて h は $\Gamma(\xi)$ で正としてよい．
- 非接錐の合併は Lipschitz 領域になる．
- 局所 Fatou の定理は Lipschitz 領域上の正調和関数の非接境界値に帰着される．

▌Carleson 評価▌ Lipschitz 領域の Poisson 核を具体的に書くことはできない．Carleson は局所 Fatou 定理を Carleson 評価を用いて証明した．

補題 5 (Carleson 評価 [18]). D を Lipschitz 領域とする．$\xi \in \partial D$ と小さい $r > 0$ に対し ξ_r を**非接点**とする，i.e., $|\xi_r - \xi| = r$ かつ $\delta_D(\xi_r) \approx r$．このとき u が D で正調和かつ，$A > 1$ に対して $\partial D \cap B(\xi, Ar)$ で $u = 0$ ならば

$$u(x) \le Au(\xi_r) \quad (x \in D \cap B(\xi, r)).$$



注意 3. D がなめらかであれば，Green 関数と比較することによって $u(x) \approx \delta_D(x)$ がわかり，Carleson 評価が直ちに導かれる．しかし，Lipschitz 領域に対しては $u(x) \approx \delta_D(x)$ は不成立．Carleson は Lipschitz 領域の本質：

> **内部・外部錐条件**：各境界点 $\xi \in \partial D$ を頂点とする一定の開き・大きさの錐が内部と外部に取れる．

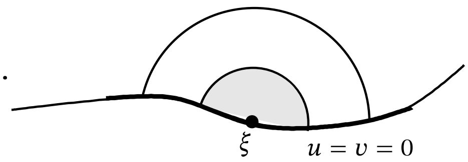
を巧妙に用いた．Hunt-Wheeden [27], [28] は Carleson の議論を Lipschitz 領域 D に適用して，D の **Martin 境界**が位相境界に一致することを示した．

▌スケール不変境界 Harnack 不等式・大局的境界 Harnack 原理▌ Carleson 評価と密

接に関係しているのがスケール不変境界 Harnack 不等式である．実際，Carleson 評価とスケール不変境界 Harnack 不等式は同値である（[5]）．

定義 6 (スケール不変境界 Harnack 不等式（BHP）)**.** ある $A > 1$ に対して以下の性質が成り立つ．$\xi \in \partial D$ と $r > 0$ に対して，u, v が $D \cap B(\xi, Ar)$ で正調和かつ $\partial D \cap B(\xi, Ar)$ で $u = v = 0$ ならば，

$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le A \quad (x, y \in D \cap B(\xi, r)).$$

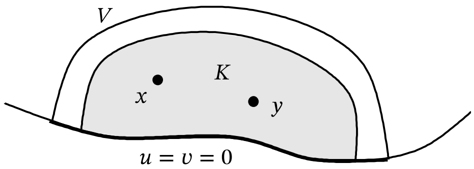


ただし $A > 1$ は ξ, r, u, v に依存しない．

定数 A のスケール不変性を落とすと大局的境界 Harnack 原理（GBHP）になる．

定義 7 (大局的境界 Harnack 原理（GBHP）)**.** コンパクト集合 K は境界 ∂D と交わるとする．K を含む開集合 V があって u, v が $D \cap V$ で正調和かつ $\partial D \cap V$ で $u = v = 0$ ならば，

$$\frac{u(x)/v(x)}{u(y)/v(y)} \le A \quad (x, y \in D \cap K).$$



ただし，A は D だけでなく K や V にも依存する．

大局的境界 Harnack 原理はスケール不変境界 Harnack 不等式よりはるかに弱い性質で，非常に複雑な領域でも成立する．一方，スケール不変境界 Harnack 不等式は強力で数々の重要な定理を導く．

定理 8. Lipschitz 領域はスケール不変境界 Harnack 不等式をみたす．その結果，Martin 境界 Δ と極小 Martin 境界 Δ_1 は位相境界に一致する．

証明. スケール不変境界 Harnack 不等式を認めて，Martin 境界 Δ と極小 Martin 境界 Δ_1 が位相境界に一致することを示そう．そのためには任意の $\xi \in \partial D$ に対して $\lim_{y \to \xi} G_D(x, y)/G_D(x_0, y)$ が収束することを示すのが本質である．部分点列 $y_j \to \xi$ をうまくとれば $\lim_{j \to \infty} G_D(x, y_j)/G_D(x_0, y_j)$ が収束するようにできる．そのとき極限関数は核関数族

$$\mathcal{H}_\xi = \{h : h(x_0) = 1, h = 0 \text{ q.e. on } \partial D, {}^{\forall} r > 0 \text{ に対して } h \text{ は } D \setminus B(\xi, r) \text{ で有界}\}$$

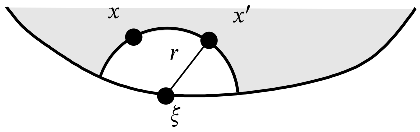


図 4　Martin 境界の決定

に属する．したがって $\mathcal{H}_\xi$ が 1 個の関数からなることを示せば, $\lim_{y\to\xi} G_D(x,y)/G_D(x_0,y)$ が収束することがわかる．さらに少し考察すれば，$\Delta = \Delta_1 = \partial D$ であることがわかる．

任意に $u, v \in \mathcal{H}_\xi$ をとる．スケール不変境界 Harnack 不等式により，小さな $r > 0$ に対して，任意の $x, x' \in D \cap \partial B(\xi, r)$ に対して

$$A^{-1}\frac{u(x')}{v(x')} \le \frac{u(x)}{v(x)} \le A\frac{u(x')}{v(x')} \quad (x, x' \in D \cap \partial B(\xi, r))$$

となり，最大値原理より同じ不等式が $x, x' \in D \setminus B(\xi, r)$ に対して成り立つ．定数 A が u, v, r に依存しないことに注意．図 4 参照．そこで $x' = x_0$ とし $r \downarrow 0$ とすれば，

$$A^{-1} \le \frac{u}{v} \le A$$

が D 全体で成り立ち，

$$\alpha = \sup_{u,v\in\mathcal{H}_\xi,\ x\in D} \frac{u(x)}{v(x)} < \infty$$

は有限値である．

明らかに $\alpha \ge 1$ であるが，$\alpha = 1$ であることを示そう．これに反して $\alpha > 1$ と仮定すると，$u, v \in \mathcal{H}_\xi$ に対して $v_1 = \dfrac{\alpha v - u}{\alpha - 1} \in \mathcal{H}_\xi$ となる．したがって

$$u \le \alpha v_1 = \alpha\frac{\alpha v - u}{\alpha - 1}$$

となり，簡単な計算から

$$\frac{u}{v} \le \frac{\alpha^2}{2\alpha - 1}.$$

ゆえに $\dfrac{\alpha^2}{2\alpha - 1} < \alpha$ となり，α の定義に反する．したがって $\alpha = 1$ であり，$\mathcal{H}_\xi$ は 1 個の関数からなる □

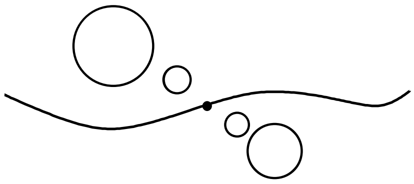
注意 **4.** Kemper [31] は BHP を定式化し，Ancona [11], Dahlberg [21], Wu [42] は Lipschitz 領域が BHP をみたすことを独立に示した．より一般には

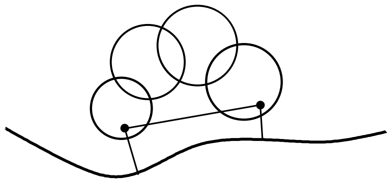
$$\text{一様領域} \iff \text{スケール不変 BHP} \implies \Delta = \Delta_1 = \partial D.$$

詳しくは [3]，[4] 参照.

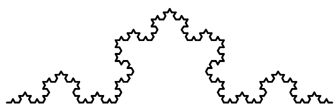
NTA 領域 Carleson を起源とする方法が適用できるには次の 3 つの要素で十分であることに Jerison-Kenig[29] は気づき，Lipschitz 領域を **NTA 領域** (Non-Tangentially Accessible domain) に拡張した.

- **Corkscrew 条件**. $^\forall\xi \in \partial D$, $0 < {}^\forall r < r_0$, $D \cap B(\xi, r)$ は半径 r/A の球を含む.
- **外部 corkscrew 条件**. $^\forall\xi \in \partial D$, $0 < {}^\forall r < r_0$, $B(\xi, r) \setminus D$ は半径 r/A の球を含む.
- **Harnack chain 条件**. $x, y \in D$ が $|x - y| \approx \delta_D(x) \approx \delta_D(y)$ をみたせば x と y は D 内の長さ一定の Harnack chain で結ぶことができる.





NTA 領域は Lipschitz 領域と同様の性質をもち，BHP が成立し，$\partial D = \Delta = \Delta_1$ となる．しかし，NTA 領域は Lipschitz 領域より，はるかに複雑で，∂D の Hausdorff 次元は $n - 1$ より大きく，フラクタルな境界をもつことがある.



NTA の例．スノーフレーク

5 Lipschitz 領域における優調和関数の可積分性

スケール不変境界 Harnack 不等式の別の応用として Lipschitz 領域における正優調和関数の可積分性を調べよう．正優調和関数は局所的に L^p-可積分，$0 < p < \dfrac{n}{n-2}$，であるが，領域全体での可積分性は領域のなめらかさに依存する．D 上の正優調和関数全体を $S^+(D)$ で表す．Armitage は Green 関数の評価 (3) などを用いて次の定理を示した.

定理 **A** (Armitage [13]). D が $C^{1,1}$-領域ならば $S^+(D) \subset L^p(D)$，$0 < p < \dfrac{n}{n-1}$.

Lipschitz 領域への拡張は Maeda-Suzuki によって与えられた．Lipschitz 定数 k の Lipschitz 関数のグラフで境界が局所的に与えられる領域を k-Lipschitz 領域と呼ぶ.

定理 **B** (Maeda-Suzuki [32]). D を k-Lipschitz 領域とすると $S^+(D) \subset L^p(D)$, $p < p_n(k)$. ただし，$p_n(k)$ は k と n によって定まる定数．さらに $k \downarrow 0$ のとき $p_n(k) \uparrow \dfrac{n}{n-1}$.

C^1-領域はいくらでも小さい $k>0$ に対して k-Lipschitz 領域とみなすことができる．したがって定理 B は Armitage の可積分性 $S^+(D)\subset L^p(D)$，$0<p<\dfrac{n}{n-1}$，が C^1-領域まで拡張されることを示している．

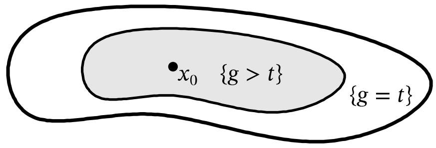
スケール不変境界 Harnack 不等式と coarea 公式を用いると，k-Lipschitz 領域 D に対して，$S^+(D)$ のシャープな L^p 可積分性を得ることができる．簡単のため $g(x)=G_D(x,x_0)\wedge 1$ とおく．

定理 **9** ([1, Corollary 6]). D を k-Lipschitz 領域とする．$g(x)\ge A\delta_D(x)^\alpha$ ならば

$$S^+(D)\subset L^p(D),\quad 0<p<\min\Big\{\frac{n}{n+\alpha-2},\frac{1}{\alpha-1}\Big\}.$$

とくに $1\le\alpha<2$ であれば，$S^+(D)\subset L^1(D)$.

証明. 部分領域 $\{x\in D : g(x)>t\}$ で Poisson 積分を考える．$\{g=t\}$ での単位法線ベクトルは $\nu=\dfrac{\nabla g}{|\nabla g|}$ で与えられるから，



$$u(x_0)\ge\int_{\{g=t\}}u(x)\frac{\partial G_D(x_0,x)}{\partial n_x}d\sigma(x)=\int_{\{g=t\}}u(x)|\nabla g(x)|d\sigma(x).$$

Coarea 公式 (e.g. [34, Theorem 1.2.4]) を $f(x)=u(x)\varphi(g(x))|\nabla g(x)|$ に用いると

$$\int_D f(x)|\nabla g(x)|dx=\int_0^\infty dt\int_{\{x:g(x)=t\}}f(x)d\sigma(x).$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_D u(x)\varphi(g(x))|\nabla g(x)|^2dx&=\int_0^\infty dt\int_{\{x:g(x)=t\}}u(x)\varphi(g(x))|\nabla g(x)|d\sigma(x)\\&=\int_0^1\varphi(t)dt\int_{\{x:g(x)=t\}}u(x)|\nabla g(x)|d\sigma(x)\\&\le u(x_0)\int_0^1\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

簡単のため本質的な $\alpha<2$ のときに $S^+(D)\subset L^1(D)$ であることのみ示そう．このとき $\varphi(t)=t^{-2+2/\alpha}$ とおく．スケール不変境界 Harnack 不等式により，$|\nabla g(x)|\ge A\dfrac{g(x)}{\delta_D(x)}$ が弱い意味で成立し，積分に代入することによって

$$\int_D u(x)dx\le A\int_D u(x)\frac{g(x)^{2/\alpha}}{\delta_D(x)^2}dx=Au(x_0)\int_0^1 t^{-2+2/\alpha}dt<\infty.\qquad\square$$

5.1　Green 関数の評価： $g(x) \ge A\delta_D(x)^\alpha$

第 1 節で見たように $C^{1,1}$-領域 D に対しては $g(x) \approx \delta_D(x)$ である．しかし，Lipschitz 領域に対しては一般に $g(x) \not\approx \delta_D(x)$ となる．たとえば D を平面の第 1 象限 $\{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0\}$ とすれば $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ は D 上の正調和関数であり，境界上で消えている．定義から $x \in D$ が原点に対角線から近づくとき $g(x) \approx \delta_D(x)^2$ となり，$g(x) \ge A\delta_D(x)^2$ である．一方，原点における Martin 核 $\dfrac{x_1 x_2}{|x|^4}$ は D 上の正調和関数で，原点以外の境界上で消えているが，原点の付近で L^1-可積分でない．図 5（左）参照．

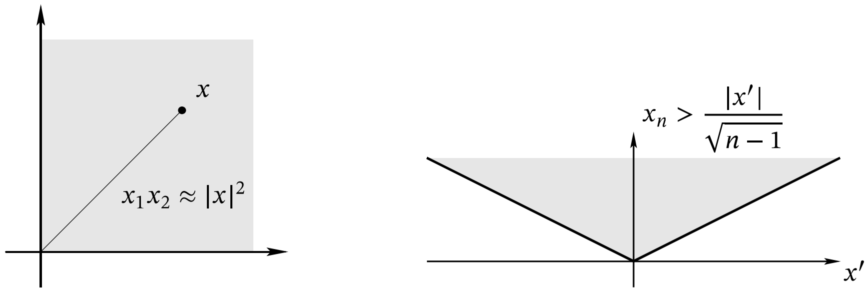


図 5　Lipschitz 領域に対する Green 関数の評価

一般次元のとき $D = \{(x_1, x') : x_n > \dfrac{|x'|}{\sqrt{n-1}}\}$ は $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}$-Lipschitz 領域であり，$g(x) \ge A\delta_D(x)^\alpha$ が $\alpha = 2$ で成り立つ．実際，$h(x) = (n-1)x_n^2 - (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)$ は D 上の正調和関数であり，境界上で消えている．一般に，$0 < k < 1/\sqrt{n-1}$ のとき k-Lipschitz 領域に対しては $g(x) \ge A\delta_D(x)^\alpha$ が $\alpha < 2$ で成り立つ．図 5（右）参照．

5.2　Green 関数の微分の下からの評価

スケール不変境界 Harnack 不等式を用いて Green 関数の微分を弱い意味で下から評価する．具体的には $\varepsilon > 0$ と $0 < \kappa < 1$ をうまく取って

$$|\{\xi \in B(x, \kappa\delta_D(x)) : |\nabla g(\xi)| \ge \varepsilon g(x)/\delta_D(x)\}| \approx |B(x, \kappa\delta_D(x))| \tag{7}$$

となることを示そう．証明の前に各点評価 $|\nabla g(x)| \ge \varepsilon g(x)/\delta_D(x)$ は一般には不成立であることに注意する．実際，穴の空いた領域だと領域内部の点 x で $\nabla g(x) = 0$ となることがある．(7) はそのような点は少なく，測度的に下からの評価が成り立つことを示している．

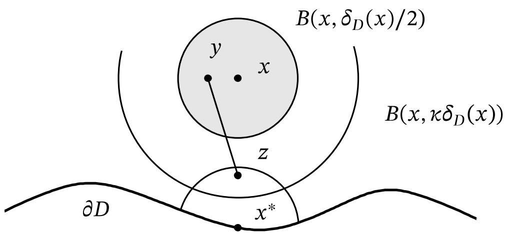


図 6　Green 関数の微分の下からの評価

図 6 のように，$x \in D$ に対し $x^* \in \partial D$ を $|x - x^*| = \delta_D(x)$ となるようにとる．このときスケール不変境界 Harnack 不等式と同値な Carleson 評価と外部条件より，$z \in D \cap B(x^*, \eta\delta_D(x)) \cap B(x, \kappa\delta_D(x))$ で

$$g(z) \le 2^{-1} \inf_{y \in B(x,\delta_D(x)/2)} g(y)$$

をみたすものが取れる．Schauder 評価より $|\nabla g(\xi)| \le Ag(\xi)/\delta_D(\xi) \le Ag(x)/\delta_D(x)$ が $\xi \in \overline{yz}$ に対して成り立つ．そこで，$\varepsilon > 0$ を小さく取れば

$$\ell(\{\xi \in \overline{yz} : |\nabla g(\xi)| \ge \varepsilon g(x)/\delta_D(x)\}) \ge \frac{g(y)\delta_D(x)}{4Ag(x)} \ge A\delta_D(x).$$

最後に Fubini の定理を用いれば (7) が得られる．

6　非正則領域

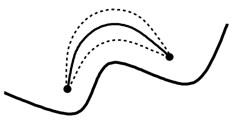
Hölder 領域　∂D が α-Hölder 連続な関数のグラフで局所的に表される領域を **α-Hölder 領域**という．ここに $0 < \alpha \le 1$ であり，$\alpha = 1$ ならば Lipschitz 領域である．$n \ge 3$ のとき，$0 < \alpha < 1$ に対して α-Hölder 領域は非正則になり得る．

Bass-Burdzy [16] はそのような Hölder 領域でも大局的境界 Harnack 原理（GBHP) が成り立つことを示した．Carleson から始まった議論は外部条件に依存していたが，それが不要というのは驚くべき結果である．Bass-Burdzy によって GBHP が成立する領域は格段に広げられたが，彼らの境界 Harnack 原理はスケール不変ではなく Martin 境界の決定には不十分であった．

一様領域　NTA 領域の外部条件を外したものを一様領域という．これは領域内の 2 点 x, y が Harnck 連鎖で結ばれ（Cigar 条件）その長さが $|x - y|$ の定数倍で押さえられる（bounded turning 条件）ということと同値である．Bass-Burdzy の確率論的箱

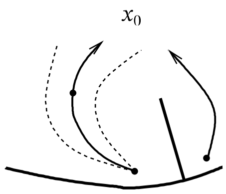
議論を解析に直し，一様領域でスケール不変境界 Harnack 不等式を証明し，一様領域の Martin 境界は位相境界に一致する（[3]）．

一様領域の条件にある $|x - y|$ を D 内の内部距離—x, y を D 内で結ぶ曲線の長さの下限—に取り替えたものが，**内部一様領域**である．内部一様領域では内部距離に関する球を考えることによりスケール不変境界 Harnack 不等式が成立する．その結果として内部一様領域の Martin 境界は内部距離に関する境界に一致する．Bounded turning 条件を外してしまえば **John 領域**となり，もはやスケール不変境界 Harnack 不等式は不成立だが，大局的境界 Harnack 原理は成り立つ．

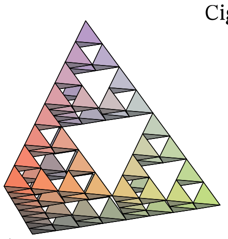


Cigar 条件

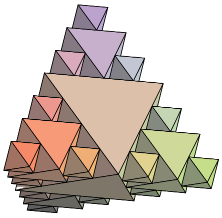
内部距離



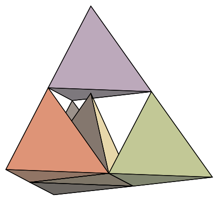
John 領域



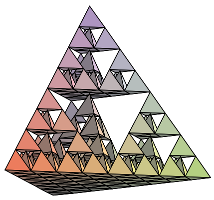
3 次元 Sierpinski Gasket



SG の補集合は一様領域

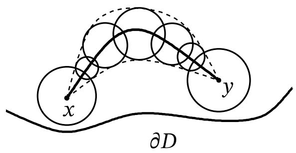


Base-covered SG



BC-SG の補集合は内部一様領域

▇擬双曲距離条件▇ Harnck 連鎖の長さは**擬双曲距離** (quasi hyperbolic metric)：$k_D(x, y) = \inf_{\widetilde{xy}} \int_{\widetilde{xy}} \dfrac{ds(z)}{\delta_D(z)}$ で測ることができ，$k_D(x, y)$ は x, y を結ぶ Harnck 連鎖の長さの下限と比較可能である．



定義 **10** (QuasiHyperbolic Boundary condition)．擬双曲距離を用いて複雑領域を定義することができる．

- QHB(0): $k_D(x, x_0) \le A \log\left(\dfrac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\right) + A$．Smith-Stegenga [38] はこの条件をみたす領域を “Hölder domain” と呼んでいる．その理由は QHB(0) をみたす単連結平面領域を単位円板に写す等角写像はは Hölder 連続になるからである．ただし，前述の Hölder 領域と紛らわしい．John 領域は QHB(0) をみたす．
- QHB(α): $k_D(x, x_0) \le A\left(\dfrac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\right)^{\alpha} + A$．QHB(0) を QHB($\alpha$)，$\alpha > 0$ に拡張するとより複雑な領域となる．後で定義する容量密度条件を付加することにより，GBHP や IU（後述）が成立する（[14]）．

7　容量・容量密度条件・容量的幅

容量 非正則境界点全体が極集合であることを述べたが，定量的に容量

$$\mathrm{Cap}_D(E) = \inf\{\int_D |\nabla u(x)|^2 dx : \ u \in C_0^\infty(D) \text{ は } E \text{ 上で } u \geq 1\}$$

で測ることができる．容量を容量ポテンシャルで表そう．

容量ポテンシャル・容量分布 D 上の正値関数 f に対して ${}^D\mathbf{R}_f^E$ を

$${}^D\mathbf{R}_f^E(x) = \inf\{v(x) : \ v \text{ は } D \text{ 上の正優調和関数で } E \text{ 上 } v \geq f\}$$

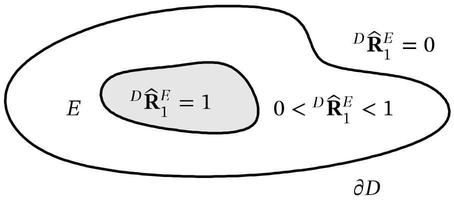
とし，その下半連続化

$${}^D\widehat{\mathbf{R}}_f^E(x) = \liminf_{y \to x} {}^D\mathbf{R}_f^E(y)$$

を D における f の E への**掃散**という．f が D で優調和であれば ${}^D\widehat{\mathbf{R}}_f^E$ は D 内の優調和関数となる．とくに E が相対コンパクトで f が定数関数 1 のとき，${}^D\widehat{\mathbf{R}}_1^E$ を E の D における**容量ポテンシャル**という．

容量ポテンシャルは

- E 上で ${}^D\widehat{\mathbf{R}}_1^E = 1$ q.e.
- ∂D 上で ${}^D\widehat{\mathbf{R}}_1^E = 0$ q.e.
- ${}^D\widehat{\mathbf{R}}_1^E$ は $D \setminus E$ で調和



をみたす

Green ポテンシャル $G_D\mu_E$ で表される．この μ_E を E の**容量分布**という．容量は

$$\mathrm{Cap}_D(E) = \int_D {}^D\widehat{\mathbf{R}}_1^E d\mu_E = \int_D G_D\mu_E d\mu_E = \|\mu_E\|$$

をみたす．さらに，ゲーム理論の minimax 定理 を用いると

$$\begin{aligned}\mathrm{Cap}_D(E) &= \sup\{\|\mu\| : G_D\mu \leq 1 \text{ on } D, \operatorname{supp}\mu \subset E\} \\ &= \inf\{\|\mu\| : G_D\mu \geq 1 \text{ on } E\}.\end{aligned}$$

となる（[24]）．以上は E が Borel 集合であっても成立する．

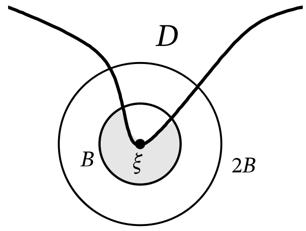
注意 **5.**

- 容量は $n-2$ 次元の量であり，ルベーグ測度より詳しい性質を与える．

- 非正則境界点全体は極集合であり，その容量は 0 である（Kellogg の定理）.
- 容量による正則境界点の特徴付け（Wiener 判定法）：

$$\xi \text{ 正則} \iff \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Cap}_{B(\xi,2^{1-j})}(B(\xi,2^{-j}) \setminus D)}{\mathrm{Cap}_{B(\xi,2^{1-j})}(B(\xi,2^{-j}))} = \infty.$$

Wiener 判定法は容量と掃散の関係から導かれる．その概略を述べよう．境界点 $\xi \in \partial D$ を取り，球 $B = B(\xi, r)$ に対して $E = \overline{B} \setminus D$ とおくと



$$\inf_B {}^{2B}\widehat{\mathbf{R}}_1^E \le \frac{\mathrm{Cap}_{2B}(E)}{\mathrm{Cap}_{2B}(\overline{B}))} \le A \inf_B {}^{2B}\widehat{\mathbf{R}}_1^E.$$

これを調和測度で言い換えよう．$2B \setminus E$ で $\omega(\partial(2B); 2B \setminus E) = 1 - {}^{2B}\widehat{\mathbf{R}}_1^E$ であるから

$$1 - \frac{1}{A} \frac{\mathrm{Cap}_{2B}(E)}{\mathrm{Cap}_{2B}(\overline{B})} \le \sup_B \omega(\partial(2B); 2B \setminus E) \le 1 - \frac{\mathrm{Cap}_{2B}(E)}{\mathrm{Cap}_{2B}(\overline{B})}.$$

以上を繰り返して Wiener 判定法を得る．

■容量密度条件■ Wiener 判定法より少し強い条件を与えよう．

定義 **11.** D が**容量密度条件** (CDC) をみたすとは定数 $\eta, r_0 > 0$ があって

$$\frac{\mathrm{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r) \setminus D)}{\mathrm{Cap}_{B(\xi,2r)}(B(\xi,r))} \ge \eta \quad (\forall \xi \in \partial D,\ 0 < \forall r < r_0)$$

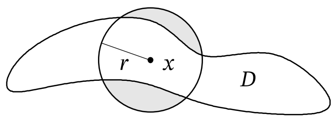
となることをいう．

2 次元において連続体は正の容量をもつので，連結境界点は必ず正則境界点となり，単連結平面領域は CDC をみたすことがわかる．CDC のもとでは，一様な強バーリアが存在し（**一様正則**），Hardy の不等式が成り立ち，ラプラシアンの最小固有値が評価される（[12]）．

■容量的幅■ 容量を用いて領域の幅を測ることができる．

定義 **12.** 開集合 D の**容量的幅** $w_\eta(D)$ を

$$\inf\left\{r > 0 : \frac{\mathrm{Cap}_{B(x,2r)}(B(x,r) \setminus D)}{\mathrm{Cap}_{B(x,2r)}(B(x,r))} \ge \eta \quad \forall x \in D\right\}$$



で定義する．ここに $0<\eta<1$ であり，η を取り替えても比較可能な量になる．

注意 6. (i) $0<\eta<\eta'<1$ とすると $w_\eta(D) \le w_{\eta'}(D) \le Aw_\eta(D)$．ただし定数 A は η, η', n にのみ依存する．

(ii) $v_D = \int_D G_D(\cdot, y)dy$ を**ねじり関数**とすると，$\|v_D\|_\infty \approx w_\eta(D)^2$.

(iii) D のラプラシアンに関するスペクトラムの下端 $\lambda_{\min}(D)$ は $w_\eta(D)^{-2}$ と比較可能.

(iv) $\dfrac{1}{\|v_D\|_\infty} \le \lambda_{\min}(D) \le \dfrac{4+3n\log 2}{\|v_D\|_\infty}$ （[39, Theorem 1], [40]）.

(v) $\lambda_{\min}(D) \approx w_\eta(D)^{-2}$.

注意 6 と Persson [36] の議論を組み合わせると次の定理を得る．

定理 13. D のラプラシアンが本質的スペクトラムをもたない必要十分条件は

$$\lim_{R\to\infty} w_\eta(D \setminus \overline{B}(0,R)) = 0. \tag{8}$$

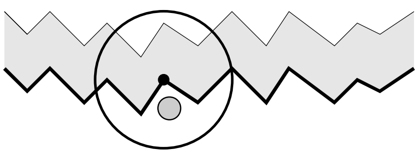
注意 7. 負曲率多様体 M のリッチ曲率が $\mathrm{Ric} \ge -K$ と負定数 $-K$ で下から支えられているとする．$D \subset M$ に対して，$\|v_D\|_\infty$ が十分小さければ

$$\frac{1}{\|v_D\|_\infty} \le \lambda_{\min}(D) \le \frac{A}{\|v_D\|_\infty}.$$

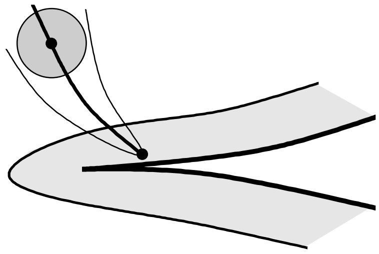
ただし A は K, n による ([10])．したがって，M 内の領域 D に対してもそのラプラシアンが本質的スペクトラムをもたない必要十分条件は (8) である．

▌境界層の容量的幅▌ Bass-Budzy は境界 Harnack 原理の証明に**箱議論**を用いたが，その議論で外部条件が不要になるのは次の結果による．

命題 14 (境界層の容量的幅)**.** 領域 D が容量密度条件をみたすか，John 領域であれば，$w_\eta(\{x \in D : \delta_D(x) < r\}) \le Ar$ となる．



容量密度条件（一様正則）



John 領域（非正則）

8　熱方程式へ

Green 関数 $G_D(x,y)$ と熱核 $p_D(t,x,y)$ は

$$G_D(x,y) = \int_0^\infty p_D(t,x,y)dt$$

で結びついている．熱核 $p_D(t,x,y)$ は x から y へ移る推移確率と考えられ，確率論的な議論ではラプラス方程式と熱方程式をほとんど同時に扱うことができる．Green 関数の境界挙動と熱核の境界挙動は密接に関係し，熱方程式に対する Martin 境界も研究されている．

Intrinsically Ultracontractivity (IU)　ここでは Davies-Simon [22] によって導入された Intrinsically Ultracontractivity について考察する．

定義 **15.** D が IU とは以下の 2 条件が成立することである．

(i) ラプラシアンは本質的スペクトラムをもたず，最小固有値 $\lambda_D > 0$ で正の固有関数 $\varphi_D > 0$ をもつ．$\|\varphi_D\|_2 = 1$ と正規化する．

(ii) 各時刻 $^\forall t > 0$ に対し，t に依存する正定数 c_t, C_t があって

$$c_t\varphi_D(x)\varphi_D(y) \le p_D(t,x,y) \le C_t\varphi_D(x)\varphi_D(y) \quad \text{for } ^\forall x, {}^\forall y \in D.$$

Cranston-McConnell の不等式　IU から Green ポテンシャルの情報が得られる．

定理 **16.** D が IU ならば Cranston-McConnell の不等式

$$\frac{1}{u(x)}\int_D G_D(x,y)u(y)dy \le A$$

がすべての正優調和関数 u に対して成り立つ．ここで A は D のみに依存し，u にも x にも依存しない．

証明. IU より少し弱い条件：ある $t_0 > 0$ に対して $p_D(t_0,x,y) \le C_{t_0}\varphi_D(x)\varphi_D(y)$ が成り立てば，Cranston-McConnell の不等式が成り立つことを示そう．（IU とはこの t_0 がいくらでも 0 に近く取れることである．）

Green 関数を

$$G_D(x,y) = \int_0^\infty p_D(t,x,y)dt = \int_0^{t_0} p_D(t,x,y)dt + \int_{t_0}^\infty p_D(t,x,y)dt$$

と分解する．

u を正優調和関数とする．優調和関数を時間不変な熱方程式の優解とみて比較原理を用いると，

$$\int_D p_D(t,x,y)u(y)dy \le u(x)$$

がすべての $t>0$ に対して成り立つ．とくに

$$\int_0^{t_0} dt \int_D p_D(t,x,y)u(y)dy \le \int_0^{t_0} u(x)dt = t_0 u(x).$$

一方，IU の条件の熱核の上からの評価 $p_D(t_0,x,y) \le A_{t_0}\varphi_D(x)\varphi_D(y)$ から自動的に $t \ge t_0$ に対して $p_D(t,x,y) \le A_{t_0}e^{\lambda_D t_0}\varphi_D(x)\varphi_D(y)$ となるから

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{\infty} dt \int_D p_D(t,x,y)u(y)dy &\le \int_{t_0}^{\infty} dt \int_D C_{t_0}e^{-\lambda_D(t-t_0)}\varphi_D(x)\varphi_D(y)u(y)dy \\ &= \frac{C_{t_0}e^{\lambda_D t_0}}{\lambda_D}\int_D \varphi_D(x)\varphi_D(y)u(y)dy.\end{aligned}$$

さらに IU の条件の熱核の下からの評価 $C'_{t_0}\varphi_D(x)\varphi_D(y) \le p_D(t_0,x,y)$ を用いると最後の項は

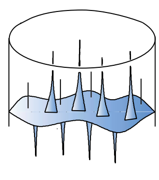
$$\frac{C_{t_0}e^{\lambda_D t_0}}{\lambda_D C'_{t_0}}\int_D p_D(t_0,x,y)u(y)dy \le \frac{C_{t_0}e^{\lambda_D t_0}}{\lambda_D C'_{t_0}}u(x)$$

以下である．以上をまとめると

$$\int_D G_D(x,y)u(y)dy \le \Big(t_0 + \frac{C_{t_0}e^{\lambda_D t_0}}{\lambda_D C'_{t_0}}\Big)u(x). \qquad \square$$

注意 **8.** Cranston-McConnell [20] は IU でなくても面積有限な平面領域に対して Cranston-McConnell の不等式が成り立つことを示した．3 次元以上では不等式成立のためには領域にごく弱い条件が必要である．定理 16 は IU はそのための 1 つの十分条件であることを示している．参照 [19]，[15]，[9]，[2].

IU は非常に複雑な領域でも成り立つ．

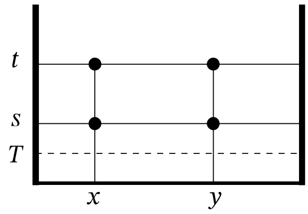


定理 17 ([23])**.** グラフで表される有界領域はすべて IU である．境界関数のなめらかさはまったく不要である．

放物型 Harnack 原理（PBHP）　IU は GBHP とよく似ていて，放物型 Harnack 原理（PBHP) と見ることができる．

定理 18 (IU $\iff$ PBHP)**.** D は IU とする．u, v が熱方程式の正値解で，境界条件 $u = v = 0$ on $(0,\infty)\times\partial D$ をみたすとする．このとき $T > 0$ に対して

$$\frac{u(t,x)}{u(t,y)} \Bigg/ \frac{v(s,x)}{v(s,y)} \le C_T \quad \text{for } {}^{\forall}x, y \in D,\ {}^{\forall}s, t \ge T \tag{9}$$



が成り立つ．さらに $T \to \infty$ のとき $C_T \to 1$ となる．

証明は容易である．IU の仮定から任意の $\varepsilon > 0$ に対して $T(\varepsilon) > 0$ で $t \ge T(\varepsilon)$ のとき，

$$1-\varepsilon \le \frac{e^{\lambda_D t} p_D(t,x,y)}{\varphi_D(x)\varphi_D(y)} \le 1+\varepsilon \quad \text{for } {}^{\forall}x, y \in D.$$

となる．u を D 上の測度 μ による熱核の積分 $u(t,x) = \displaystyle\int_D p_D(t,x,z)d\mu(z)$ で表すと，$t \ge T(\varepsilon)$ のとき

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{\varphi_D(x)}{\varphi_D(y)} \le \frac{u(t,x)}{u(t,y)} \le \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{\varphi_D(x)}{\varphi_D(y)}$$

となる．v も同様にして，比を取れば定理が得られる．

注意 9. 内部の放物型 Harnack 不等式から楕円型 Harnack 不等式が導かれるように PBHP が GBHP が導かれると錯覚しそうだが，そうではない．$u = v = 0$ が側面境界 $(0,\infty)\times\partial D$ 全体で成り立つことは厳しい条件で，これをみたす時間依存しない解は 0 しかなく，この場合は PBHP は無意味になり，GBHP を導くことはできない．

容量的幅を用いて GBHP と IU の十分条件を与えることができる．詳しい証明は [3]，[7] を参照．次節で概略を述べよう．

定理 19 ([7])**.** $x_0 \in D$ を固定して，$g(x) = G(x, x_0)$ とおき，$w_\eta(\{x \in D : g(x) < t\})$ を $w_\eta(g < t)$ と表す．

(i) $\displaystyle\int_0 w_\eta(g < t)\frac{dt}{t} < \infty$ ならば D は GBHP をみたす．

(ii) $\displaystyle\int_0 w_\eta(g<t)^2\frac{dt}{t}<\infty$ かつ (8) ならば D は IU である．

注意 **10.** (i) と (ii) の違いは指数だけだが，(ii) ははるかに寛大な条件である．グラフで表される有界領域は (ii) をみたし，IU となることがわかる．そのためには除外集合を許した内部 Harnack 原理が本質的な役割をはたす（[17]，[6]）．

9 IU の証明・放物型箱議論

IU の証明の本質は生存確率 $P_D(t,x,D)=\displaystyle\int_D p_D(t,x,y)dy$ を Green 関数で評価することである．定義から $P_D(t,x,D)$ は初期値・境界問題

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\Big)u&=0 \quad \text{in } (0,\infty)\times D\\ u&=1 \quad \text{on } \{0\}\times D\\ u&=0 \quad \text{on } (0,\infty)\times\partial D\end{aligned}$$

の解である．これを境界で消える Green 関数 $g(x)=G_D(x,x_0)$ で上から評価することは非自明であり，意味のあることである．

定理 **20.** 定理 19 の (ii) の条件をみたせば，任意の $t_0>0$ に対して $A_{t_0}>0$ が存在して，

$$P_D(t,x,D)\le A_{t_0}g(x) \quad \text{in } [t_0,\infty)\times D. \tag{10}$$

この定理から IU を導くのは容易である．

IU の証明. 熱核の領域に関する単調性と，ユークリッド空間全体の熱核の表現から $p_D(t,x,y)\le p_{\mathbb{R}^n}(t,x,y)\le At^{-n/2}$ である．したがって熱核の半群性と対称性から

$$\begin{aligned}p_D(2t,z,y)&=\int_D p_D(t,z,w)p_D(t,w,y)dw\\ &\le At^{-n/2}\int_D p_D(t,w,y)dw=At^{-n/2}P_D(t,y,D)\end{aligned}$$

となり，さらに

$$\begin{aligned}\int_D p_D(t,x,z)p_D(2t,z,y)dz&\le At^{-n/2}\int_D p_D(t,x,z)P_D(t,y,D)dz\\ &=At^{-n/2}P_D(t,x,D)P_D(t,y,D).\end{aligned}$$

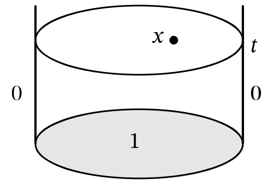
Green 関数は

$$g(x) \le A\varphi_D(x) \quad \text{for } x \in D \setminus B(x_0, \delta_D(x_0)/2)$$

をみたすから，(10) が示されれば，$t \ge t_0$ のとき

$$p_D(3t, x, y) \le A_{t_0}\varphi_D(x)\varphi_D(y) \quad \text{for } x, y \in D.$$

となって熱核の上からの評価式が得られる．（必要ならば $3t$ を t に置き換える．）IU の一般論により，熱核の上からの評価は自動的に下からの評価を導くので D が IU であることが示された． □



ひるがえって定理 20 の証明は，ユークリッド空間内の任意の開集合 U に対する生存確率の評価：次元のみに依存する定数 $A_0, A_1 > 0$ があって，

$$P_U(t, x, U) \le A_0 \exp\Big(-\frac{A_1 t}{w_\eta(U)^2}\Big) \quad \text{for } t > 0$$

を用い，定理 19 の (ii) の条件に適合して時空を分割することによって与えらる．

実際，$\displaystyle\int_0 w_\eta(g < t)^2 \frac{dt}{t} < \infty$ を仮定すると，単調減少正数列 $\alpha_j \downarrow 0$ と有界単調増加正数列 $t_j \uparrow t_\infty < \infty$ を適切にとって，$D_j = \{g(x) < \alpha_j\}$，$E_j = \{\alpha_{j+1} \le g(x) < \alpha_j\}$，$\widetilde{D}_j = (t_{j-1}, \infty) \times D_j$，$\widetilde{E}_j = (t_j, \infty) \times E_j$ とおく．図 7 参照．このとき比

$$q_j := \sup_{(t,x)\in\widetilde{E}_j} \frac{P_D(t, x, D)}{g(x)}$$

が j によらず有界であることが帰納法と熱方程式の比較原理によって得られる．

実際，最初のステップは

$$\frac{P_{D_1}(t_1, x, D_1)}{g(x)} \le A_0 \exp\Big(\alpha_2 - \frac{A_1 t}{w_\eta(D_1)^2}\Big) \quad \text{for } (t, x) \in \widetilde{E}_1$$

から得られる．図 8 参照．

$j \to \infty$ のとき $\widetilde{E}_j$ は側面境界まで到達するので，$\{q_j\}$ の有界性は

$$P_D(t, x, D) \le Ag(x) \quad \text{for } (t, x) \in (t_\infty, \infty) \times D$$

であることを意味し (10) を得る．

注意 **11.** 放物型箱議論では経過時間差を用いて生存確率を評価した．一方，楕円型箱議論では距離を用いて調和測度を Green 関数で評価する．詳しくは [7] 参照．

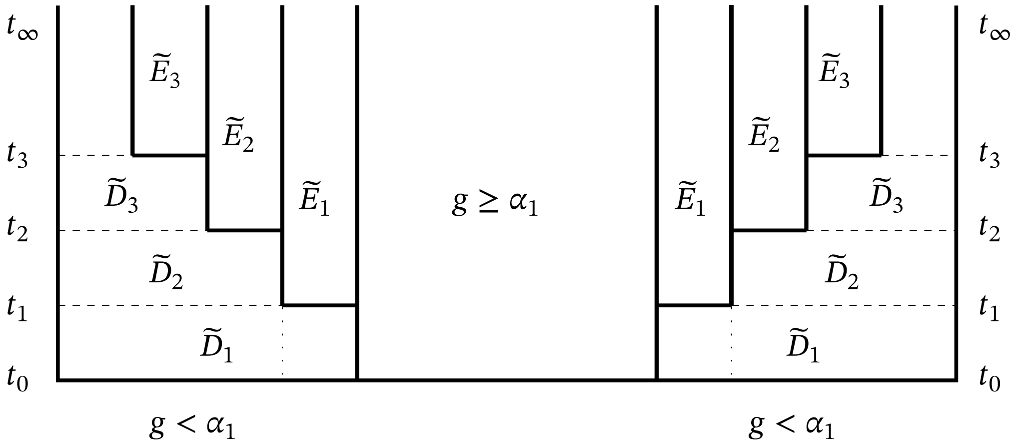


図 7　放物型箱議論

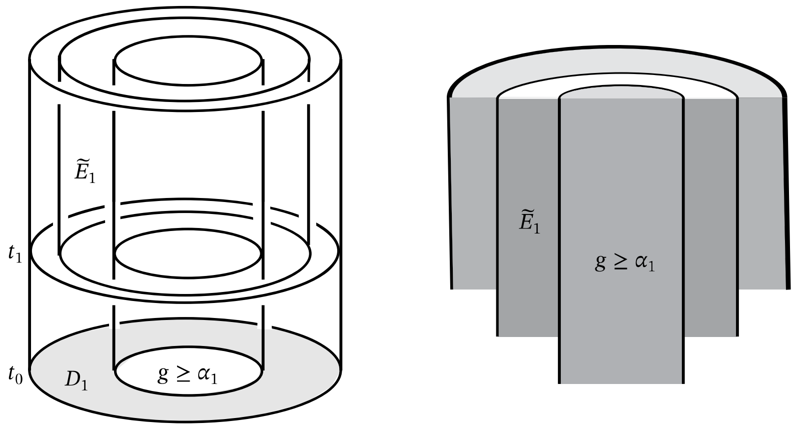


図 8　放物型箱議論・最初のステップ

10　境界層の容量的幅

定理 19 の条件は境界層の容量的幅の評価である．具体的なグラフ領域で考察してみよう．

Hölder 領域　$t \geq 0$ に対する単調増加連続正値関数 $\psi(t)$ で $\psi(0) = 0$ となるものを連続率という．$\mathbb{R}^{n-1}$ 上の関数 f が ψ-Hölder 連続とは

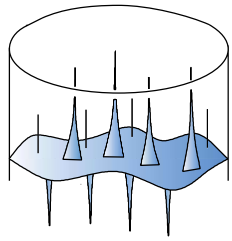
$$|f(x') - f(y')| \leq A\psi(|x' - y'|)$$

をみたすときをいう．

- ψ-Hölder 領域: 境界が局所的に ψ-Hölder 連続な関数のグラフ

• α-Hölder 領域: $\psi(t) = t^\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$

• ψ_α-Hölder 領域: $\psi_\alpha(t) = \dfrac{1}{(\log 1/t)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ 対数 Hölder-領域



L^Φ-領域 $f(x')$ を $B'(0,R)$ 上の上半連続関数とし，$D_f = \{(x', x_n) : x_n > f(x')\}$ とおく．

• L^∞-領域: f は有界 (Davis [23])

• L^p-領域: $f \in L^p(B'(0,R))$ (Bass-Burdzy [17])

• L^Φ-領域: $f \in L^\Phi(B'(0,R))$,

$$\text{i.e.,} \int_{B'(0,R)} \Phi(|f(x')|)dx' < \infty$$

L^Φ-領域において境界をあたえる関数 $f(x')$ は連続でなくてよく，$n-1$ 次元 Lebesgue 測度に関して a.e. にしか定まらない．$f(x')$ の上半連続性は D_f が開集合であることしか保証せず，D_f は非常に複雑な領域になりうる．そのような状況においても境界層の容量的幅を評価することができる．

定理 **21** (境界層の容量的幅)**.** 小さな $t > 0$ に対して $w_\eta(g < t) = w_\eta(\{x \in D : g(x) < t\})$ と書く．このとき以下が成り立つ．

(i) QHB(α) 条件と CDC をみたせば $w_\eta(g < t) \le \dfrac{A}{(\log 1/t)^{1/\alpha}}$

(ii) α-Hölder 領域ならば， $w_\eta(g < t) \le At^\alpha$

(iii) ψ_α-Hölder 領域ならば， $w_\eta(g < t) \le \dfrac{A}{(\log 1/t)^\alpha}$

(iv) ψ-Hölder 領域ならば， $w_\eta(g < t) \le A\psi(t)$（$\psi$ に緩い条件）

(v) L^∞-領域ならば， $w_\eta(g < t) \le \dfrac{A}{\log 1/t}$

(vi) L^p-領域ならば，$w_\eta(g < t) \le \dfrac{A}{(\log 1/t)^{p/(n+p-1)}}$

証明. ここでは (i) だけ証明する．(ii)〜(vi) の証明には次節の除外集合を許した内部 Harnack 原理が必要である．QHB(α) を仮定すると，擬双曲距離が 2 点を結ぶ Harnack 連鎖の長さに対応することから通常の Harnack 不等式より

$$g(x) \ge \exp\Big\{ -A\Big(\frac{\delta_D(x_0)}{\delta_D(x)}\Big)^\alpha \Big\}$$

となる．したがって

$$\{x : g(x) < t\} \subset \{x : \delta_D(x) \le \frac{A}{(\log 1/t)^{1/\alpha}}\}$$

となり，命題 14 より，$w_\eta(g<t) \le \dfrac{A}{(\log 1/t)^{1/\alpha}}$. □

定理 19 と定理 21 を組み合わせれば，大局的境界 Harnack 原理（GBHP）と Intrinsically Ultracontractivity (IU) に関する多くの結果を導くことができる．

定理 **22.** (i) $0<\alpha<1$ に対して，QHB(α) 条件と CDC をみたせば GBHP が成り立つ．

(ii) $0<\alpha<2$ に対して，QHB(α) 条件と CDC をみたせば IU である．

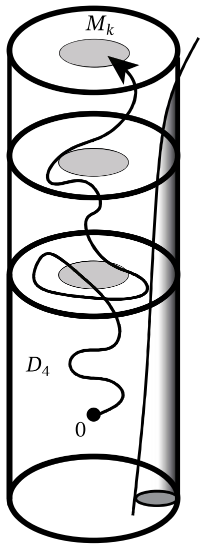
(iii) $0<\alpha\le 1$ に対する α-Hölder 領域および $\alpha>1$ に対する ψ_α-Hölder 領域は GBHP をみたす．

(iv) L^∞-領域および $p>n-1$ に対する L^p-領域は IU である．

11 除外集合を許した内部 Harnack 原理

定理 21 の (ii)〜(vi) を示すには除外集合を許した内部 Harnack 原理が必要となる．

確率論のアイデア Bass-Burdzy [17] は下半連続関数 $f(x')$，$x'\in\mathbb{R}^{n-1}$，のグラフで表される領域 $D_f=\{(x',x_n): x_n>f(x'), |x'|<1\}$ における調和測度を確率論の観点から研究した．



定理 **C** ([17, Lemma 2.4]). 自然数 k に対して

- $D_k=\{|x'|<1, \max\{-1,f(x')\}<x_n<k\}$
- $\widetilde{D}_k=\{|x'|<1,-1<x_n<k\}$
- $M_k=\{|x'|<\frac{1}{2}, x_n=k\}$

とおく．このとき $0<p_0<1$ が存在して

$$P^0(T(\partial D_4)=T(\partial\widetilde{D}_4))\ge p_0 \implies P^0(T(\partial D_k)=T(M_k))\ge \exp(-ck).$$

ただし，$T(E)$ は 0 から出発した Brown 運動が最初に E にあたる時間であり，P^0 はその確率を表す．

定理 C では f のなめらかさがまったく不要である．条件 $P^0(T(\partial D_4)=T(\partial\widetilde{D}_4))\ge p_0$ を調和測度で記述すると $\omega^0(\partial D_4\cap\partial D_f; D_4)\ge p_0$ となる．ここで p_0 は 1 に極めて近い

ことに注意すれば

$$\omega^0(\partial D_4 \cap \partial D_f; D_4) \geq p_0 \implies \frac{\mathrm{Cap}_{\widetilde{D}_4^*}(D_4 \setminus D_f)}{\mathrm{Cap}_{\widetilde{D}_4^*}(\widetilde{D}_4)} < \varepsilon_0$$

となる．この観察から領域がグラフで表される必要はなく，Harnack 連鎖の中に容量密度の小さい除外集合を許した Harnack 不等式に拡張されることがわかる．

除外集合を許した Harnack 不等式 図 9 のようにしっかり交わるループのない Harnack 連鎖 $\{B_j\}_{j=0}^J$ の中に除外閉集合 E が入っているとする（正確な定義は [6] 参照）．E が極集合ならば，除去可能定理によって E の外の有界正調和関数は E の上まで正調和に拡張することができ，Harnack 不等式が成り立つ．実は E が極集合でなくても容量密度が小さければ Harnack 不等式が成り立つ

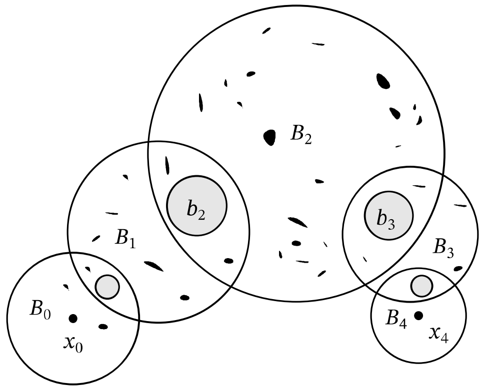


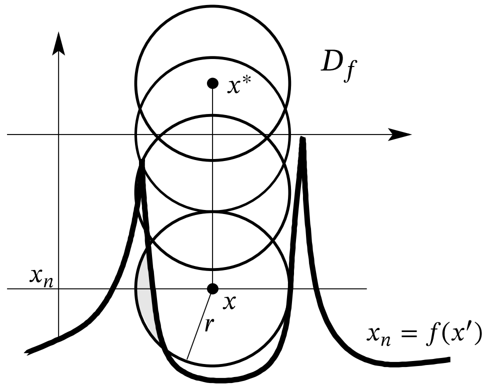
図 9　除外集合を許した Harnack 不等式

定理 23 ([6, Theorem 3.1])**.** 図 9 のように $\{B_j\}_{j=0}^J$ はしっかり交わるループのない Harnack 連鎖とする．このとき非常に小さい正定数 ε_0 と正数 A_2 があって除外閉集合 E が

$$\begin{aligned} & E \cap B_J = \emptyset \\ & {}^{2B_0}\widehat{\mathbf{R}}_1^{E\cap B_0}(x_0) < \varepsilon_0 \\ & \frac{\mathrm{Cap}_{2B_j}(E \cap B_j)}{\mathrm{Cap}_{2B_j(B_j)}} < \varepsilon_0 \quad (j = 1, \ldots, J-1) \end{aligned}$$

をみたせば，$B_0 \cup \cdots \cup B_J \setminus E$ 上の任意の正調和関数 h に対して

$$\frac{h(x_0)}{h(x_J)} \ge \exp(-A_2 J).$$



▌L^∞-領域▐ 除外集合を許した Harnack 不等式を利用して L^∞-領域（グラフで表される有界領域）は定理 19 (ii) をみたし IU であることを示そう．本質的なことは有界下半連続関数 $f(x')$ に対して $D_f = \{x_n > f(x'), |x'| < 1\}$ が定理 19 (ii) をみたすことである．小さな $t > 0$ に対して $r = \dfrac{A}{\log 1/t}$ とおく．ただし $A > 0$ は後で適切に選ぶ．ここで $r > \delta_D(x)$ かもしれず，$B(x,r)$ は D の外にはみ出しているかもしれないことに注意する．

さて ${}^{B(x,2r)}\widehat{\mathbf{R}}_1^{B(x,r)\setminus D}(x) < \eta$ を仮定すると，$\eta > 0$ が小さければ，$B(x,r)$ における D の外部の容量密度は小さい．左図のように x^* を x の「上の点」とすると，x^* に向かう Harnck 連鎖の球においては D の外部の容量密度はどんどん小さくなる．ここで x^* を D_f の内部の点とすると，f の有界性から Harnack 連鎖の長さ J は $J = \dfrac{|x_n|}{r} \le \dfrac{A}{r}$ をみたす．したがって除外集合を許した Harnack 不等式（定理 23）によって $\dfrac{g(x)}{g(x^*)} \ge \exp\Big(-\dfrac{A}{r}\Big)$ となる．さらに $r = \dfrac{A}{\log 1/t}$ の A を適切に選ぶことにより，

$$g(x) \ge \exp(-\log(1/t)) = t$$

となる．この対偶をとれば，

$$g(x) < t \implies {}^{B(x,2r)}\widehat{\mathbf{R}}_1^{B(x,r)\setminus D}(x) \ge \eta.$$

このことを変形した容量的幅

$$w_\eta^*(U) := \inf\Big\{r > 0 : {}^{B(x,2r)}\widehat{\mathbf{R}}_1^{B(x,r)\setminus U}(x) \ge \eta \quad {}^\forall x \in U\Big\}$$

で表現すれば，$w_\eta^*(g(x) < t) \le r = \dfrac{A}{\log 1/t}$ となる．一般に $w_\eta(U) \approx w_\eta^*(U)$ であるから，

$$\int_0 w_\eta(g < t)^2 \frac{dt}{t} \le \int_0 \frac{A}{(\log 1/t)^2} \frac{dt}{t} = \int^\infty \frac{A}{s^2} ds < \infty$$

となって，D_f が IU であることがわかる．

注意 **12.** 上の広義積分の収束にはまだ余裕がある．もう少し詳しい議論をすると $p > n - 1$ のとき L^p-領域は IU であることがわかる．

12 複雑領域のまとめ

今までに説明した複雑領域の関係は次のようになっている．

$$C^{2,\alpha} \subsetneq C^{1,1} = \text{球条件} \subsetneq \text{Lipschitz} \subsetneq \text{NTA} \subsetneq \text{一様} \subsetneq \text{内部一様} \subsetneq \text{John} \subsetneq \text{QHB}$$

$$\subsetneqq \text{Hölder} \subsetneq \text{有界グラフ領域} \subsetneq L^p\text{-領域}$$

NTA〜QHB 条件には座標軸は不要であり，距離測度空間でも定義できる．
これらの領域の性質は以下のようにまとめられる．

- NTA 領域までは外部条件があり，Dirichlet 問題に関して正則．
- 一様領域まではスケール不変境界 Harnack 不等式が成立し，Martin 境界は位相境界に同相．
- 内部一様領域では内部距離に関するスケール不変境界 Harnack 不等式が成立し，Martin 境界は内部距離に関する位相境界に同相．
- QHB(0) までと Hölder 領域までは大域的境界 Harnack 原理および IU が成立．
- $\alpha < 1$ ならば QHB(α)+CDC $\Longrightarrow$ 大域的境界 Harnack 原理および IU が成立．
- $\alpha < 2$ ならば QHB(α)+CDC $\Longrightarrow$ IU が成立．
- L^∞-領域（有界グラフ領域）および $p > n - 1$ に対する L^p-領域は IU が成立．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP17H01092，JP21K03281 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] H. Aikawa, *Integrability of superharmonic functions and subharmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 109–117. 12

[2] ———, *Norm estimate of Green operator, perturbation of Green function and integrability of superharmonic functions*, Math. Ann. **312** (1998), 289–318. 20

[3] ———, *Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain*, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 119–145. 11, 15, 21

[4] ———, *Potential-theoretic characterizations of nonsmooth domains*, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 469–482. 11

[5] ———, *Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate*, Math. Scand. **103** (2008), 61–76. 9

[6] ———, *Extended Harnack inequalities with exceptional sets and a boundary Harnack principle*, J. Anal. Math. **124** (2014), 83–116. 22, 27

[7] ———, *Intrinsic ultracontractivity via capacitary width*, Rev. Mat. Iberoam. **31** (2015), 1041–1106. 21, 23

[8] H. Aikawa, T. Kilpeläinen, N. Shanmugalingam, and X. Zhong, *Boundary Harnack principle for p-harmonic functions in smooth Euclidean domains*, Potential Anal. **26** (2007), 281–301. 3

[9] H. Aikawa and M. Murata, *Generalized Cranston-McConnell inequalities and Martin boundaries of unbounded domains*, J. Anal. Math. **69** (1996), 137–152. 20

[10] H. Aikawa, M. van den Berg, and J. Masamune, *Intrinsic Ultracontractivity for Domains in Negatively Curved Manifolds*, Comput. Methods Funct. Theory **21** (2021), 797–824. 18

[11] A. Ancona, *Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), 169–213. 10

[12] ———, *On strong barriers and an inequality of Hardy for domains in* $\mathbf{R}^n$, J. London Math. Soc. (2) **34** (1986), 274–290. 17

[13] D. H. Armitage, *Further results on the global integrability of superharmonic functions*, J. London Math. Soc. (2) **6** (1972), 109–121. 11

[14] R. Bañuelos, *Intrinsic ultracontractivity and eigenfunction estimates for Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 181–206. 15

[15] R. Bañuelos, *Lifetime and heat kernel estimates in nonsmooth domains*, Partial differential equations with minimal smoothness and applications (Chicago, IL, 1990), IMA Vol. Math. Appl., vol. 42, Springer, New York, 1992, pp. 37–48. 20

[16] R. F. Bass and K. Burdzy, *A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains*,

Ann. of Math. (2) **134** (1991), 253–276. 14

[17] ______, *Lifetimes of conditioned diffusions*, Probab. Theory Related Fields **91** (1992), 405–443. 22, 25, 26

[18] L. Carleson, *On the existence of boundary values for harmonic functions in several variables*, Ark. Mat. **4** (1962), 393–399. 8

[19] K. L. Chung, *The lifetime of conditional Brownian motion in the plane*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **20** (1984), 349–351. 20

[20] M. Cranston and T. R. McConnell, *The lifetime of conditioned Brownian motion*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **65** (1983), 1–11. 20

[21] B. E. J. Dahlberg, *Estimates of harmonic measure*, Arch. Rational Mech. Anal. **65** (1977), 275–288. 10

[22] E. B. Davies and B. Simon, *Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and Dirichlet Laplacians*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 335–395. 19

[23] B. Davis, *Intrinsic ultracontractivity and the Dirichlet Laplacian*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 162–180. 20, 25

[24] B. Fuglede, *Le théorème du minimax et la théorie fine du potentiel*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **15** (1965), 65–88. 16

[25] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition. 3

[26] G. Green, *Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Nottingham, 1828. 2

[27] R. A. Hunt and R. L. Wheeden, *On the boundary values of harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 307–322. 8

[28] ______, *Positive harmonic functions on Lipschitz domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **147** (1970), 507–527. 8

[29] D. S. Jerison and C. E. Kenig, *Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains*, Adv. in Math. **46** (1982), 80–147. 11

[30] S. Kakutani, *Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 706–714. 5

[31] J. T. Kemper, *A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 247–255. 10

[32] F.-Y. Maeda and N. Suzuki, *The integrability of superharmonic functions on Lipschitz*

domains, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 270–278. 11

[33] R. S. Martin, *Minimal positive harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **49** (1941), 137–172. 6, 7

[34] V. G. Maz'ja, *Sobolev spaces*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Translated from the Russian by T. O. Shaposhnikova. 12

[35] O. Perron, *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$*, Math. Z. **18** (1923), 42–54. 4

[36] A. Persson, *Bounds for the discrete part of the spectrum of a semi-bounded Schrödinger operator*, Math. Scand. **8** (1960), 143–153. 18

[37] S. D. Poisson, *Mémoir sur le calcul numérique des integrales définies*, Mémoires de l'acad. Royale des sci. de l'institute de France (1823, published 1827), 571–602. 2

[38] W. Smith and D. A. Stegenga, *Exponential integrability of the quasi-hyperbolic metric on Hölder domains*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **16** (1991), 345–360. 15

[39] M. van den Berg and T. Carroll, *Hardy inequality and L^p estimates for the torsion function*, Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009), 980–986. 18

[40] M. van den Berg, *Estimates for the torsion function and Sobolev constants*, Potential Anal. **36** (2012), 607–616. 18

[41] K.-O. Widman, *Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations*, Math. Scand. **21** (1967), 17–37 (1968). 3

[42] J. M. G. Wu, *Comparisons of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (1978), 147–167. 10