時間遅れフィードバックによるゆらぎの拡散制御
Control of diffusion by time-delayed feedback method

東北大学 材料科学高等研究所 安東弘泰
Hiroyasu Ando, AIMR, Tohoku University

June 2023

本稿は, [1] の内容を改めて解説したものである.

1 はじめに

非線形な物理や力学系の分野において, ノイズやカオスに起因する複雑なダイナミクスの制御に関する研究が, 1990 年頃から盛んに行われてきた [2, 3]. いわゆるカオス制御の研究である. カオス制御では, 小さな摂動でシステムを所望の状態へ制御することを目的としている. Ott らは, 適切なタイミングでパラメータに摂動を与えることにより, 力学系の軌道を鞍点の安定多様体に乗せるフィードバック制御手法を提案した [4]. この手法は, 物理系や生物系での実験でもその有効性をが示された [2]. このほか, Pyragas によって提案された時間遅れフィードバック制御法 (DFC 法) は, より簡易な制御スキームにより, 不安定周期解を安定化するフィードバック制御を実現した. DFC 法は, OGY 法と同様に電子回路などのさまざまな実験系への応用が可能なことから多くの注目を集めた [5]. 一般には時間遅れの効果はシステムを不安定化するように働くが, DFC 法は決定論的システムにおいて不安定な軌道を安定化可能であることを示した. 近年, 著者らは単純な確率システムとしてのランダムウォークに DFC 法を適用することで, その拡散係数を制御できることを示した [6].

一方, このような確率的拡散現象は, 実システムとしてノイズのある位相同期回路 (PLL) においても観察することができ, その位相差を状態変数とした数理モデルが知られている [7].

そこで本稿では， DFC 法によるランダムウォークの拡散制御法をノイズが存在する PLL の位相振動子モデルに適用し, 位相スリップの制御可能性をシミュレーションにより検討する． また，DFC 法によりランダムウォークの拡散が制御可能なしくみを概説する.

2 位相スリップの制御

2.1 DFC による拡散制御

まず，以下のようなランダムウォークの離散時間システムを考える.

$$\theta_{n+1} = \theta_n + D\xi_n. \tag{1}$$

ここで, n は時間を表す整数，θ_n は実数値をとる状態変数, ξ_n は $N(0,1)$ に従って生成されるノイズとする．また，D はノイズの振幅とする．これに対して, 位相が ϕ で表される振動子に周期外力 (位相 ψ) とノイズが加わったシステムを考える. 振動子と外力の位相差を $\theta := \phi - \psi$ として捉えると, この位相差のダイナミクスは以下のように表される [7].

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \sigma \sin\theta_n + D\xi_n. \tag{2}$$

ここで, σ は周期外力の強さを表す定数である. このモデルをシミュレーションすると, ノイズの影響のため一時的に位相同期状態が外れる. このとき, 同期している位相差が 2π ずれる位相スリップが観測され, 長時間でみると θ_n がランダムウォークのように変化する.

そこで, 位相差のダイナミクス (2) において確率的な θ_n の挙動を DFC 法で制御することを考える. 先行研究 [6] においては，(1) の形のシステムへ DFC 法を適用して拡散を制御することを示した. 具体的には, 一般の非線形な離散時間力学系 $x_{n+1} = f(x_n) + D\xi_n$ に関して検討した. ここで, x_n が時刻 n の変数である. この力学系が安定固定点 $\tilde{x}$ をもつとすると, この固定点まわりで線形化して, $K = 1 - f'(\tilde{x})$ とすると元の力学系は, $x_{n+1} = x_n + D\xi_n - K(x_n - \tilde{x})$ となり, $|K| < 1$ のため拡散は起きない. もし固定点が中立安定の場合, つまり $K = 1$ のとき力学系は $x_{n+1} = x_n + D\xi_n$ となり拡散が起こる. そこで, 中立安定固定点まわりでは, 制御項として

$-K(x_n - x_{n-\tau})$ の DFC 型の制御を考える．一方で, 安定固定点まわりでは制御項を $K(x_{n-\tau} - \tilde{x})$ として追加すれば同様の形式で対象システムを記述できる．ここで注意すべきことは, DFC 法も加味した形式では, 時間遅れの項の符号は正となることである．

以上を背景にして本稿では以下の形によってシステム (2) を制御できるか数値的に検証する．

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \sigma \sin \theta_n + D\xi_n - K(x_n - x_{n-\tau}). \tag{3}$$

ここで，K は制御入力の強度を表す定数であり, τ が整数値の遅れ時間である．次に数値シミュレーションによる制御の有効性を示す．

2.2 シミュレーション結果

図 1 は, システム (3) を $\tau = 0$ と $\tau = 100$ とした場合にシミュレーションした θ_n の時間的変動を示している．この時系列における急激な値の変化が位相スリップに相当する．図から明らかな通り, DFC 法を適用する（$\tau = 100$）ことにより, 位相スリップの回数が減少し, 位相の拡散も減少していることがわかる．さらに, DFC 法の拡散制御の程度に関して遅れ時間に対する依存性を検証するために拡散係数を $\lim_{n\to\infty} 1/n\langle[\theta_n - \theta_0]^2\rangle$ と定義して計算した．ここでは $n \to 10^6$ をもって十分に大きい値として計算した．拡散係数を遅れ時間 τ に関してプロットしたものが図 2 である．$K = 0.3, D = 1, \sigma = 1$ とした．時間遅れ τ とともに拡散係数の値も減少していることがわかる．特に, その減衰は $\sim 1/\tau^2$ と「べき」になっており, ランダムウォークの制御 [6] の結果と一致していることがわかる．ただし有限時間での拡散係数の計算のため, 時間遅れに関するべき減衰はゲイン K やノイズの強度 D にも依存する．以下では, このべき減衰に関する考察を述べる．

2.3 拡散制御のメカニズム

ここではシステム (3) の代わりに, (1) に DFC 法を適用したシステム：

$$x_{n+1} = x_n + D\xi_n - K(x_n - x_{n-\tau}) \tag{4}$$

に関して, 拡散係数が τ に依存して減少する構造の概略を説明する．これは, 拡散係数を計算する際に θ_n が十分に大きい場合, (3) の第 2 項の影響が小さいと仮定したことによる．

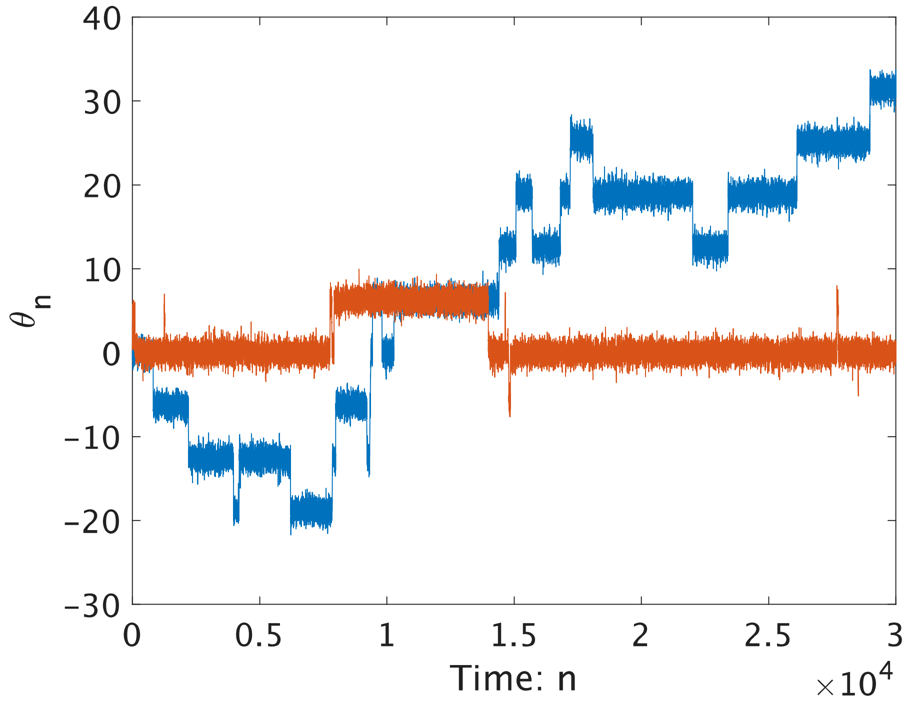

図 1: Time series of θ_n with respect to $\tau = 0, 100$ for (3). $K = 0.1$, $D = 0.8$, $\sigma = 1$.

まず, 式 (4) のフィードバック項は, 以下のように展開できる.

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-\tau} &= x_n - x_{n-1} \\ &\quad + x_{n-1} - x_{n-2} \\ &\quad + x_{n-2} - x_{n-3} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_{n-\tau+1} - x_{n-\tau} \end{aligned}$$

ここで, (4) から $x_{n+1} - x_n = D\xi_n - K(x_n - x_{n-\tau})$ の関係があるため, 上述のように展開した各差分 $x_n - x_{n-1}$ は, $D\xi_{n-1} - K(x_{n-1} - x_{n-\tau-1})$ と書くことができる. よって以下の通りとなる.

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-\tau} &= D\xi_{n-1} - K(x_{n-1} - x_{n-\tau-1}) \\ &\quad + D\xi_{n-2} - K(x_{n-2} - x_{n-\tau-2}) \\ &\quad + D\xi_{n-3} - K(x_{n-3} - x_{n-\tau-3}) \end{aligned}$$

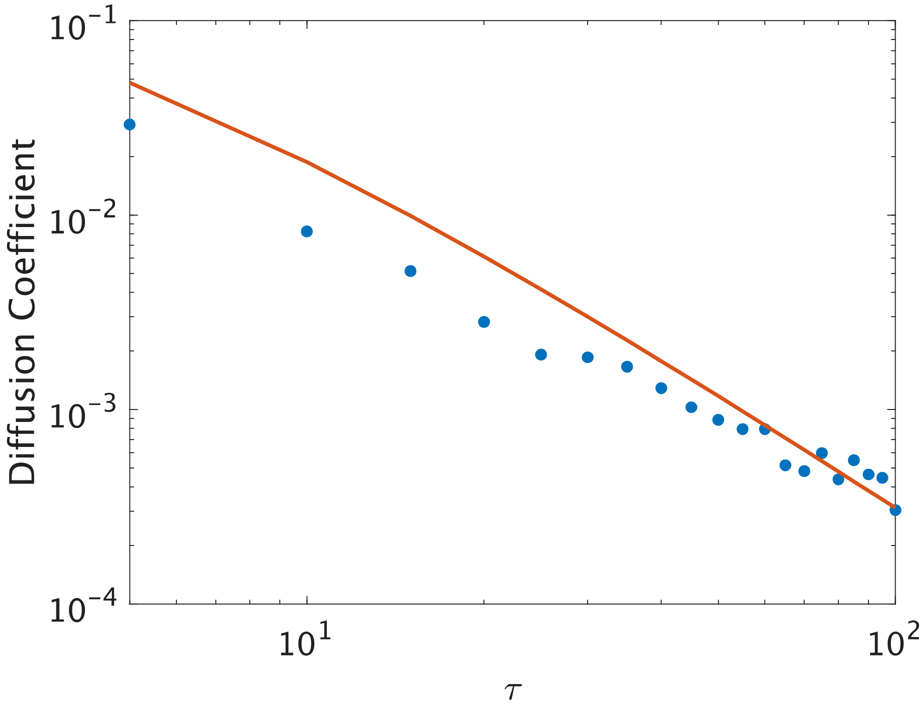

図 2: Diffusion Coefficients for $n = 1,000,000$ time steps with respect to τ. $K = 0.3,\ D = 1.0,\ \sigma = 1$. The results are the average of 100 trials.

$$
\begin{aligned}
&\vdots \\
&+D\xi_{n-\tau} - K(x_{n-\tau} - x_{n-\tau-\tau}).
\end{aligned}
$$

展開した右辺の各 τ 時間の差分の項も同様に τ 行に展開することが可能である．これにより，1つの τ 時間ステップ分の差分 $x_n - x_{n-\tau}$ に関して，$D\xi_*$ が τ 個出現し，さらにそれぞれの $D\xi_*$ に対応した τ 時間ステップ分の差分も τ 個出現する．以上より，(4) の $D\xi_n - K(x_n - x_{n-\tau})$ の項は，以下のような級数で解釈することが考えられる．

$$D\xi_n - K(x_n - x_{n-\tau}) = D\xi^{(0)} - K\tau D\xi^{(1)} + (-K\tau)^2 D\xi^{(2)} + \cdots.$$

ここで $\xi^{(i)}$ は，各時間ステップで独立な ξ_n を τ^i 個分まとめた表記である．この級数に関して，$|K\tau| < 1$ で，かつ各 $\xi^{(*)}$ が全て独立であると仮定すれば，上記の無限級数の和は，$D\xi/(1 + K\tau)$ の形で表せる．したがって，(4) は実効的に

$$x_{n+1} \approx x_n + \frac{D\xi}{1 + K\tau} \tag{5}$$

とかけて, 拡散係数が $1/\tau^2$ とともに減少することがわかる. ここで注意すべきは, 離散時間システムにおいては $\xi^{(*)}$ の独立性が成り立たないため, 以上の議論は厳密ではないが, 連続時間系の遅れ時間確率微分方程式においては厳密な説明が可能である [6]. ここでは簡単のために離散時間システムとして上記のように説明した.

3 おわりに

本稿では, カオス制御法の一つである時間遅れフィードバック制御法をノイズと周期外力で駆動された位相スリップモデルに適用した. 位相スリップのモデルとしては, 位相同期回路の数理モデルを簡易化した離散時間力学系に適用し, 数値シミュレーションにより制御法の有効性を示した. 数値シミュレーションの結果, 時間遅れを大きくすることにより位相スリップの回数を減少させるとともに, 拡散係数も減少することがわかった. さらに拡散係数の減衰は $1/\tau^2$ のオーダーであることも確認した. 以上の数値検証により, 実現象での位相同期回路などの位相スリップ解消のためにDFC法を活用する方向性が視野に入った. また, 上記の位相スリップモデルとほぼ同様のランダムウォークに時間遅れフィードバック制御を適用した離散時間力学系モデルに対して, その拡散係数を理論的に評価する解析を天下り的に説明した. 最近の文献 [8] では, [6] の結果などを実験により検証し, よりアドバンスな理論および実験検討を行っている. この検討も含めて今後は, 位相スリップの起こる実システムを対象にした提案手法の改良とその実効性の検証を進めることが考えられる. また, その他の確率システムにおける時間遅れフィードバック法による拡散制御の有効性検証も重要な課題である. 本研究は, JSPS 科研費 18K03433 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] 安東弘泰, 小林幹, 竹原浩太, “時間遅れフィードバック制御の確率システムへの応用”, 第 61 回自動制御連合講演会 , 南山大学 (2018).

[2] S. Boccaletti et al., “The control of chaos: theory and applications”, *Phys. Rep.*, **329**, 103 (2000).

[3] S. Boccaletti et al., “The synchronization of chaotic systems”, *Phys. Rep.*, **366**, 1 (2002).

[4] E. Ott et al., "Controlling chaos", *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 1196 (1990).

[5] K. Pyragas, "Continuous control of chaos via self-controlling feedback", *Phys. Lett. A*, **170**, 421 (1992).

[6] H. Ando, K. Takehara and M. U. Kobayashi, "A Feedback Control of Fluctuations in Simple Molecular Dynamics" , *Phys. Rev. E*, **96**, 012148 (2017).

[7] A. S. Pikovsky et al., "Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving", *Physisca D*, **104**, 219 (1997)

[8] M. C. R. Bell-Davies et al., "Dynamicsofacolloidalparticledrivenbycontinuoustime-delayedfeedback", *Phys. Rev. E*, **107**, 064601 (2023).