Joint value distribution of Dirichlet L-functions in the strip $1/2 < \sigma < 1$

東京工業大学理学院数学系　井上 翔太
Shōta Inoue
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1　導入

本稿では筆者と Junxian Li 氏の共同研究 [5] で得られた, Dirichlet L 関数の同時値分布についての結果を述べる. Riemann ゼータ関数 ζ の値分布は ζ の零点分布や素数分布と関係があるため, 重要な研究対象である. Dirichlet L 関数は Riemann ゼータ関数の一般化のひとつである. 本稿では, 我々の研究の動機を明確にするために, 導入で Dirichlet L 関数の値分布の素数分布への応用について述べる. その後にいくつかの先行研究を紹介し, 我々が得た定理について述べる.

我々の主定理は Dirichlet L 関数の同時分布に対する漸近公式である. 我々が証明した漸近公式は, Dirichlet L 関数の確率論的従属性および, 同時極大値評価を与える. 確率論的従属性は, Selberg [10] により言及された L 関数の確率論的独立性に反するものであり, 彼が言及した独立性が, 臨界線上でのみ成り立つ特別な現象であることを示す. また我々の同時極大値評価は, Mahatab-Pańkowski-Vatwani [7] らにより言及された未解決問題を, Dirichlet L 関数の場合に解決する.

1.1　Dirichlet L 関数

Dirichlet 指標 χ とは準同型 $\hat{\chi} : (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times} \to \mathbb{C}^{\times}$ を $\mathbb{Z}$ に自然に拡張した関数, つまり $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\chi(n) \coloneqq \begin{cases} \hat{\chi}(\bar{n}) & \text{if} \quad \bar{n} = n + q\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{\times}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を意味する．上記の q を χ の **modulo** という．また $\hat{\chi} \equiv 1$ であるとき, χ を modulo q の**自明な指標**と呼び, ψ_q と書く．さらに, modulo q の Dirichlet 指標 χ に対して, $1 \le d < q$ をみたす d を modulo とする指標 $\tilde{\chi}$ が存在し, $\chi = \tilde{\chi} \cdot \psi_q$ と書けるとき, χ を **imprimitive** と呼ぶ. そして imprimitive でない Dirichlet 指標を **primitive** と呼ぶ. 任意の Dirichlet 指標 $\chi \pmod q$ に対して, ある primitive 指標 χ^* が存在し, $\chi = \chi^* \cdot \psi_q$ と書くことができる．このとき χ^* の modulo を, χ の **conductor** と呼ぶ.

以下, χ を modulo q の Dirichlet 指標とする．このとき χ に付随する **Dirichlet L 関数**は

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad \mathrm{Re}\, s > 1$$

と定義される．右辺の級数は $\mathrm{Re}\, s > 1$ でのみ絶対収束するが, χ が非自明なときは $L(s,\chi)$ は整関数へと接続されることがよく知られている．また χ が自明な指標 ψ_q のときは $L(s,\psi_q) = \zeta(s) \prod_{p|q}(1-p^{-s})$ となり, この等式から $L(s,\chi)$ は $\mathbb{C}$ 全体で有理型関数へと接続されることがわかる.

本稿では Dirichlet L 関数の値分布について焦点を当てる．Riemann ゼータ関数の値分布は零点分布, 素数分布と深い関係があるが, Dirichlet L 関数も同様の事実が知られている．それを説明するために, Dirichlet L 関数に対する Riemann 予想を最初に説明する.

予想. 実部が正の $L(s,\chi)$ の零点の実部は全て $1/2$ である．これを $L(s,\chi)$ に対する Riemann 予想と呼ぶ．また全ての χ に対してこの予想が成り立つことを**一般化された Riemann 予想** (GRH) と呼ぶ.

次に Dirichlet L 関数に対する, Lindelöf 予想を述べる．以下の主張は “t-aspect” に制限したものであることに注意しておく.

予想. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$L(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi) = O_{\varepsilon,\chi}\left((|t|+1)^{\varepsilon}\right)$$

が成り立つことを $L(s,\chi)$ に対する Lindelöf 予想と呼ぶ．また任意の Dirichlet 指標 χ と任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$L(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}t,\chi) = O_{\varepsilon,\chi}((|t|+1)^{\varepsilon})$$

が成り立つことを一般化された Lindelöf 予想 (GLH) と呼ぶ.

上記ふたつの予想には関係がある. よく知られた関係として, $L(s,\chi)$ に対する Riemann 予想が成り立つならば, $L(s,\chi)$ に対する Lindelöf 予想が成り立つことが知られている. 特に GRH が正しいときは, GLH も正しいことがわかる.

次に, Dirichlet L 関数に対する Riemann 予想, Lindelöf 予想の応用について述べる. まず, modulo q の χ に付随する全ての Dirichlet L 関数に対して Riemann 予想が正しいならば, 評価 $p_{n+1}(q,a)-p_n(q,a)=O\left(p_n(q,a)^{1/2}\log p_n(q,a)\right)$ を得ることができる. ここで, q,a は互いに素であり, $p_n(q,a)$ は $qk+a$ ($k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$) の形をした n 番目の素数である. 一方で, modulo q の χ に付随する全ての Dirichlet L 関数に対する Lindelöf 予想を仮定すると, $p_{n+1}(q,a)-p_n(q,a)=O_{\varepsilon,q}\left(p_n(q,a)^{1/2+\varepsilon}\right)$ を得ることができる. よって, Riemann 予想下での評価と Lindelöf 予想下での評価はそれぞれ $\log p_n(q,a)$ と $p_n(q,a)^{\varepsilon}$ の違い[*1]があり, $p_n(q,a)$ の多項式べきに関しては, 両評価とも $p_n(q,a)^{1/2}$ であり違いはない. この意味で等差数列中の素数の間隔への応用としては, Riemann 予想と Lindelöf 予想は同等の強さの帰結をもつ.

これらの背景から, Dirichlet L 関数の値分布を理解することは重要となる.

1.2 Dirichlet L 関数の分布と極限定理

以下, 実部が 1/2 と 1 の間の帯領域での Dirichlet L 関数について考察する. この領域内に限定する理由は以下の Lindelöf 予想に対する同値命題による.

事実 1. 任意の $1/2<\sigma<1$, $t\in\mathbb{R}$ に対して評価

$$L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)=O_{\varepsilon,\chi,\sigma}\left((|t|+1)^{\varepsilon}\right)$$

が成り立つことと, $L(s,\chi)$ に対する Lindelöf 予想が成り立つことは同値である.

Dirichlet L 関数 $L(s,\chi)$ の分布 $P_{\sigma,\chi,T}(V)$ を

$$P_{\sigma,\chi,T}(A)=\frac{1}{T}\operatorname{meas}\{t\in[T,2T]\ :\ \log|L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|\in A\}$$

と定義する. ただし, T は $T\geq 3$ をみたすパラメータで, A は Lebesgue 可測な集合, そして meas は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度である. このとき, $P_{\sigma,\chi,T}$ に関して, 以下の極限定理が成り立つことが知れている.

定理 A (Bohr and Jessen, 1930)**.** Dirichlet L 関数の分布 $P_{\sigma,\chi,T}$ は, $T\to+\infty$ のときにある絶対連続な確率測度 $\mathbb{P}_{\sigma,\chi}$ に弱収束する.

[*1] 本稿では Lindelöf 予想を t-aspect に限定しているため, O-定数でも大きな違いが生じている.

これは Bohr-Jessen [2] により, 元々 Riemann ゼータ関数に対して証明された定理だが, Dirichlet L 関数の場合も全く同様に証明できる．以下で紹介する Hattori-Matsumoto, Lamzouri の定理も元々は Riemann ゼータ関数に対するものだが, 同様に Dirichlet L 関数の場合にも簡単に拡張できる．よって本稿では Dirichlet L 関数への一般化した主張のみを述べる．

Bohr-Jessen の極限定理は定性的な定理で, このままでは使い勝手がよくない．一方で, この定理と以下の Hattori-Matsumoto の定理 [4] により, Dirichlet L 関数の挙動に対して興味深い観察を得ることができる．

定理 B (Hattori and Matsumoto, 1999)**.** 任意の Dirichlet 指標 χ に対して, $V \to +\infty$ のときに,

$$\mathbb{P}_{\sigma,\chi}((V,+\infty)) = \exp\left(-A(\sigma)V^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log V)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1+o(1))\right)$$

が成り立つ．ただし, $A(\sigma)$ は

$$A(\sigma) = \left(\frac{\sigma^{2\sigma}}{(1-\sigma)^{2\sigma-1}G(\sigma)^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}, \quad G(\sigma) = \int_0^{\infty} \frac{\log I_0(u)}{u^{1+\frac{1}{\sigma}}}du$$

と定義される定数であり, I_0 は変形 Bessel 関数で $I_0(z) := \sum_{n=0}^{\infty}(z/2)^{2n}/(n!)^2$ と定義される．

この定理によって, 十分大な任意の V に対して, 極限分布 $\mathbb{P}_{\sigma,\chi}$ の正確な挙動を把握できる．もし仮に元々の分布 $P_{\sigma,\chi,T}$ に対して, 上記の漸近公式が成り立つと仮定, つまり

$$P_{\sigma,\chi,T}((V,+\infty)) = \exp\left(-A(\sigma)V^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log V)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1+o(1))\right) \tag{1.1}$$

が十分大な任意の V に対して成り立つと仮定すると, 我々は任意の $\varepsilon > 0$ に対して評価

$$\max_{t\in[T,2T]} L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi) \asymp_{\varepsilon,\chi} \exp\left((1+\varepsilon)\frac{(A(\sigma)^{-1}\log T)^{1-\sigma}}{(\log\log T)^{\sigma}}\right) \tag{1.2}$$

を得ることができる．この評価はしばしば Montgomery の予想と呼ばれる．事実 1 によりこれは Lindelöf 予想よりも強い評価である．

以上の考察により, 漸近公式 (1.1) がどのような V に対して成り立つか, という問題を考えることは Lindelöf 予想の解決を目指す研究として重要となる．この問題に対して, Lamzouri [6] は以下の定理を証明した．

定理 C (Lamzouri, 2011)**.** 漸近公式 (1.1) は $C \le V \le c\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T}$ のときに成り立つ．ここで c, C は σ, χ のみに依存するある正の定数である．

もしこの定理の V の範囲を, ある大きな定数 $B = B(\sigma) > 0$ で $V \le B\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{(\log\log T)^{\sigma}}$ まで拡張できれば, (1.2) を得ることができる.

2 Dirichlet L 関数の同時分布

本稿では Dirichlet L 関数の同時分布について議論する. 我々の研究は前節で述べた, Hattori-Matsumoto, Lamzouri らの研究を同時分布に拡張することが目的である. 以下, $\boldsymbol{\chi} = (\chi_1, \ldots, \chi_r)$ を互いに異なる primitive な Dirichlet 指標の組とする. このとき, Dirichlet L 関数の同時分布 $P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}$ を, 任意の $\mathbb{R}^r$ 上 Lebesgue 可測な集合 A に対して,

$$P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}(A) \coloneqq \frac{1}{T}\,\mathrm{meas}\,\{t \in [T, 2T] \ : \ (\log|L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi_1)|, \ldots, \log|L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi_r)|) \in A\}$$

と定義する. また $\boldsymbol{V} = (V_1, \ldots, V_r) \in \mathbb{R}^r$ に対して, $A = \prod_{j=1}^{r}(V_j, +\infty)$ のときは, $P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}(A) = P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}(\boldsymbol{V})$ とも書く. このように定義した同時分布に対しても, Bohr-Jessen の極限定理と同様の極限定理が知られている. つまり, ある確率測度 $\mathbb{P}_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}$ が存在して, $P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}$ は $T \to +\infty$ に関して, $\mathbb{P}_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}$ に弱収束する ([11, Theorem 12.1] を参照). 一方で, Bohr-Jessen の極限定理では極限分布が絶対連続, 言い換えると確率密度関数を持つことまで証明されているが, $\mathbb{P}_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}$ に対してはそれは現状未解決だと思われる.

以下, 同時分布 $P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}$ の研究に対する動機をふたつ述べる.

2.1 L 関数の確率論的独立性

Selberg は [10] で, 現在では Selberg クラスと呼ばれる L 関数の集合を公理的に定義した. 彼は同論文内で, 「Selberg クラスに属する異なる primitive な L 関数たちは統計的に独立となる」と述べている. 本稿では Selberg クラスや primitive などの定義は割愛するが, primitive な Dirichlet 指標に付随する Dirichlet L 関数は, その 1 例であることは注記しておく. Selberg は前述の主張を文章で書いたのみで, 「統計的に独立」の正確な数学的主張や議論は論文内には記されていない. その後に, Bombieri-Hejhal [3] が臨界線 $\sigma = 1/2$ での L 関数の同時分布が他変量正規分布に従うことを証明した. 彼らが証明したことを Dirichlet L 関数に限定して述べると,

$$P_{\frac{1}{2},\boldsymbol{\chi},T}\left(\prod_{j=1}^{r}(V_j\sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}, +\infty)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\left\{ t \in [T, 2T] \ : \ \frac{\log |L(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t, \chi_j)|}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log T}} > V_j \text{ for } j = 1, \ldots, r \right\} \\
&\to \prod_{j=1}^{r} \int_{V_j}^{\infty} e^{-u^2/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{as } T \to +\infty
\end{aligned}
$$

である．特に，この極限定理から

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to+\infty} P_{\frac{1}{2}, \boldsymbol{\chi}, T}\left(\prod_{j=1}^{r} (V_j \sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}, +\infty) \right) \\
&= \prod_{j=1}^{r} \lim_{T\to+\infty} P_{\frac{1}{2}, \chi_j, T}\left((V_j \sqrt{\tfrac{1}{2}\log\log T}, +\infty) \right)
\end{aligned}
$$

となることがわかり，この意味で臨界線上で Dirichlet L 関数の分布は独立となる．一方で Bombieri-Hejhal の仕事は臨界線に限定したもので，その他の領域での独立性というものは議論されていなかった．これを議論することが，我々の研究動機のひとつである．そして我々は $P_{\sigma, \boldsymbol{\chi}, T}$ の漸近挙動を調べることで以下を得た．

系 1. 任意の $1/2 < \sigma < 1$ に対して，等式

$$
\lim_{T\to+\infty} P_{\sigma, \boldsymbol{\chi}, T}(\boldsymbol{V}) = \prod_{j=1}^{r} \lim_{T\to+\infty} P_{\sigma, \chi_j, T}(V_j)
$$

が成り立たない $\boldsymbol{V} = (V_1, \ldots, V_r) \in \mathbb{R}^r$ が存在する．

この系により，Dirichlet L 関数の極限分布が $1/2 < \sigma < 1$ では確率的に従属となることがわかる．つまり Selberg が言及した L 関数の独立性は，$1/2 < \sigma < 1$ では成り立たないことがわかる．加えて，Dirichlet L 関数に対しては，Voronin [12] による同時普遍性定理が既に知られている．Voronin の定理は，互いに異なる primitive な指標に付随する Dirichlet L 関数たちは，互いに独立した複雑な振る舞いをもつことを示す．我々の結果はこれら先行研究とは相反するもので，異なる L 関数の間の関係性に対して，これまでとは違う新しい知見を与える結果である．

2.2 L 関数の同時極大値評価

Lindelöf 予想を調べる際に，L 関数の正確な挙動を推測することも重要となる．例えば，Motgomery の予想 (1.2) の上からの評価は Lindelöf 予想を含むため，証明すること

は現時点では困難である．一方で, (1.2) の下からの評価については Montgomery [8] によって, Riemann ゼータ関数の場合には既に証明されている．これは Montgomery の予想を支持するひとつの結果と考えられる．そして Sankaranarayanan-Sengupta [9] によって, Montgomery の下からの評価は, Dedekind ゼータ関数を含む L 関数へ一般化されている．しかし, 非自明な Dirichlet 指標に付随する Dirichlet L 関数に対しては, Montgomery と同等の評価は現状得られていない．現状知られている最良の極大値評価は, Aistleitner-Pańkowski [1] による評価で,

$$\max_{t\in[T,2T]}\log|L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi)|\geq c\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T} \tag{2.1}$$

である．ここで, c は σ,χ のみに依存する定数である．一方で, この評価は Lamzouri の定理 C からも復元することができる．よって, 定理 C は (2.1) を確率論的に改良する意味を持つ．我々の同時分布を考えるふたつめの動機は, Lamzouri の定理と同様の方向で, (2.1) を同時極大値評価へ発展させることである．

Mahatab-Pańkowski-Vatwani [7] らは, L 関数の同時極大値評価について議論した．ここで, 同時極大値評価とは

$$\min_{1\leq j\leq r}\max_{t\in[T,2T]}\log|L_j(\sigma+\mathrm{i}t)|\geq L(T) \tag{2.2}$$

という評価である． この問題は前節で考察と同様に, L 関数の関係性を調べる上で興味深い問題である． Voronin の Dirichlet L 関数に対する同時普遍性定理により, $\lim_{T\to+\infty}L(T)=+\infty$ かつ

$$\min_{1\leq j\leq r}\max_{t\in[T,2T]}\log|L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi_j)|\geq L(T)$$

が成り立つ $L(T)$ が存在することはすぐにわかる．一方で普遍性定理からは, $L(T)$ の具体的な大きさを得ることはできない．この問題を Mahatab, Pańkowski, Vatwani らは議論し,

$$\min_{1\leq j\leq r}\max_{\substack{t_j\in[T,2T]\\|t_j-t_l|\leq M(T)}}\log|L_j(\sigma+\mathrm{i}t_j)|\geq c\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T}$$

を得た．ただし, c は σ,L_j に依存する定数であり, $M(T)=2(\log T)^{(1+\sigma)/2}(\log\log T)^{1/2}$ である．彼らの定理の L_j は, Dirichlet L 関数, $GL(2)$ の標準保型 L 関数などを含むような, 一般の L 関数である．しかしながら彼らの結果は, t_j たちが長さ $M(T)$ の区間を独立に動くことができるため, 同時極大値評価 (2.2) には到達していない．その結果, 彼らは同時極大値評価を [7] で未解決問題として言及している．

我々は Dirichlet L 関数の同時分布の挙動を調べることで, 彼らの未解決問題を Dirichlet L 関数の場合に解決した. つまり, 我々は以下の結果を得た.

系 2. 任意の $1/2 < \sigma < 1$ に対して,

$$\min_{1\le j\le r}\max_{t\in[T,2T]}\log|L(\sigma+\mathrm{i}t,\chi_j)| \ge c\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T}.$$

ただし, c は σ, r のみに依存する定数である.

2.3 主定理

我々の主定理を述べる前に, いくつかの定義を導入する. 任意の $\sigma > 0$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in (\mathbb{R}_{>0})^r$ に対して

$$\xi(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha}) := \frac{1}{\phi(d)}\sum_{u\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}\left|\sum_{j=1}^r \alpha_j\chi_j(u)\right|^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$\Xi_j(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha}) := \frac{1}{\phi(d)}\sideset{}{^*}\sum_{u\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}\left|\sum_{\ell=1}^r \alpha_\ell\chi_\ell(u)\right|^{\frac{1}{\sigma}-2}\mathrm{Re}\,\overline{\chi_j(u)}\sum_{k=1}^r\alpha_k\chi_k(u)$$

と定義する. ただし, $\displaystyle\sideset{}{^*}\sum_{u\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times}$ は $\sum_{\ell=1}^r\alpha_\ell\chi_\ell(u)\ne 0$ となる $u\in(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times$ を渉る和を意味する. このとき, 我々の主定理は以下である.

定理 1. 任意の $1/2 < \sigma < 1$ を固定する. また $\boldsymbol{\alpha} \in (\mathbb{R}_{>0})^r$ を全ての $j \in \{1,\dots,r\}$ に対して, $\Xi_j(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha}) > 0$ をみたすものとする. このとき, ある定数 $a_1 = a_1(\sigma,r) > 0$ が存在し, $V \le a_1\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T}$ をみたす十分大な T, V に対して,

$$P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}(\boldsymbol{V}) = \exp\left(-\xi(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha})A(\sigma)V^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log V)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\left(1+O_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}\left(\left(\frac{\log\log V}{\log V}\right)^{1-\sigma}\right)\right)\right)$$

が成り立つ. ただし, $\boldsymbol{V} = (\Xi_1(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha})V,\dots,\Xi_r(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha})V)$ である.

注意 1. この定理は Lamzouri による定理 C を同時分布に拡張したものである. しかし, この定理には全ての $\Xi_j(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha})$ が正となる $\boldsymbol{\alpha}$ の存在性が仮定されているが, その仮定は非自明である. ここが Lamzouri による定理との違いであり, 同時分布を考える際の新しい難しさのひとつとなる. 以下で何故この仮定が必要なのかを説明する.

まず, Ξ_j の定義だが, Ξ_j は $\mathbb{P}_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}$ のキュムラント母関数の偏微分の漸近式の主要項から自然に現れる定数である. 実際に Ξ_j は

$$\Xi_j(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha}) = \sigma \lim_{x\to+\infty} (\alpha_j/x)^{1-\frac{1}{\sigma}} \frac{\partial \log M_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}}{\partial x_j}(\alpha_1 x, \alpha_2 x, \dots, \alpha_r x)$$

と書き換えることができる. ここで, $M_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}$ は $\mathbb{P}_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}$ のモーメント母関数で, $M_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}(z_1,\dots,z_r) = \int_{\mathbb{R}^r} e^{z_1x_1+\cdots+z_rx_r}\mathrm{d}\mathbb{P}_{\sigma,\boldsymbol{\chi}}(x_1,\dots,x_r)$ と定義される. 我々は定理 1 の証明で鞍点法を用いる. その手法では, 鞍点周辺でのキュムラント母関数の偏微分係数の値が正となることが要求される. そして偏微分係数の正値性は上の書き換えにより, Ξ_j の正値性と同値となる. そのため, Ξ_j が正となる $\boldsymbol{\alpha}$ の存在が必要となる.

また, パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ についてもここで言及する. パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ は Ξ_j が全て正になるような, 都合の良い鞍点を探す役割をもつ. Hattori-Matsumoto, Lamzouri らの研究を単純に一般化しようとすると, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1} = (1,\dots,1)$ が自然な選択となる. 我々も最初はこの $\boldsymbol{\alpha}$ に対して, Ξ_j の正値性が証明できると期待していた. 実際に $r=2$ の場合には $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1} = (1,1)$ で Ξ_j の正値性は証明できる. しかしながら一般の $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対しては, 実は反例が存在する. 例えば $r=7$ のときに, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$ で Ξ_j が負となる modulo 13 の Dirichlet 指標の組み合わせが存在する. そのため, $\boldsymbol{\alpha}$ を $\mathbf{1}$ のような単純な形で選択することはできない. この理由から, 定理 1 の主張および, ξ, Ξ_j の定義で $\boldsymbol{\alpha}$ を導入する必要があった.

今, 我々は Ξ_j が正となる $\boldsymbol{\alpha}$ の存在性を示す必要がある. それは以下の命題によって保証される.

命題 1. ある σ, r のみに依存する正の定数 $\alpha_0(\sigma,r), c_0(\sigma,r)$ が存在して, 任意の $\alpha \geq \alpha_0(\sigma,r)$, $j \in \{1,\dots,r\}$ に対して, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha,1,\dots,1)$ のとき $\Xi_j(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha}) \geq c_0(\sigma,r) > 0$ および,

$$\sum_{j=1}^{r} \Xi_j(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{1-\sigma}} < \xi(\sigma,\boldsymbol{\chi};\boldsymbol{\alpha}) \tag{2.3}$$

が成り立つ.

主張の前半部分は Ξ_j の正値性を保証する. そして後半部分の不等式は, 系 1 を証明する際に必要となる. この命題は $\boldsymbol{\alpha}$ の選択が重要な点であり, このように選べば証明は簡単である. 実際に, $\boldsymbol{\alpha}$ の第一成分 α を起点に漸近展開し, 主要項と誤差項を比較することで, Ξ_j の正値性並びに, 不等式 (2.3) を証明することができる.

3 Dirichlet L 関数の従属性, 同時極大値評価の証明

最後に, 定理 1 を用いた系 1, 2 の証明を述べて, 本稿を締めくくりたい.

系 1 の証明. 十分大きな V をとる. また, $\boldsymbol{V} = (V_1, \dots, V_r)$ を $V_j = \Xi_j(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha})V$ とする. ただし, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0(\sigma, r), 1, \dots, 1)$ で $\alpha_0(\sigma, r)$ は命題 1 のものとする. このとき定理 B より,

$$\prod_{j=1}^{r} \lim_{T\to+\infty} P_{\sigma,\chi_j,T}(V_j) = \exp\left(-C(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha})A(\sigma)V^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log V)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1 + o(1))\right)$$

となる. ただし,

$$C(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{j=1}^{r} \Xi_j(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha})^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

である. 一方で, 定理 1 により,

$$\lim_{T\to+\infty} P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}(\boldsymbol{V}) = \exp\left(-\xi(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha})A(\sigma)V^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log V)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1 + o(1))\right)$$

が成り立つ. 今, 命題 1 により, $C(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha}) < \xi(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha})$ なので, 十分大きな V に対して,

$$\prod_{j=1}^{r} \lim_{T\to+\infty} P_{\sigma,\chi_j,T}(V_j) > \lim_{T\to+\infty} P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}(\boldsymbol{V})$$

となることがわかる. 従って, 系 1 を得る. □

系 2 の証明. パラメータ $\boldsymbol{\alpha}$ を系 1 の証明と同じものとする. また, $V = a_1 \frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T}$ とし, $V_j = \Xi_j(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha})V$ とする. ここで, a_1 は定理 1 と同じもので, σ, r のみに依存する定数である. このとき, 定理 1 により,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\operatorname{meas}\{t \in [T, 2T] \ : \ \log|L(\sigma + \mathrm{i}t, \chi_j)| > V_j \text{ for } j = 1, \dots, r\} = P_{\sigma,\boldsymbol{\chi},T}(\boldsymbol{V}) \\
&= \exp\left(-\xi(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha})A(\sigma)V^{\frac{1}{1-\sigma}}(\log V)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(1 + o(1))\right) > 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, ある $t \in [T, 2T]$ が存在して, 任意の $1 \le j \le r$ に対して

$$\log|L(\sigma + \mathrm{i}t, \chi_j)| \ge a_1 \left(\min_{1\le l\le r} \Xi_l(\sigma, \boldsymbol{\chi}; \boldsymbol{\alpha})\right) \frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T} \ge (a_1 \cdot c_0)\frac{(\log T)^{1-\sigma}}{\log\log T}$$

となることがわかる. ここで, c_0 は命題 1 と同じもので σ, r のみに依存する正の定数である. よって, 系 2 を得る. □

謝辞

この講究録は 2022 年度 RIMS 研究集会「Zeta functions and their representations」で筆者が発表した内容に基づくものである．その講演に招待していただいた研究代表者である中筋麻貴先生, そして世話人である Ade Irma Suriajaya 先生にこの場を借りて深くお礼申し上げます．

参考文献

[1] C. Aistleitner and Ł. Pańkowski, Large values of L-functions from the Selberg class. *J. Math. Anal. Appl.* **446** (2017), no. 1, 345–364.

[2] H. Bohr and B. Jessen, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Erste Mitteilung, *Acta Math.* **54** (1930), 1–35; Zweite Mitteilung, ibid. **58** (1932), 1–55.

[3] E. Bombieri and D. A. Hejhal, On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products, *Duke Math. J.* **80** no.3 (1995), 821–862.

[4] T. Hattori and K. Matsumoto, A limit theorem for Bohr-Jessen's probability measures of the Riemann zeta-function, *J. Reine Angew. Math.* **507** (1999), 219–232.

[5] S. Inoue and J. Li, Simultaneous large values and dependence of Dirichlet L-functions, preprint, `arXiv:2211.15165`.

[6] Y. Lamzouri, On the distribution of extreme values of zeta and L-functions in the strip $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2011, no.23, 5449–5503.

[7] K. Mahatab, Ł. Pańkowski, and A. Vatwani, Joint Extreme values of L-functions, *Math. Z.* **302** (2022), no. 2, 1177–1190.

[8] H. L. Montgomery, Extreme values of the Riemann zeta function, *Comment. Math. Helvetici* **52** (1977), 511–518.

[9] A. Sankaranarayanan and J. Sengupta, Omega theorems for a class of L-functions, *Funct. et Approx.* **36** (2006), 119–131.

[10] A. Selberg, Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory*, 367–385, 1992.

[11] J. Steuding, Value-distribution of L-functions. Berlin: Springer, 2007.

[12] S. M. Voronin, Analytic Properties of Dirichlet Generating Functions of Arithmetic Objects, Ph.D. Thesis, Moscow, Steklov Math. Institute (1977) (Russian).