A residue calculus for few variants of MZV

Yayoi NAKAMURA (中村　弥生)
近畿大学理工学部理学科数学コース

1　ポリログ関数の解析接続公式と多重ポリログ関数

プラナの総和法を用いて，求和関数の正の整数における留数和としてゼータ値やポリログ関数を表すことができる ([3])．さらに留数定理を組み合わせることによって，ポリログ関数の解析接続公式を導出することができることが知られている ([13])．

z を $0 < \arg(z) < 2\pi$ を満たす複素パラメーターとし， k を自然数とする．複素変数 s の関数として求和関数を

$$f_k(z;s) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i s}-1}\frac{z^s}{s^k} \tag{1.1}$$

とおく．$f_k(z;s)$ は全ての整数を極に持ち，正整数 $s = n \in \mathbb{N}$ における留数の和は

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{Res}_{s=n} f_k(z;s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^k} = \mathrm{Li}_k(z)$$

であり，単位円内で正則なポリログ関数を与える．また，負整数における留数の和は

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \operatorname*{Res}_{s=-n} f_k(z;s) = (-1)^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{-m}}{m^k} = (-1)^k \mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right)$$

であり，単位円外で正則なポリログ関数 $\mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right)$ を用いて表すことができる．無限遠点 ∞ が関数 $f_k(z;s)$ の集積特異点であるが，留数の積分表示を用いて評価することにより，$0 < \arg(z) < 2\pi, k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ の条件のもとで

$$\mathrm{Li}_k(z) = (-1)^{k+1}\mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{(2\pi i)^k}{k!}\mathrm{B}_k\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right) \tag{1.2}$$

が成り立つことが分かる．特にこの関数関係式は，パンルベの定理によってポリログ関数の単位円内から単位円外への解析接続公式を与えている．

自然数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ をインデックスといい，d をインデックス $\mathbf{k}$ の深さ，$k = \sum_{j=1}^{d} k_j$ をインデックス $\mathbf{k}$ の重さという．z のべき級数

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_d>0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \ldots m_d^{k_d}}$$

を（一変数の）多重ポリログ関数という．多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, z \neq 1\}$ で連続な関数であり，$k_1 \geq 2$ の場合は $z = 1$ においても連続であり，$z = 1$ における特殊値

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(1) = \sum_{m_1>m_2>\cdots>m_d>0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \ldots m_d^{k_d}} = \zeta(\mathbf{k})$$

をインデックス $\mathbf{k}$ に関する多重ゼータ値という ([1]).

多重ゼータ値に関する研究の方向性の一つとして、次元予想へのアプローチがあげられ，最も基本的な手法として、線形関係式の導出がある．この原稿では，プラナの総和法における求和関数に一般化多重調和数の補間関数を用いることで，様々なタイプの多重ポリログ関数や多重ゼータ値に関して解析接続公式 (1.2) に対応する関係式を導出することができることを説明する．紹介する結果は，東北学院大学の佐々木義卓氏との共同研究をきっかけに，近畿大学大学院総合理工学研究科の修了生と行った研究の内容が中心である．

1.1　公式 (1.2) の証明の概略

まず初めに関係式 (1.2) の証明の概略を述べる．詳細な計算は [8] に基づく．

z は $0<\arg(z)<2\pi$ を満たすとする．関数

$$f_k(z;s)=\frac{2\pi i}{e^{2\pi is}-1}\frac{z^s}{s^k}$$

は，正の整数，負の整数を 1 位の極に， $s=0$ を $(k+1)$ 位の極に持ち，それぞれの極における留数は，

$$\operatorname*{Res}_{s=n}f_k(z;s)=\frac{z^n}{n^k},\quad \operatorname*{Res}_{s=-n}f_k(z;s)=(-1)^k\frac{z^{-n}}{n^k},\quad \operatorname*{Res}_{s=0}f_k(z;s)=\frac{(2\pi i)^k}{k!}\mathrm{B}_k\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)$$

$(n\in\mathbb{N})$ である．この場合の留数解析において注意しなくてはならない点は無限遠点 ∞ が集積特異点となっていることである．そのため，留数の積分表示を用いて無限遠点における留数を評価する必要がある．

複素 s 平面上に, $0<c<1$ となる $c\in\mathbb{R}$ を取り, 積分路 l_∞ を, $\Re s=\infty$ から $\Im s>0$ 側を実軸に沿って $s=1$ に近づき, $s=1$ 中心の十分小さな半径の円周を反時計回りにまわり, $\Im s<0$ 側を実軸に沿って $\Re s=\infty$ へ戻る道とする．同様に, $l_{-\infty}$ を $\Re s=-\infty$ から $\Im s<0$ 側を実軸に沿って $s=0$ に近づき, $s=0$ 中心の十分小さな半径の円周を反時計回りにまわり, $\Im s>0$ 側を実軸に沿って $\Re s=-\infty$ へ戻る道とする (図 1).

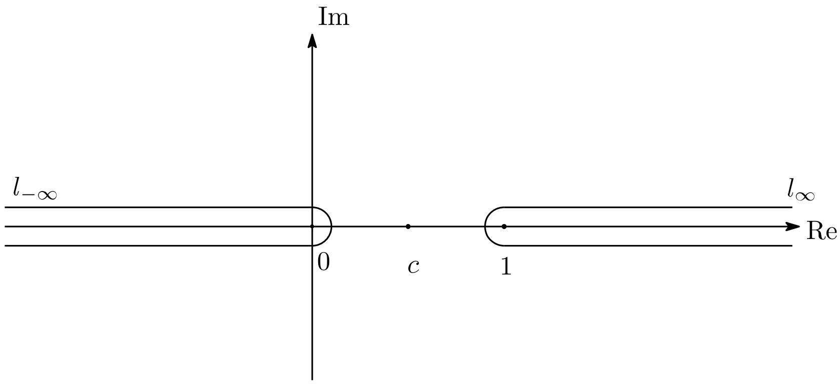

図 1: l_∞, $l_{-\infty}$

$f_k(z;s)$ を積分路 l_∞ 上で積分すると,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_\infty}f_k(z;s)ds=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname*{Res}_{s=n}f_k(z;s)=\mathrm{Li}_k(z),\tag{1.3}$$

積分路 $l_{-\infty}$ 上で積分すると,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{l_{-\infty}} f_k(z;s)ds = \sum_{n=0}^{\infty}\operatorname*{Res}_{s=-n} f_k(z;s) = (-1)^k \mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{(2\pi i)^k}{k!}B_k\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right) \tag{1.4}$$

が成り立つ. さて, $f_k(z;s)$ の絶対値は,

$$|f_k(z;s)| = \frac{2\pi |z|^{\Re s}}{|s|^k e^{\Im s \arg z}|e^{2\pi i s}-1|}$$

と変形できる. $\Im s \geq 0$ のとき

$$e^{\Im s \arg z}|e^{2\pi i s}-1| \geq |1-e^{2\pi i s}|,$$

$\Im s < 0$ のとき

$$\begin{aligned} e^{\Im s \arg z}|e^{2\pi i s}-1| &= e^{\Im s(\arg z - 2\pi)}|1-e^{-2\pi i s}| \\ &\geq |1-e^{-2\pi i s}| \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, 関数 $f_k(z;s)$ は

$$|f_k(z;s)| \leq \begin{cases} \dfrac{2\pi|z|^{\Re s}}{|s|^k|1-e^{2\pi i s}|} & (\Im s \geq 0) \\ \dfrac{2\pi|z|^{\Re s}}{|s|^k|1-e^{-2\pi i s}|} & (\Im s < 0) \end{cases} \tag{1.5}$$

と評価できる. さて, 十分大きな自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対し, 複素平面上の道 C_N, l_N, C_{-N}, l_{-N} を図 2 のように取る. このとき,

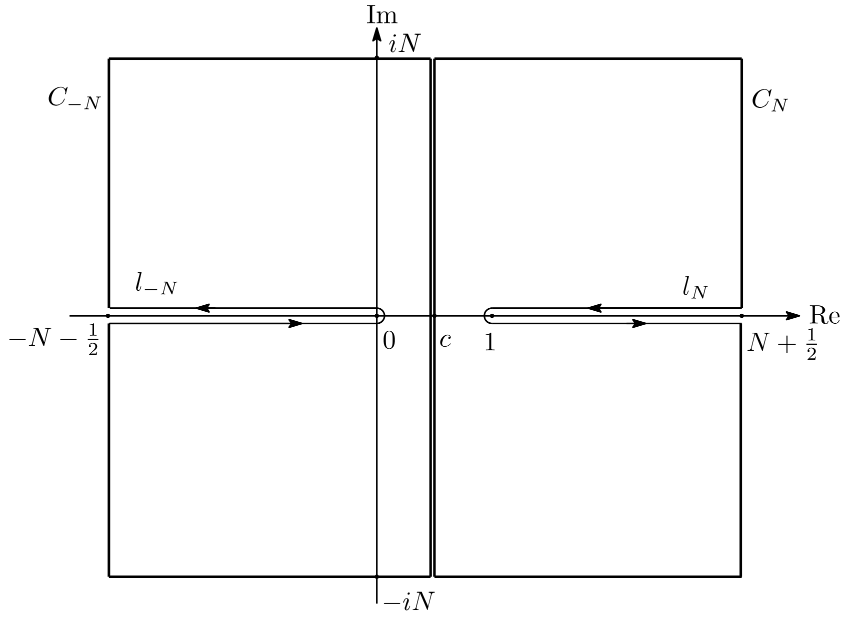

図 2: C_N, l_N, C_{-N}, l_{-N}

$$\begin{aligned} &\left|\int_{C_N} f_k(z;s)ds\right| \leq \int_{C_N} |f_k(z;s)||ds| \\ &= \left(\int_{N+\frac{1}{2}-i\varepsilon}^{N+\frac{1}{2}-iN} + \int_{N+\frac{1}{2}-iN}^{c-iN} + \int_{c-iN}^{c+iN} + \int_{c+iN}^{N+\frac{1}{2}+iN} + \int_{N+\frac{1}{2}+iN}^{N+\frac{1}{2}+i\varepsilon}\right)|f_k(z;s)||ds| \end{aligned}$$

である．ただし $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対し, $\int_\alpha^\beta$ は 複素平面上の α から β への有向線分を積分路とする積分を表すものとする．ここで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 上の評価 (1.5) を用いると $|z| \leq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\int_{N+\frac{1}{2}+iN}^{N+\frac{1}{2}+i\varepsilon} |f_k(z;s)||ds| \\
&\leq \int_{N+\frac{1}{2}+iN}^{N+\frac{1}{2}+i\varepsilon} \frac{2\pi|z|^{\Re s}}{|s|^k|1-e^{2\pi is}|}|ds| \\
&\leq \frac{2\pi}{(N+\frac{1}{2})^k}\int_N^\varepsilon \frac{|dt|}{|1-e^{(2N+1)\pi i}e^{-2\pi t}|} \\
&\leq \frac{2\pi}{(N+\frac{1}{2})^k}\int_N^\varepsilon |dt| = \frac{2\pi(N-\varepsilon)}{(N+\frac{1}{2})^k} \to 0 \ (N\to\infty)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．同様の計算により, $k \geq 2, |z| \leq 1$ のとき

$$
\left(\int_{N+\frac{1}{2}-iN}^{c-iN} + \int_{c+iN}^{N+\frac{1}{2}+iN} + \int_{N+\frac{1}{2}-i\varepsilon}^{N+\frac{1}{2}-iN}\right)|f_k(z;s)||ds| \to 0 \ (N\to\infty)
$$

が成り立つ．これらの評価式より, $k \geq 2$ のとき

$$
\int_{C_N+l_N} f_k(z;s)ds \to \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_k(z;s)ds + \int_{l_\infty} f_k(z;s)ds \ (N\to\infty) \tag{1.6}
$$

を得る．但し, $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}$ は直線 $\Re s = c$ を積分路とするような積分を表すものとする．一方, コーシーの積分定理より,

$$
\int_{C_N+l_N} f_k(z;s)ds = 0 \tag{1.7}
$$

である．(1.3), (1.7) より, 次の補題を得る．

補題 1.1. k を 2 以上の自然数とする．$0 < c < 1$ を満たす $c \in \mathbb{R}$ 及び $|z| \leq 1$ に対して,

$$
\mathrm{Li}_k(z) = -\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{e^{2\pi is}-1}\frac{z^s}{s^k}ds
$$

が成り立つ．

同様に C_{-N}, l_{-N} における $f_k(s)$ の積分についても (1.5) を用いて評価し，コーシーの積分定理を用いることにより, 次の補題を得る．

補題 1.2. k を 2 以上の自然数とする．$0 < c < 1$ を満たす $c \in \mathbb{R}$ および $|z| \geq 1$ に対し,

$$
(-1)^k\mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{(2\pi i)^k}{k!}B_k\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{e^{2\pi is}-1}\frac{z^s}{s^k}ds
$$

が成り立つ．

$k \geq 2$ のとき, 補題 1.3 および補題 1.4 より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}_k(z) &= -\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{e^{2\pi is}-1}\frac{z^s}{s^k}ds \\
&= (-1)^{k+1}\mathrm{Li}_k\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{(2\pi i)^k}{k!}B_k\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)
\end{aligned}
$$

である. $k=1$ の場合は

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_1\left(\frac{1}{z}\right)-2\pi i\left(\frac{\log z}{2\pi i}-\frac{1}{2}\right)&=-\log\left(1-\frac{1}{z}\right)-\log z+\pi i\\&=-\log\left(1-\frac{1}{z}\right)-\log z+\log(-1)\\&=-\log(1-z)=\mathrm{Li}_1(z)\end{aligned}$$

が成り立つ. よって, (1.2) が得られ，パンルベの定理によってこれはポリログ関数の解析接続公式となっている.

深さ d が一般の場合や類似型の関係式導出に関しても，目標とするディリクレ級数を留数和として有する求和関数 $f_{\mathbf{k}}(z;s)$ をうまく定義することができれば証明の流れは基本的には同じである.

2　深さ $d=1$ の場合

フルビッツ型と q-ポリログ関数に対する関係式を与える. 詳細について，フルビッツ型に関しては [10] を，q-類似に関しては [12] を参照のこと.

2.1　フルビッツ型ポリログ関数

任意の複素数 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対して，関数

$$\Phi(z,\beta,\alpha)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{(\alpha+j)^{\beta}}$$

をフルビッツ・レルヒのゼータ関数という. この関数 $\Phi(z,\beta,\alpha)$ は条件 $\alpha\neq 0,-1,-2,\ldots$ の下で単位円内 $|z|<1$ で正則である. 特に $\beta=k\in\mathbb{N}$ の場合をフルビッツ型ポリログ関数と呼び，$\mathrm{Li}_k(\alpha;z)$ と表す.

自然数 $k\in\mathbb{N}$ に対して，s を複素変数，α,z を $\alpha\notin\mathbb{Z}$, $0<\arg(z)<2\pi$ を満たす複素パラメーターとして，求和関数 $f_k(\alpha,z;s)$ を

$$f_k(\alpha,z;s)=\frac{2\pi i}{e^{2\pi i s}-1}\frac{z^s}{(s+\alpha)^k}\tag{2.1}$$

と定義する. このとき $f_k(\alpha,z;s)$ は単純極 $s=n$ $(n\in\mathbb{Z})$ と k 位の極 $s=-\alpha$ をもつ有理型関数であり，正整数点における留数の和が $\mathrm{Li}_k(\alpha;z)$ となっている.

$f_k(\alpha,z;s)$ に対する留数計算及び積分の評価を行うと，次の結果が成り立つことが分かる.

定理 2.1. $k\in\mathbb{N}$ を自然数, $s\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ を整数とは異なる複素数とするとき, $\mathrm{Li}_k(\alpha;z)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 全体に解析接続可能であり，$0<\arg(z)<2\pi$ の条件の下で，単位円内 $|z|<1$ と単位円外 $|z|>1$ との接続公式は

$$\begin{aligned}z\mathrm{Li}_k(\alpha+1;z)=&-\frac{1}{\alpha^k}+(-1)^{k+1}\frac{1}{z}\mathrm{Li}_k\left(-\alpha+1;\frac{1}{z}\right)\\&-z^{-\alpha}\sum_{\substack{m_1+m_2=k-1\\m_1,m_2\geq 0}}\frac{(-1)^{m_1}\psi^{(m_1)}(1+\alpha)-\psi^{(m_1)}(-\alpha)-\pi i\delta_{m_1,0}}{m_1!}\frac{\log^{m_2}z}{m_2!}\end{aligned}$$

で与えられる.

2.1.1 q-ポリログ関数

自然数 n と $0<q<1$ を満たす実数 q に対して，$[n]=\dfrac{1-q^n}{1-q}$ を q-整数という．自然数 $k\in\mathbb{N}$ と $|z|<1$，$0<\arg(z)<2\pi$ を満たす複素変数 $z\in\mathbb{C}$ に対して，q-ゼータ関数および q-ポリログ関数（または q-類似）は

$$\zeta[k]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n(k-1)}}{[n]^k}\quad(k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}),\quad \mathrm{Li}_k[z]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{[n]^k}$$

と定義される ([17])．$k\in\mathbb{Z}_{\geq 2}$ ならば $\mathrm{Li}_k[z]$ は単位円内 $|z|<1$ で正則であり，$\mathrm{Li}_k[q^{k-1}]=\zeta[k]$ が成り立つ．

求和関数 $f_k[z;s]$ を

$$f_k[z;s]=\frac{2\pi i}{e^{2\pi is}-1}\frac{z^s}{[s]^k}\frac{1}{s^2}\tag{2.2}$$

で定義する．ただし $z\in\mathbb{C}$ は $0<\arg(z)<2\pi$ を満たす複素パラメーターであり，$z=0$ のとき $f_k[z;s]=0$ であるとする．$z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を固定すると，$f_k[z;s]$ は s の有理型関数であり，$s=n$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ に単純極を，$s=0$ に $(k+3)$ 位の極を，$s=\frac{2n\pi i}{\log q}$ $(n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ に k 位の極を持つ．

留数計算及び積分の評価により，次の結果を得る．

定理 2.2. $0<\arg(z)<2\pi$ とする．$0<q<1$, $k\in\mathbb{N}$ に対して，級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{[n]^k}\frac{1}{n^2}$ は $|z|<1$ 上定義され，$|z|>q^k$ に解析接続可能である．特に

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{[n]^k}\frac{1}{n^2}=&(-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^k}{z}\right)^n\frac{1}{[n]^k}\frac{1}{n^2}\\&-\frac{(q-1)^k}{(k+2)!}\sum_{n=0}^{k+2}\binom{k+2}{n}(2\pi i)^n B_n\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)\frac{B^{(k)}_{k+2-n}}{\log^{n-2}q}\\&-\left(\sum_{n=1}^{\infty}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\right)\sum_{a+b+c+d=k-1}\frac{d+1}{b!c!}\frac{(q-1)^k}{\log^{k-b-d-2}q}B^{(k)}_b z^{\frac{2n\pi i}{\log q}}\log z(-1)^d\\&\times\left(\frac{1}{2n\pi i}\right)^{d+2}(2\pi i)^{a+1}\sum_{h=0}^{a}\sum_{\beta\in P_a,|\beta|=h}h!\prod_{j=1}^{a}\frac{1}{\beta_j!(j!)^{\beta_j}}\frac{\left(-e^{-\frac{4n\pi^2}{\log q}}\right)^h}{\left(e^{-\frac{4n\pi^2}{\log q}}-1\right)^{h+1}}\end{aligned}\tag{2.3}$$

が成り立つ．ただし $a\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して $P_a=\{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_a)\in\mathbb{Z}^a_{\geq 0}|\sum_{j=1}^a j\beta_j=a\}$ であり，$\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_a)$ に対し $|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_a$ である．

公式 (2.3) は絶対収束するのでオイラー作用素 $D=z\dfrac{d}{dz}$ を二回作用させることにより，左辺は q-ポリログ関数

$$D^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{[n]^k}\frac{1}{n^2}=\mathrm{Li}_k[z]$$

となる．また，右辺に関しては，

$$D^2(-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^k}{z}\right)^n\frac{1}{[n]^k}\frac{1}{n^2}=(-1)^k\mathrm{Li}_k\left[\frac{q^k}{z}\right]$$

であり， $\dfrac{d}{dz}(B_n(z)) = nB_{n-1}(z)$ より

$$
\begin{aligned}
&D^2\frac{(q-1)^k}{(k+2)!}\sum_{n=0}^{k+2}\binom{k+2}{n}(2\pi i)^n B_n\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)\frac{B^{(k)}_{k+2-n}}{\log^{n-2} q}\\
=&\frac{(q-1)^k}{k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(2\pi i)^n B_n\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)\frac{B^{(k)}_{k-n}}{\log^{n} q},
\end{aligned}
$$

さらに

$$
\begin{aligned}
&D^2\left(z^{\frac{2n\pi i}{\log q}}\log^c z\right)\\
=&\log^2 q(2n\pi i)^2 z^{\frac{2n\pi i}{\log q}}\log^c z\left\{1+2c\left(\frac{\log q}{2n\pi i\log z}\right)+c(c-1)\left(\frac{\log q}{2n\pi i\log z}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

であることから，q-ポリログ関数に対する次の結果を得る．

定理 2.3. $0<\arg(z)<2\pi$ とする．$0<q<1$, $k\in\mathbb{N}$ に対して $|z|<1$ で定義された q-ポリログ関数 $\mathrm{Li}_k[z]$ は $\mathbb{C}$ に解析接続可能であり，関数関係式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}_k[z]=&(-1)^{k+1}\mathrm{Li}_k\left[\frac{q^k}{z}\right]\\
&-\frac{(q-1)^k}{k!}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}(2\pi i)^n B_n\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)\frac{B^{(k)}_{k-n}}{\log^n q}\\
&-\left(\sum_{n=1}^{\infty}+\sum_{n=-\infty}^{-1}\right)\sum_{a+b+c+d=k-1}\frac{d+1}{b!c!}\frac{(q-1)^k}{\log^{k-b-d} q}B^{(k)}_b z^{\frac{2n\pi i}{\log q}}\log z(-1)^d\left(\frac{1}{2n\pi i}\right)^d\\
&\times(2\pi i)^{a+1}\sum_{h=0}^{a}\sum_{\beta\in P_a,|\beta|=h}h!\prod_{j=1}^{a}\frac{1}{\beta_j!(j!)^{\beta_j}}\frac{\left(-e^{-\frac{4n\pi^2}{\log q}}\right)^h}{\left(e^{-\frac{4n\pi^2}{\log q}}-1\right)^{h+1}}\\
&\times\left\{1+2c\left(\frac{\log q}{2n\pi i\log z}\right)+c(c-1)\left(\frac{\log q}{2n\pi i\log z}\right)^2\right\}
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

が成り立つ．ただし，$a\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して $P_a=\{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_a)\in\mathbb{Z}^a_{\geq 0}|\sum_{j=1}^a j\beta_j=a\}$ であり，$\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_a)$ に対して $|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_a$ である．

(2.4) において q を 1 に近づける極限を取ることにより, ポリログ関数 $\mathrm{Li}_k(z)$ の公式 (1.2) を得る．

q-ポリログ関数の場合，求和関数 $f_k[z;s]$ を (1.1) と同じ形で

$$
f_k[z;s]=\frac{2\pi i}{e^{2\pi is}-1}\frac{z^s}{[s]^k}
$$

とするのではなく，原点における極の位数を上げて (2.2) で定義し，導出された関係式に z に関するオイラー作用素を作用させることで q-ポリログ関数の関係式を与えている．

3　深さが 2 の場合

$k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ に対し，二重ポリログ関数の一般化調和数 $\zeta_n(k) = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^k}$ を用いた表記

$$\mathrm{Li}_{k_1,k_2}(z) = \sum_{m_1 > m_2 > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}} = \sum_{m_1=1}^{\infty} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1}} \zeta_{m_1-1}(k_2)$$

に注目する．

一般化調和数はポリガンマ関数で補間されることが知られている．ポリガンマ関数は $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対してガンマ関数 $\Gamma(z)$ の対数微分を用いて

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z), \quad \psi^{(k)}(z) = \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} \log \Gamma(z)$$

と定義され，任意の $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\psi^{(k)}(n+\alpha) - \psi^{(k)}(\alpha) = (-1)^k k! \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(m+\alpha)^{k+1}} \tag{3.1}$$

を満たし，

$$\psi^{(k)}(1) = \begin{cases} -\gamma & (k=0), \\ (-1)^{k+1} k! \zeta(k+1) & (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

を満たす．ここで，$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} - \log n \right)$ はオイラー数である．また，

$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{e^{2\pi z i} - 1} &= \pi \cot \pi z - \pi i \\ &= \psi(1-z) - \psi(z) - \pi i \end{aligned}$$

が成り立つ．

3.1　ダブルポリログ関数

$k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ を自然数，z は $0 < \arg(z) < 2\pi$ を満たす複素変数とする．二重ポリログ関数

$$\mathrm{Li}_{k_1,k_2}(z) = \sum_{m_1 > m_2 > 0} \frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2}}$$

は単位円内 $|z| < 1$ で正則であり，$z = 1$ を除く単位円周上 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, z \neq 1\}$ で連続である．

求和関数 $f_{k_1,k_2}(z;s)$ を，(1.1) に一般化調和数を補間するポリガンマ関数をかけた

$$f_{k_1,k_2}(z;s) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i s} - 1} \frac{z^s}{s^{k_1}} \frac{(-1)^{k_2-1}}{(k_2-1)!} \{\psi^{(k_2-1)}(s) - \psi^{(k_2-1)}(1)\} \tag{3.2}$$

で与える．このとき $f_{k_1,k_2}(z;s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数であり，正整数を単純極に，負整数を (k_2+1) 位の極に，原点を (k_1+k_2+1) 位の極に持つ．特に正整数における留数の和は

$$\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{s=m} f_{k_1,k_2}(z;s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m^{k_1}} \zeta_{m-1}(k_2) = \mathrm{Li}_{k_1,k_2}(z)$$

となり，二重ポリログ関数を与える．留数計算と積分評価を行うことで，二重ポリログ関数の $|z| > 1$ への接続公式が得られる ([10])．

定理 3.1. $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < \arg(z) < 2\pi$ とする．単位円内で正則な二重ポリログ関数 $\mathrm{Li}_{k_1,k_2}(z)$ は全複素平面 $\mathbb{C}$ に解析接続され，

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{k_1,k_2}(z) &= (-1)^{k_1+k_2}\mathrm{Li}_{k_1,k_2}\left(\frac{1}{z}\right) \\ &\quad + (-1)^{k_1+k_2}\mathrm{Li}_{k_1+k_2}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{(2\pi i)^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)!}B_{k_1+k_2}\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right) \\ &\quad + (-1)^{k_1}\sum_{m=0}^{k_2}\binom{k_1+m-1}{k_1-1}\mathrm{Li}_{k_1+m}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{(2\pi i)^{k_2-m}}{(k_2-m)!}B_{k_2-m}\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{k_1}(-1)^m\binom{k_2+m-1}{k_2-1}\zeta(k_2+m)\frac{(2\pi i)^{k_1-m}}{(k_1-m)!}B_{k_1-m}\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$B_n(z)$ は母関数表示

$$\frac{te^{zt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B_n(z)\frac{t^n}{n!}$$

で定義されるベルヌーイ多項式である．

3.2 二重フルビッツゼータ値

自然数 $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ と，複素パラメーター α_1, α_2 に対して，二重フルビッツゼータ値は

$$\zeta(k_1,k_2;\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{m_1>m_2\geq 0}\frac{1}{(m_1+\alpha_1)^{k_1}(m_2+\alpha_2)^{k_2}} \tag{3.3}$$

で定義され，$k_1 \geq 2$ のときに収束する．

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$ を複素パラメーターとして，複素変数 $s \in \mathbb{C}$ の有理型関数

$$f_{k_1,k_2}(z;s) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi si}-1}\frac{1}{(s+\alpha_1)^{k_1}}\frac{(-1)^{k_2-1}}{(k_2-1)!}\Big\{\psi^{(k_2-1)}(s+\alpha_2) - \psi^{(k_2-1)}(\alpha_2)\Big\},$$

を求和関数に取る．$f_{k_1,k_2}(z;s)$ は 0 を除く整数および $-\alpha_1$, $-\alpha_2+n$ $(n \in \mathbb{N}\cup\{0\})$ を極に持つ．特に，正整数における留数の和は二重フルビッツゼータ値 $\zeta(k_1,k_2;\alpha_1,\alpha_2)$ を与える．

定理 3.2. 複素パラメーター $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ は条件 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ を満たし，さらに $\Im\alpha_1 = \Im\alpha_2$ なら

ば $\alpha_1 \not\equiv \alpha_2 \mod \mathbb{Z}$ であるとする．$k_2 \geq 2$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\zeta(k_1, k_2; \alpha_1, \alpha_2) + (-1)^{k_1+k_2+1}\zeta(k_1, k_2; -\alpha_1, 1-\alpha_2) \\
&= \frac{(-2\pi i)^{k_1}}{(k_1-1)!}\sum_{r=0}^{k_1} r!S(k_1, r)\frac{e^{-2\pi i\alpha_1 r}}{2^{r+1}}(1+i\mathrm{cot}\pi\alpha_1)^{r+1}\zeta(k_2; \alpha_2) \\
&+ (-1)^{k_1+1}\sum_{l=1}^{k_1-1}\binom{k_1+k_2-l-2}{k_2-1}\frac{(2\pi i)^{l+1}}{l!} \\
&\quad \times \sum_{r=0}^{l+1} r!S(l+1, r)\frac{e^{-2\pi i\alpha_1 r}}{2^{r+1}}(1+i\mathrm{cot}\pi\alpha_1)^{r+1}\zeta(k_1+k_2-l-1; \alpha_2-\alpha_1) \\
&+ (-1)^{k_1+1}\sum_{l=1}^{k_2-1}\binom{k_1+k_2-l-2}{k_1-1}\frac{(-2\pi i)^{l+1}}{l!} \\
&\quad \times \sum_{r=0}^{l+1} r!S(l+1, r)\frac{e^{-2\pi i\alpha_2 r}}{2^{r+1}}(1+i\mathrm{cot}\pi\alpha_2)^{r+1}\zeta(k_1+k_2-l-1; \alpha_2-\alpha_1) \\
&+ (-1)^{k_1+1}\binom{k_1+k_2-2}{k_1-1}\zeta(k_1+k_2-1; \alpha_2-\alpha_1)\pi\{\cot(\alpha_1\pi) - \cot(\alpha_2\pi)\}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $S(k, r)$ は第 2 種スターリング数である．

[4] では，上述の $\alpha_1 \neq \alpha_2$ の場合のほか，パラメーター (α_1, α_2) が $(\alpha, 1)$, (α, α) の場合に対する結果も与えている．$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ に対する結果に $\alpha = \dfrac{1}{2}$ を代入することで，level 2 二重ゼータ値（または二重 t-値）に対する関係式が得られる ([5])．

4 深さが一般の場合

多重ポリログ関数は一般化多重調和数

$$\zeta_N(\mathbf{k}) = \zeta_N(k_1, k_2, \ldots, k_d) = \sum_{N \geq m_1 > m_2 > \cdots > m_d > 0}\frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\ldots m_d^{k_d}}$$

を用いて

$$\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z) = \sum_{m_1=d}^{\infty}\frac{z^{m_1}}{m_1^{k_1}}\zeta_{m_1-1}(k_2, \ldots, k_d)$$

と表すことができる．この表記に注目すると，留数計算を用いた関係式の導出にはダブルポリログ関数の場合のポリガンマ関数のように，一般化多重調和数 $\zeta_N(\mathbf{k})$ を補間する関数が必要となることが分かる．一般化多重調和数の補間関数としては $\zeta_N^\star(\mathbf{k})$ の補間関数としての川島関数 ([7]) や Zlobin の関数 ([18]) が知られているが，より留数計算に適した形で補間関数を定義しよう ([9])．

インデックス $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^d$ に対して，以下の記号を定義する．$j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して，

$$\mathbf{k}_j = (k_1, \ldots, k_j) \in \mathbb{N}^j, \mathbf{k}^j = (k_{j+1}, \ldots, k_d) \in \mathbb{N}^{d-j}, k = \sum_{j=1}^{d} k_j.$$

ただし，$\mathbf{k}_d = \mathbf{k}^0 = \mathbf{k}$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}^d = \emptyset$ とする．複素関数 $\Psi_{\mathbf{k}}(s)$ を，$d \geq 1$ のとき

$$\Psi_{\mathbf{k}}(s) = \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\frac{\Psi_{\mathbf{k}^1}(j-1)}{j^{k_1}} - \frac{\Psi_{\mathbf{k}^1}(s+j-1)}{(s+j)^{k_1}}\right\}, \tag{4.1}$$

$d=0$ のインデックス $\emptyset$ に対して $\Psi_{\emptyset}(s)=1$ と定義する．$d=1$ の場合，$\Psi_1(s)=\log s+\gamma+\psi(s)$ であり，$k\geq 2$ に対して $\Psi_k(s)=\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\psi^{(k-1)}(s+1)+\zeta(k)$ が成り立つ．ここで γ はオイラー数である．関数 $\Psi_{\mathbf{k}}(s)$ は負の整数を極に持つ有理型関数であり，次の性質を満たす ([9])．

- （補間）$n=0,1,\ldots,d-1$ について $\Psi_{\mathbf{k}}(n)=0$ であり，d 以上の整数 N について
$$\Psi_{\mathbf{k}}(N)=\zeta_N(\mathbf{k})$$
つまり，$\Psi_{\mathbf{k}}(s)$ は一般化多重調和数 $\zeta_N(\mathbf{k})$ を補間する．
- （差分公式）
$$\Psi_{\mathbf{k}}(s)=\Psi_{\mathbf{k}}(s+1)-\frac{1}{(s+1)^{k_1}}\Psi_{\mathbf{k}^1}(s) \tag{4.2}$$
この性質により，$\Psi_{\mathbf{k}}(s)$ は複素平面全体へ有理型接続可能である．
- （漸近評価）$|\arg s|<\pi$ とする．$\Psi_{\mathbf{k}}(s)$ は $|s|\to\infty$ の場合に次の漸近評価を持つ．$\mathbf{k}$ が収束インデックスの場合は
$$\Psi_{\mathbf{k}}(s)=\zeta(\mathbf{k})+O(|s|^{-1+\varepsilon})$$
であり，インデックス $\mathbf{k}$ が収束インデックス $\mathbf{k}'$ に対して $\mathbf{k}=(\underbrace{1,\ldots,1}_{l},\mathbf{k}')$ と表される場合は
$$\Psi_{\mathbf{k}}(s)=P_{\mathbf{k},l}(\log|s|)+O(|s|^{-1}\log^J|s|)$$
である．ここで，$J\geq 0$ であり，$P_{\mathbf{k},l}(x)$ は高々l 次の多項式である．

一般化多重調和数の補間関数 $\Psi_{\mathbf{k}}(s)$ を用いて，求和関数を
$$f_{\mathbf{k}}(z;s)=\frac{2\pi i}{e^{2\pi is}-1}\frac{z^s}{s_1^k}\Psi_{\mathbf{k}^1}(s-1) \tag{4.3}$$
と定義する．ただし，$|\arg(z)|<\pi$ とする．$f_{\mathbf{k}}(z;s)$ は整数を極に持ち，上に挙げた性質により，正の整数における留数の和はインデックス $\mathbf{k}$ に対する多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ となる．留数計算と積分の評価を行うことにより，次の関係式を得る ([11])．

定理 4.1. 単位円内で正則な多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体に解析接続可能であり，
$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{\mathbf{k}}(z)&=(-1)^{d+k}\mathrm{Li}^{\star}_{\mathbf{k}}\left(\frac{1}{z}\right)+\sum_{\substack{n_1,n_2,n_3\geq 0\\ n_1+n_2+n_3=|\mathbf{k}^1|}}\mathcal{B}_{n_1}(z)\underline{(k_1)_{n_2}}\\ &\times\left\{\sum_{1\leq\tau\leq d-1}\sum_{\substack{j=\tau\\ n_3\geq|\mathbf{k}^j|}}^{d}(-1)^j\sum_{\substack{\mathbf{t}_\tau\in\mathbb{Z}^\tau_{\geq 0}\\ |\mathbf{t}_\tau|=n_3-(|(\mathbf{k}_\tau)^1|+|\mathbf{k}^j|)}}\prod_{i=2}^{\tau}\underline{(k_i)_{t_i}}\zeta_\sigma(\mathbf{k}^j,t_1)\mathrm{Li}^{\star}_{k_1+n_2,(\mathbf{k}_\tau+\mathbf{t}_\tau)^1}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}\\ &+\sum_{j=1}^{d}(-1)^j\sum_{n=0}^{|\mathbf{k}_j|}\mathcal{B}_n(z)\zeta_\sigma(\mathbf{k}^j,|\mathbf{k}_j|-n)\end{aligned} \tag{4.4}$$
が成り立つ．ただし，
$$\underline{(k)_n}=\frac{(-1)^k(k)_n}{n!},\quad \mathcal{B}_n(z)=\frac{(2\pi i)^n}{n!}B_n\left(\frac{\log z}{2\pi i}\right),\quad \zeta_\sigma(\emptyset,m)=\begin{cases}0, & m>0,\\ 1, & m\leq 0,\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\zeta_\sigma(\mathbf{k}^j, m) = \quad & (-1)^m \sum_{\nu=1}^{d-j} \sum_{\substack{(\mathbf{l}_{j+\nu})^j \in (\mathbb{Z}_{>0})^\nu \\ |(\mathbf{l}_{j+\nu})^j| = m \\ l_{j+\nu} > 0}} \prod_{i=1}^{\nu} \underline{(k_{j+i})_{l_{j+i}}} (-1)^{j+i+\nu} \\
& \times \sum_{\iota=0}^{\nu-1} \zeta(|(\mathbf{k}_{j+\nu} + \mathbf{l}_{j+\nu})^{j+\iota}|, \overleftarrow{\square}(\mathbf{k}_{j+\iota} + \mathbf{l}_{j+\iota})^j * \mathbf{k}^{j+\nu})
\end{aligned}
$$

である．

関係式 (4.4) を実部と虚部に分解して得られる結果から，多重クラウゼン関数と多重グレイシャー関数 ([2]) の間に成り立つ関係式や，多重 L-値，Mordell-Tornheim L-値に関する等式を導くことができる ([14])．

求和関数 (4.3) において，$z = e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ や $z = 1$ とした場合に対する結果は，多重ゼータ値の Parity result（cf. [15, 16]） を与える．論文 [11] では，$d = 3, 4$ に対する例を挙げているが計算の詰めが甘く，Parity result に対応する最終形とはなっていないので注意されたい．

5　今後の課題に関して

対応する補間関数 $\Psi_{\mathbf{k}}(s)$ を適切に定義することで，様々なディリクレ級数に対する関係式を同様の手法で導出することができる．例えば，フルビッツ型多重ポリログ関数

$$
\mathrm{Li}_{\mathbf{k};\alpha}(z) = \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_d \geq 0} \frac{z^{m_1}}{(m_1+\alpha)^{k_1}(m_2+\alpha)^{k_2} \ldots (m_d+\alpha)^{k_d}}
$$

の場合は補間関数を

$$
\Psi_{\mathbf{k};\alpha}(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{\Psi_{\mathbf{k}^1;\alpha}(j-1)}{(\alpha+j)^{k_1}} - \frac{\Psi_{\mathbf{k}^1;\alpha}(s+j-1)}{(s+\alpha+j)^{k_1}} \right\}
$$

と定義して，求和関数

$$
f_{\mathbf{k};\alpha}(z; s) = \frac{2\pi i}{e^{2\pi i s} - 1} \frac{z^s}{(s+\alpha)^{k_1}} \Psi_{\mathbf{k}^1;\alpha-1}(s)
$$

に対する留数解析を行うことで $\mathrm{Li}_{\mathbf{k};\alpha}(z)$ と $\mathrm{Li}_{\mathbf{k};\alpha}\left(\frac{1}{z}\right)$ との間に成り立つ関数関係式を導出することができる ([5])．一般の深さのポリログ関数の q-類似や，Mordell-Tornheim 型，Umezawa 型，Arakawa-Kaneko ゼータ値など級数部分の擬変数の取り方が複雑な類似型などについての補間関数の考察は今後の課題である．

また，補間関数 (4.1) のインデックス $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^d$ を $\mathbb{C}^d$ に拡張した場合の諸性質に関して，慶応義塾大学の山本修二氏，近畿大学の井原健太郎氏と研究中である ([6])．

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, *On multiple L-values*, J Math. Soc. Japan, **56** (2004), 967–991.

[2] J. M. Borwein, D. Broadhurst and J. Kamnitzer, *Central binomial sums, multiple Clausen values, and zeta values*, Experimental Mathematics, **10** (2001), 25–34.

[3] 一松　信, 留数解析–留数による定積分と級数の計算–（数学ワンポイント双書 1）, 共立出版.

[4] 細美　芽以, 二重フルヴィッツ・ゼータ値の関係式, 近畿大学大学院修士論文 (2021).

[5] M. Hosomi and Y.Nakamura, *A formula for multiple Hurwitz zeta values*, in preparation.

[6] K. Ihara, Y. Nakamura, S. Yamamoto, *Interpolant of truncated multiple zeta functions*, in preparation.

[7] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory, **129** 755–788, (2009).

[8] 楠　佑介, ダブルポリログ関数の解析接続について, 近畿大学大学院修士論文 (2017).

[9] Y.Kusunoki and Y.Nakamura, *An interpolation function of multiple harmonic sum*, Res Number Theory, (2022)8:81.

[10] Y.Kusunoki, Y.Nakamura and Y.Sasaki, *Analytic continuation of double polylogarithm by means of residue calculus*, Comment. Math. Univ. St. Pauli 67 (2019), 49-64.

[11] Y. Kusunoki, Y. Nakamura and Y. Sasaki, *Functional relation formula for analytic continuation of multiple polylogarithm*, Acta Arithmetica, **195** (2020), 131-148.

[12] 黒田　響, *q-integer* を係数に持つポリログ関数の関係式の導出, 近畿大学大学院修士論文 (2022).

[13] D. S. Mitrinović and J. D. Kečkić, The Cauchy Method of Residues Volume 2, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[14] Y. Nakamura and Y. Sasaki, *Evaluation of functional relation formula for the Clausen and Glaisher functions and multiple L-values*, Lithuanian Math. J., to appear.

[15] E. Panzer, *The parity theorem for multiple polylogarithms*, J. Number Theory, **172** (2017), 93–113.

[16] J. Zhao, *Analytic continuation of multiple polylogarithms*, Analysis Mathematica **33** (2007), no. 4 pp. 301–323.

[17] J.Zhao, *q-Multiple Zeta Functions and q-Multiple Polylogarithms*, The Ramanujan Journal **14**, 189–221 (2007).

[18] S. A. Zlobin, *G*enerating functions for the values of a multiple zeta function, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., No. 2, 55-59 (2005) [Moscow Univ. Math. Bull. **60** (3), 44-48 (2005)].