On multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko and Euler-Zagier types

弘前大学大学院理工学研究科　　川﨑　菜穂 *
Naho Kawasaki
Graduate School of Science and Technology,
Hirosaki University

Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数と Euler-Zagier 型多重ゼータ関数は, Riemann ゼータ関数の一般化である. Kaneko-Tsumura[2] は, 多重ポリログ関数に対する関数等式の存在を示すことで, これら 2 つの多重ゼータ関数の間の関数等式の存在も示した. 今回, この 2 つの多重ゼータ関数の関数等式および多重ポリログ関数の関数等式を明示的に与える. また, 系として, Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数の正整数点での特殊値に対する反転公式を与える ([3]).

1　2 つの多重ゼータ関数

この節では, 2 つの多重ゼータ関数を定義し, Arakawa-Kaneko[1] と Kaneko-Tsumura[2] による先行研究について述べる.

正の整数 $k_1,\ldots,k_r$ に対して, $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ を index と呼ぶ. 複素変数 s に対して, Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数 [1, p.203] を

$$\xi(\mathbf{k};s)=\xi(k_1,\ldots,k_r;s):=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_r;1-e^{-t})}{e^t-1}t^{s-1}dt \quad (\mathrm{Re}(s)>0) \tag{1}$$

で定義する. ただし, $\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_r;z)$ を多重ポリログ関数

$$\mathrm{Li}(\mathbf{k};z)=\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_r;z):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}} \quad (|z|<1)$$

とする. Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数 $\xi(\mathbf{k};s)$ は, 複素全平面に解析接続され, $\mathbf{k}=(1)$ とすると, $\xi(1;s)=s\zeta(s+1)$ となり, Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の一般化であることもわかる. さらに, Riemann ゼータ関数は負の特殊値に Bernoulli 数が現れることが知られているが, Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数 $\xi(\mathbf{k};s)$ の負の特殊値にも多重ポリ Bernoulli 数が現れる ([2, Remark 2.4]).

Arakawa-Kaneko は, (1 変数)Euler-Zagier 型多重ゼータ関数

$$\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1};s):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_{r-1}^{k_{r-1}}m_r^{s}}$$

*E-mail:naho.kawasaki@hirosaki-u.ac.jp

も導入した [1, p.2]. $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し, $\zeta(\varnothing;s)$ は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ とする. (Euler-Zagier 型多重ゼータ関数は本来, 多変数関数

$$\zeta_r(s_1,\ldots,s_r):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_r^{s_r}}$$

で定義される.) Euler-Zagier 型多重ゼータ関数 $\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1};s)$ には積分表示があり, $\mathrm{Re}(s)>1$ に対して,

$$\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1};s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty\frac{\mathrm{Li}(k_1,\ldots,k_{r-1};e^{-t})}{e^t-1}t^{s-1}dt \tag{2}$$

で表される ([1, Proposition 2]). また, $k_r\geq 2$ を満たす index $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ に対して,

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k_1,\ldots,k_r)&:=\zeta(k_1,\ldots,k_{r-1};k_r)\\&=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\end{aligned}$$

を多重ゼータ値と呼ぶ.

Arakawa-Kaneko は次の 2 つの定理を示した. 一つは, Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数 $\xi(\{1\}^{a-1},b;s)$ が Euler-Zagier 型多重ゼータ関数で表せることである. ここで, 非負整数 a に対して, $\{1\}^a=\underbrace{1,\ldots,1}_{a}$ とする.

定理 1.1 ([1, Theorem 8]). 任意の正の整数 a と非負整数 b, 複素数 s に対して, 次が成り立つ;

$$\begin{aligned}\xi(\{1\}^{a-1},b+1;s)&=\sum_{j=0}^{b-1}(-1)^j\zeta(\{1\}^{a-1},b+1-j)\zeta(\{1\}^j;s)\\&\quad+(-1)^b\sum_{\substack{e_1,\ldots,e_b,d\geq 0\\ e_1+\cdots+e_b+d=a}}\binom{s+d-1}{d}\zeta(e_1+1,\ldots,e_b+1;s+d).\end{aligned}$$

二つめは, 正整数点での特殊値 $\xi(\{1\}^{a-1},b+1;m+1)$ が反転公式をもつことである.

定理 1.2 ([1, Theorem 9 (2)]). 正の整数 a と非負整数 b, 正の整数 m に対して, 次が成り立つ;

$$\begin{aligned}&\xi(\{1\}^{a-1},b+1;m+1)-(-1)^b\xi(\{1\}^{m-1},b+1;a+1)\\&\qquad=\sum_{j=0}^{b-1}(-1)^j\zeta(\{1\}^{a-1},b+1-j)\zeta(\{1\}^{m-1},j+2)\end{aligned} \tag{3}$$

式 (3) の左辺の第 1 項は a,b,m の順に並び, 第 2 項は m,b,a と反転して現れている. このことから, 本稿では, 式 (3) を反転公式と呼ぶことにする.

Arakawa-Kaneko はさらに, これら 2 つの定理に関連して, 次の予想を与えた.

予想 1.3 ([1, §5 (i), (ii), (iii)]). $\mathbf{k}$ を index とする.

(i) Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数 $\xi(\mathbf{k};s)$ は定理 1.1 のように Euler-Zagier 型多重ゼータ関数で表せるだろうか?

(ii) $z \mapsto 1-z$ に対する $\mathrm{Li}(\mathbf{k};z)$ の関数等式は存在するだろうか?

(iii) 正整数点での値 $\xi(\mathbf{k};m+1)$ には式 (3) のような反転公式はあるだろうか?

もし, 予想 1.3 (ii) の多重ポリログ関数の関数等式が存在すれば, Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数の定義式 (1) と Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の積分表示 (2) を用いることによって, (i) を肯定的に解決することができる. Arakawa-Kaneko は, 多重ポリログ関数の関数等式を用いずに定理 1.1 を証明したが, (ii) の $r=1$ の場合の関数等式は得ていた ([1, p.202, Remarks (i)]);

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}(k;1-z) &= (-1)^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{Li}(\{1\}^{i-1},2,\{1\}^{k-1-i};z)\\ &\quad+\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(k-j)\mathrm{Li}(\{1\}^j;z)-(-1)^{k-1}\log(z)\mathrm{Li}(\{1\}^{k-1};z).\end{aligned}\tag{4}$$

この式 (4) から, 予想 1.3 (i) の $k=1$ の場合

$$\begin{aligned}\xi(k;s) &= (-1)^{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}\zeta(\{1\}^{i-1},2,\{1\}^{k-1-i};s)\\ &\quad+\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(k-j)\zeta(\{1\}^j;s)+(-1)^{k-1}s\zeta(\{1\}^{k-1};s+1)\end{aligned}\tag{5}$$

が得られる. 定理 1.1 で $a=1$, $b+1=k$ と特殊化しても, 式 (5) が得られる.

予想 1.3 (i), (ii) に対して, Kaneko-Tsumura[2] は 2 つの多重ゼータ関数の関数等式および多重ポリログ関数の関数等式それぞれの存在を示した. この定理を紹介するために記号を定める. 非負整数列 $\mathbf{e}=(e_1,\dots,e_r)$ に対して, $\mathbf{e}$ の weight と depth をそれぞれ $\mathrm{wt}(\mathbf{e})=e_1+\cdots+e_r$, $\mathrm{dep}(\mathbf{e})=r$ で定義する. また, index $\mathbf{k}$ に対して, weight $\mathrm{wt}(\mathbf{k})$ の多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ とも呼ぶことにする.

補題 1.4 ([2, Lemma 3.5])**.** 任意の index $\mathbf{k}$ に対して, 次が成り立つ;

$$\mathrm{Li}(\mathbf{k};1-z)=\sum_{\mathbf{k}',d\ge 0}c_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}';d)\mathrm{Li}(\{1\}^d;1-z)\mathrm{Li}(\mathbf{k}';z),$$

ただし, 右辺の和は, $\mathrm{wt}(\mathbf{k}')+d\le \mathrm{wt}(\mathbf{k})$ を満たす index $\mathbf{k}'(\mathbf{k}'=\varnothing$ も含む) と非負整数 d をわたるとし $c_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}';d)$ は weight $\mathrm{wt}(\mathbf{k})-\mathrm{wt}(\mathbf{k}')-d$ の多重ゼータ値のある $\mathbb{Q}$-線形結合とする. そして, empty index $\varnothing$ に対して, $\mathrm{Li}(\varnothing;z)=1$, $\mathrm{wt}(\varnothing)=0$ とし, 1 は weight 0 の多重ゼータ値とする.

この補題より, 次が得られる.

定理 1.5 ([2, Theorem 3.6])**.** 任意の index $\mathbf{k}$ に対して, $\xi(\mathbf{k};s)$ は多重ゼータ関数で書き表すことができる;

$$\xi(\mathbf{k};s)=\sum_{\mathbf{k}',d\ge 0}c_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}';d)\binom{s+d-1}{d}\zeta(\mathbf{k}';s+d).$$

ただし, 右辺の和は, $\mathrm{wt}(\mathbf{k}')+d\le \mathrm{wt}(\mathbf{k})$ を満たす index $\mathbf{k}'(\mathbf{k}'=\varnothing$ も含む) と非負整数 d をわたるとし $c_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}';d)$ は weight $\mathrm{wt}(\mathbf{k})-\mathrm{wt}(\mathbf{k}')-d$ のある多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$-線形結合とする.

補題 1.4 と定理 1.5 は, $c_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}';d)$ の存在性のみ示されていた. 主定理では, 任意の index に対して, 補題 1.4 および定理 1.5 それぞれの関数等式を明示的に与える. さらに, 主定理の系として, 予想 1.3 (iii) の反転公式を得たので, このことについても次節で述べる.

2 主定理

主定理を述べるために, 記法を準備する. index $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ と非負整数列 $\mathbf{e}:=(e_1,\ldots,e_r)$ に対して,

$$\mathbf{k}_-:=(k_1,\ldots,k_{r-1},k_r-1),\quad \mathbf{e}_+:=(e_1,\ldots,e_{r-1},e_r+1)$$

とし, $\mathbf{k}+\mathbf{e}:=(k_1+e_1,\ldots,k_r+e_r)$ とする. また, $b\,(\mathbf{k};\mathbf{e})$ を二項係数の積

$$b(\mathbf{k};\mathbf{e}):=\prod_{i=1}^{r}\binom{k_i+e_i-1}{e_i}$$

とする. index $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ の Hoffman 双対を

$$\mathbf{k}^\vee=(\underbrace{1,\ldots,1}_{k_1}+\underbrace{1,\ldots,1}_{k_2}+1,\ldots,1+\underbrace{1,\ldots,1}_{k_r})$$

で定義する. index $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ を

$$\mathbf{k}=(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\ldots,\{1\}^{a_n-1},b_n+1)\quad (a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_{n-1}\geq 1,b_n\geq 0)$$

と書き表したとき, $0\leq i,j\leq n$ を満たす非負整数 i, j に対して,

$$\begin{aligned}\mathbf{k}^i&=(\{1\}^{a_{i+1}-1},b_{i+1}+1,\ldots,\{1\}^{a_n-1},b_n+1)\\ \mathbf{k}_j&=(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\ldots,\{1\}^{a_j-1},b_j+1)\\ \overleftarrow{\mathbf{k}}&=(b_n+1,\{1\}^{a_n-1},\ldots,b_1+1,\{1\}^{a_1-1})\end{aligned}$$

とする. ただし, $\mathbf{k}_0=\mathbf{k}^n=\varnothing$ とする. そして, index $\mathbf{k}$ が $b_n\geq 1$ を満たすとき, index $\mathbf{k}^\dagger$ を

$$\mathbf{k}^\dagger=(\{1\}^{b_n-1},a_n+1,\ldots,\{1\}^{b_1-1},a_1+1)$$

で定義する. このとき, $\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}^\dagger)$ が成り立つことが知られており, この関係式を多重ゼータ値の双対公式と呼ぶ. また, Hoffman 双対 $\mathbf{k}^\vee$ は双対を用いて, $\mathbf{k}^\vee=\overleftarrow{((\mathbf{k}_+)^\dagger)}_-$ と書くことができるが, 煩雑さを避けるため導入する.

以下, $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_{n-1}$ を正の整数, b_n を非負整数とする. 主定理は以下の通りであり, これらは補題 1.4 および定理 1.5 の精密化となっている.

定理 2.1. index $\mathbf{k}=(\{1\}^{a_1-1},b_1+1,\ldots,\{1\}^{a_n-1},b_n+1)$ に対して, Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数 $\xi(\mathbf{k};s)$ は多重ゼータ関数を用いて, 次のように表される;

$$\begin{aligned}&\xi(\mathbf{k};s)\\ &=(1-\delta_{0,b_n})\zeta(\mathbf{k})\zeta(s)-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{b_l-2}(-1)^{j+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^l)}\zeta(\mathbf{k}_{l-1},\{1\}^{a_l-1},b_l-j)\zeta((j+1,\mathbf{k}^l)^\vee;s)\\ &\quad+\sum_{l=1}^{n}(-1)^{b_l+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^l)}\sum_{d=0}^{a_l}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{e}_1)+\mathrm{wt}(\mathbf{e}_2)+d=a_l\\ \mathrm{dep}(\mathbf{e}_1)=n_1,\ \mathrm{dep}(\mathbf{e}_2)=n_2}}(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{e}_1)}b\left((\mathbf{k}_{l-1})^\dagger;\mathbf{e}_1\right)\\ &\quad\quad\times\zeta((\mathbf{k}_{l-1})^\dagger+\mathbf{e}_1)b\left((b_l,\mathbf{k}^l)^\vee;\mathbf{e}_2\right)\binom{s+d-1}{d}\zeta((b_l,\mathbf{k}^l)^\vee+\mathbf{e}_2;s+d).\end{aligned}$$

ただし, 右辺の和はそれぞれ, $\mathrm{wt}\,(\mathbf{e}_1)+\mathrm{wt}\,(\mathbf{e}_2)+d=a_l$, $n_1=\mathrm{dep}((\mathbf{k}_{l-1})^\dagger)$, $n_2=\mathrm{dep}((b_l,\mathbf{k}^l)^\vee)$ を満たす非負整数列 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ をわたる.

定理 2.1 は, 次の多重ポリログ関数の関数等式から導かれる.

定理 2.2. index $\mathbf{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \dots, \{1\}^{a_n-1}, b_n+1)$ に対して,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Li}(\mathbf{k}; 1-z)\\
&= (1-\delta_{0,b_n})\zeta(\mathbf{k}) - \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{b_l-2}(-1)^{j+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^l)}\zeta(\mathbf{k}_{l-1}, \{1\}^{a_l-1}, b_l-j)\mathrm{Li}((j+1,\mathbf{k}^l)^\vee; z)\\
&\quad + \sum_{l=1}^{n}(-1)^{b_l+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^l)}\sum_{d=0}^{a_l}\sum_{\substack{\mathrm{wt}(\mathbf{e}_1)+\mathrm{wt}(\mathbf{e}_2)+d=a_l\\ \mathrm{dep}(\mathbf{e}_1)=n_1,\ \mathrm{dep}(\mathbf{e}_2)=n_2}}(-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{e}_1)}b\left((\mathbf{k}_{l-1})^\dagger; \mathbf{e}_1\right)\\
&\quad\quad \times \zeta((\mathbf{k}_{l-1})^\dagger + \mathbf{e}_1)b\left((b_l,\mathbf{k}^l)^\vee; \mathbf{e}_2\right)\mathrm{Li}(\{1\}^d; 1-z)\mathrm{Li}((b_l,\mathbf{k}^l)^\vee + \mathbf{e}_2; z)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ただし, 右辺の和はそれぞれ, $\mathrm{wt}\,(\mathbf{e}_1) + \mathrm{wt}\,(\mathbf{e}_2) + d = a_l$, $n_1 = \mathrm{dep}((\mathbf{k}_{l-1})^\dagger)$, $n_2 = \mathrm{dep}((b_l,\mathbf{k}^l)^\vee)$ を満たす非負整数列 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ をわたる.

定理 2.1, 2.2 は, 補題 1.4 と定理 1.5 に現れる $c_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}'; d)$ を精密に与えている. また, 定理 2.1 より, 次の Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数の特殊値に対する反転公式が得られる.

系 2.3. index $\mathbf{k} = (\{1\}^{a_1-1}, b_1+1, \dots, \{1\}^{a_n-1}, b_n+1)$ と正の整数 m に対して,

$$
\begin{aligned}
&\xi(\mathbf{k}; m+1) - (-1)^{\mathrm{wt}(\mathbf{k})-a_1}\xi(\{1\}^{m-1}, \overleftarrow{(b_1,\mathbf{k}^1)_+}; a_1+1)\\
&= (1-\delta_{0,b_n})\zeta(\mathbf{k})\zeta(m+1)\\
&\quad - \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{b_l-2}(-1)^{j+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^l)}\zeta(\mathbf{k}_{l-1}, \{1\}^{a_l-1}, b_l-j)\zeta(\{1\}^{m-1}, \overleftarrow{(j+2,\mathbf{k}^l)_+})\\
&\quad + \sum_{l=2}^{n}\sum_{d=0}^{a_l}(-1)^{b_l+\mathrm{wt}(\mathbf{k}^l)+d}\xi((\mathbf{k}_l)_-; d+1)\xi(\{1\}^{m-1}, \overleftarrow{(b_l,\mathbf{k}^l)_+}; a_l-d+1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

左辺の第 1 項を見ると, $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, m$ の順に並んでおり, 第 2 項はその逆順で $m, b_n, a_n, \dots, b_1, a_1$ と反転して現れるため, 予想 1.3 (iii) を肯定的に解決していることがわかる.

定理 2.1, 定理 2.2 をそれぞれ $n=1$ に特殊化すると, 定理 1.1(Arakawa-Kaneko[1, Theorem 8]) と C. Xu[4, Remark 2.3] が得られる. また, 系 2.3 を $n=1$ に特殊化すると, 定理 1.2(Arakawa-Kaneko[1, Theorem 9 (2)]), $a_2, \dots, a_n = 1$ に特殊化すると, C. Xu[4, Theorem 3.3] が得られる.

謝辞

女性参画推進型 RIMS 集会「Zeta functions and their representations」での講演の機会をくださいました世話人の中筋 麻貴先生 (上智大学), Ade Irma Suriajaya 先生 (九州大学) に心より感謝申し上げます. 本研究発表には, JSPS 科研費 JP19K03437 の支援を受けました.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189–209.

[2] M. Kaneko and H. Tsumura, *Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **232** (2018), 19–54.

[3] N. Kawasaki, *Multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko and Euler-Zagier types*, in preparation.

[4] C. Xu, *Duality formulas for Arakawa-Kaneko zeta values and related variants*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **44** (2021), no. 5, 3001–3018.