3次元および4次元リーマン多様体上の接続の空間における(捩れ) ディラック構造

麻布大学 獣医学部 廣田祐士
Yuji Hirota
School of Veterinary Medicine, Azabu University
早稲田大学 理工学術院 郡敏昭
Tosiaki Kori
Faculty of Science and Engineering, Waseda University

1 序

接続の空間の幾何は, ゲージ理論や共形場理論等の物理学に端を発する話題と相俟って数学, 物理の双方から盛んに研究されている. 殊にゲージ場の量子化は数学的にも興味深い話題であり, これまでに曲面の平坦接続のモデュライ空間の量子化[1]が知られている [1].

量子化とは, ある一定の条件を満たすように古典力学系を量子力学系に対応させる手続きである. 古典力学系の数学的表現には解釈や研究目的により様々な手段があるが, ハミルトン力学系を想定した場合, その数学的枠組みとしてシンプレクティック多様体を採用することがごく自然であろう. しかしながら, 力学の範疇を自由粒子に止まらず剛体や流体, 拘束系にまで拡大するならば, 前 (プレ) シンプレクティック多様体やポアソン多様体を考える方が適切である. 表題の「ディラック構造」(Dirac structure) とは, ハミルトン力学を統合的に記述するために T. Courant [2] によって導入された幾何構造であり, (前) シンプレクティック構造とポアソン構造の一般化である.

ディラック構造の定義を以下に述べよう. まず, クーラン亜代数 (Courant algebroid) の一般的な定義を与える: M を C^∞ 級多様体とし, E を M 上のベクトル束とする. $\sharp : E \to TM$ を束準同型写像とする. E の滑らかな切断全体 $\Gamma(E)$ 上に非退化な双線形形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$$

と演算

$$[\![\cdot, \cdot]\!] : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

が存在し, 条件

[1] 一言で量子化と言っても実際には種々の型があり, その型に応じて異なる名称が付けられている. ここで言うモデュライ空間の量子化とは, 幾何学的量子化を指す.

(C1) $[\![e_1,[\![e_2,e_3]\!]]\!] = [\![\,[\![e_1,e_2]\!],e_3]\!] + [\![\,e_2,[\![e_1,e_3]\!]]\!]$;

(C2) $\sharp(e_1)\langle e_2,\, e_3\rangle = \langle\,[\![e_1,e_2]\!],\, e_3\,\rangle + \langle e_2,\, [\![e_1,e_3]\!]\rangle$;

(C3) $[\![e_1,e_2]\!] + [\![e_2,e_1]\!] = \sharp^*(\mathrm{d}\langle e_1,\, e_2\rangle)$

が任意の $e_1,\, e_2,\, e_3 \in \varGamma(E)$ に対して成り立つとき 4 つ組 $(E,\, M,\, \sharp,\, \langle\cdot,\cdot\rangle,\, [\![\cdot,\cdot]\!])$ をクーラン亜代数とよぶ [7, 9]. ディラック構造は, ある条件を満たす, クーラン亜代数の部分束として定義される:

定義 1.1. クーラン亜代数 E の部分束 L が条件

(D1) $\langle\varGamma(L),\varGamma(L)\rangle = 0$;

(D2) 各 $x \in M$ について $\mathrm{rank}\ E_x = \dim M$;

(D3) $[\![\varGamma(L),\, \varGamma(L)]\!] \subset \varGamma(L)$

を満たすとき, L をディラック構造とよぶ.

クーラン亜代数の典型例は, $E = TM \oplus T^*M$ である. 実際, 束準同型 $\sharp$ を接空間への自然な射影 $\sharp : TM \oplus T^*M \to TM$ とし, $\langle\cdot,\,\cdot\rangle, [\![\cdot,\cdot]\!]$ をそれぞれ

- $\langle X \oplus \xi,\, Y \oplus \eta\rangle = \dfrac{1}{2}\big\{\xi(Y) + \eta(X)\big\}, \quad X \oplus \xi,\, Y \oplus \eta \in \varGamma(TM \oplus T^*M)$;
- $[\![X \oplus \xi,\, Y \oplus \eta]\!] = [X,Y] \oplus \big(\mathcal{L}_X\eta - \imath_Y\mathrm{d}\xi\big)$

で定めれば, 上述の条件 (C1) $\sim$ (C3) が成り立つことが確かめられる. $T(T^*M) \cong TM \oplus T^*M$ に注意すれば, $TM \oplus T^*M$ の部分束 L がディラック構造であることは, L が $T(T^*M)$ のラグランジアン部分束となることを示唆している.

弦理論に関連する研究 [4, 8] を発端として閉 3 次形式による補正項を加味したディラック構造が勘案された [10]. それを捩れディラック構造という. 正確には, H を M 上の閉 3 次形式としたとき, 部分束 $L \subset TM \oplus T^*M$ が (H-) 捩れディラック構造であるとは, 補正された括弧積 $[\![\cdot,\cdot]\!]_H := [\![\cdot,\cdot]\!] - \imath_{X\wedge Y}H$ に関して条件 (D1) $\sim$ (D3) が成り立つときをいう. ディラック構造が前シンプレクティック構造とポアソン構造を記述したように, 捩れディラック構造は, 捩れポアソン構造 [10] を記述する枠組みを与える.

本稿では, 3 次元リーマン多様体とそれを境界に持つ 4 次元多様体に着目し, 各々の既約接続全体の空間上の (捩れ) ディラック構造の存在を明示する. 計算の方法や定理の証明を初め, より詳細な議論については文献 [3] を参照されたい.

2 接続の空間におけるディラック構造

多様体 X 上の接続の空間の量子化を考察する場合, 接続の空間にシンプレクティック構造を実際に構成する (あるいは, 存在を示す) 必要がある. X が連結でコンパクトな有向曲面ならば, その上の自明な主束 $X \times \mathrm{SU}(2)$ の接続全体の空間にシンプレクティック形式が

存在することが M. Atiyah と R. Bott により知られている [1]. また, X が境界を有する, 連結でコンパクトな 4 次元有向リーマン多様体ならば, 主束 $X \times \mathrm{SU}(n)$ $(n \geqq 2)$ の既約接続全体の空間 $\mathcal{A}_X$ に

$$\Omega_A(a,b) = \frac{1}{8\pi^3}\int_X \mathrm{tr}[(a\wedge b - b\wedge a)\wedge F_A] - \frac{1}{24\pi^3}\int_{\partial X} \mathrm{tr}[(a\wedge b - b\wedge a)\wedge A] \tag{2.1}$$

で与えられる前シンプレクティック形式が存在する [5, 6]. ここで, A は既約接続であり, F_A は A に対応する曲率形式, a, b は $\mathrm{SU}(n)$ のリー環 $\mathfrak{su}(n)$ に値をとる X 上の 1-形式を表す. 式 (2.1) は, 余接束 $T^*\mathcal{A}_X$ の正準シンプレクティック形式 σ をチャーン・サイモンズ形式

$$CS : \mathcal{A}_X \longrightarrow T^*\mathcal{A}_X, \quad A \longmapsto \frac{1}{24\pi^3}\Big(A\wedge F_A + F_A\wedge A - \frac{1}{2}A\wedge A\wedge A\Big)$$

により $\mathcal{A}_X$ 上に引き戻すことにより得られる: $\omega = (CS)^*\sigma$. この構成法は, 母関数 (generating function) の考えを基にしている. 一般に, θ を $T^*\mathcal{A}_X$ の基本 1 次形式, φ を $\mathcal{A}_X$ 上の 1 次形式 $\varphi : \mathcal{A}_X \to T^*\mathcal{A}_X$, $A \mapsto (A, \underline{\varphi}(A))$ としたとき, 関係式 $\varphi^*\theta = \underline{\varphi}$ が成り立つ. これと $\sigma = \tilde{\mathrm{d}}\theta$ から $\varphi^*\sigma = \tilde{\mathrm{d}}\underline{\varphi}$. すなわち, $\mathcal{A}_X$ 上の閉 2 次形式を $T^*\mathcal{A}_X$ の正準シンプレクティック形式の引き戻しから構成するには, $\mathcal{A}_X$ 上の 1 次形式 φ を微分 ($\tilde{\mathrm{d}}$) すればよい.

注意 2.1. *4 次元多様体 X の境界部分 ∂X において, $\mathcal{A}_{\partial X}$ 上の 1 次形式 φ は, $A\wedge A, F_A, \mathrm{d}A$ の式で表される. しかしながら, いずれの項も $\tilde{\mathrm{d}}(A\wedge A) = 0$, $\tilde{\mathrm{d}}F_A = 0$, $\tilde{\mathrm{d}}\mathrm{d}A = 0$ となるため, $\varphi^*\sigma = 0$. したがって, 3 次元多様体 ∂X の既約接続の空間においては, 上述の考えに基づいて (前) シンプレクティック形式を構成することは困難である.*

φ の微分 $\tilde{\mathrm{d}}\varphi$ は, 関係式 $T(T^*\mathcal{A}_X) \cong T\mathcal{A}_X \oplus T^*\mathcal{A}_X$ より束準同型写像 $T\mathcal{A}_X \to T^*\mathcal{A}_X$ と見なせる. $\tilde{\mathrm{d}}\varphi$ が恒等的に零でないならば, $\varphi^*\sigma$ は $\mathcal{A}_X$ 上の自明でない閉 2 次形式となる. このことから次の結果が得られる:

定理 2.1 (H.& K. [3]). *X を, 境界を持つ連結でコンパクトな 4 次元有向リーマン多様体とする. Ω を式 (2.1) の前シンプレクティック形式としたとき,*

$$\Omega^t_A(a,b) := \Omega_A(a,b) - \frac{t-1}{24\pi^3}\int_X \mathrm{tr}[(a\wedge b - b\wedge a)\wedge A\wedge A], \quad t \in \mathbb{R}$$

は, X の既約接続全体の空間 $\mathcal{A}_X$ 上の前シンプレクティック形式の族となる.

一般に, (前) シンプレクティック形式が与えられたとき, それが誘導する束準同型のグラフはディラック構造となる. したがって, $\mathcal{A}_X$ 上には Ω, Ω^t から導かれるディラック構造が存在し, それらを具体的に記述することができる. では, (前) シンプレクティック形式から誘導されたと限らない, 非自明な束準同型写像を適当に与えた場合はどうだろうか. 次ページから, いくつかの非自明な束準同型写像を構成し, それらを通して接続の空間上に (捩れ) ディラック構造が実際に存在することを見ていく.

2.1　3次元リーマン多様体の場合

この節では M を連結で向きづけられた3次元コンパクトリーマン多様体とする．M 上の自明な主 $\mathrm{SU}(n)$-束 $(n \geqq 2)$ を P_M で表し, $\mathrm{SU}(n)$ のリー環を $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ とおく．外積束 $\wedge^r T^*M \otimes \mathfrak{g}$ の L^2_{s-1}-切断 $(s \geqq \frac{5}{2})$ 全体がなすソボレフ空間を $\Omega^r_{s-1}(M, \mathfrak{g})$ で表す．P_M の既約な接続全体 $\mathcal{A}_M$ は $\Omega^1_{s-1}(M, \mathfrak{g})$ を台とするアフィン空間である．したがって, 各 $A \in \mathcal{A}_M$ における $\mathcal{A}_M$ の接空間 $T_A\mathcal{A}_M$ は $\Omega^1_{s-1}(M, \mathfrak{g})$ と同一視できる．双対空間 $T^*_A\mathcal{A}_M$ の元 α と接ベクトル $a \in T_A\mathcal{A}_M$ とのペアリングを

$$\langle \alpha \mid a \rangle_M := \frac{1}{24\pi^3} \int_M \mathrm{tr}(\alpha \wedge a)$$

で与えれば, $T^*_A\mathcal{A}_M$ は $\Omega^2_{s-1}(M, \mathfrak{g})$ と見なせる．また, $\mathcal{A}_M$ には次式で与えられる閉3次形式が自然に存在する:

$$\kappa_A(a, b, c) := \frac{1}{8\pi^3} \int_M \mathrm{tr}\big\{(a \wedge b - b \wedge a) \wedge c\big\}$$

これをカルタン形式とよぶ．カルタン形式は閉であることが直接の計算で確かめられる．

ベクトル束 $\mathbb{T}\mathcal{A}_M := T\mathcal{A}_M \oplus T^*\mathcal{A}_M$ を考えよう．$\mathbb{T}\mathcal{A}_M$ の切断全体 $\Gamma(\mathbb{T}\mathcal{A}_M)$ 上の演算 $\langle \cdot, \cdot \rangle_+, [\![\cdot, \cdot]\!]_\kappa$ を有限次元多様体の場合に倣い,

(1) $\langle \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{\beta} \rangle_+(A) := \dfrac{1}{2}\big\{\langle \boldsymbol{\alpha}(A) \mid \boldsymbol{b}(A) \rangle_M + \langle \boldsymbol{\beta}(A) \mid \boldsymbol{a}(A) \rangle_M\big\}$;

(2) $[\![\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{\beta}]\!]_\kappa(A) := [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}](A) \oplus \big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\alpha} - \imath_{\boldsymbol{b}}\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{a} - \imath_{\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}}\kappa\big)(A)$

により定義する．ここで, $A \in \mathcal{A}_M$ であり, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ および $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ はそれぞれ $\mathcal{A}_M$ 上の1次形式とベクトル場を表す．このとき, $\mathbb{T}\mathcal{A}_M$ は $\mathcal{A}_M$ 上のクーラン亜代数となる．

束準同型写像 $\omega : T\mathcal{A}_M \to T^*\mathcal{A}_M$ を

$$\omega_A(a) := A \wedge a - a \wedge A, \quad A \in \mathcal{A}_M,\, a \in T_A\mathcal{A}_M$$

により定義する．このとき次の定理が成り立つ:

定理 2.2 (H.& K. [3])**.** $\mathbb{T}\mathcal{A}_M$ の部分束

$$\mathcal{D}_M := \coprod_{A \in \mathcal{A}_M} \{\, a \oplus \omega_A(a) \,|\, a \in T_A\mathcal{A}_M \,\}$$

は, カルタン形式 κ による捩れをもつディラック構造である．

2.2　4次元リーマン多様体の場合

X を, 3次元多様体 M を境界に持つ, 連結でコンパクトな4次元有向リーマン多様体とする．X 上の自明な主 $\mathrm{SU}(n)$-束 $(n \geqq 2)$ を P_X とし, P_X の既約接続全体の空間を $\mathcal{A}_X$ で表

す．2.1 節と同様の考察により, $\mathcal{A}_X$ の接空間 $T_A\mathcal{A}_X$ $(A \in \mathcal{A}_X)$ は $\Omega^1_{s-\frac{1}{2}}(M, \mathfrak{g})$ と同一視できる．双対空間 $T^*_A\mathcal{A}_X$ を

$$\langle \alpha \mid a \rangle_X := \frac{1}{8\pi^3}\int_X \mathrm{tr}(\alpha \wedge a) \quad \alpha \in T^*_A\mathcal{A}_X,\, a \in T_A\mathcal{A}_X$$

によって $\Omega^3_{s-\frac{1}{2}}(M, \mathfrak{g})$ と同一視する． $\mathcal{A}_M$ 上のカルタン形式 κ を $\mathcal{A}_X$ 上へ拡張した閉 3 次形式 $\tilde{\kappa}$ も同様にカルタン形式とよぶこととする． すなわち, $\tilde{\kappa}$ は, $\mathcal{A}_X$ の接ベクトル $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in T_A\mathcal{A}_X$ を M に制限したものをそれぞれ a, b, c としたとき, $\tilde{\kappa}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}) := \kappa(a, b, c)$ で与えられる 3 次形式である．

ベクトル束 $\mathbb{T}\mathcal{A}_X := T\mathcal{A}_X \oplus T^*\mathcal{A}_X$ は,

(3) $\langle \boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{\alpha},\, \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{\beta} \rangle_+(A) := \dfrac{1}{2}\big\{\langle \boldsymbol{\alpha}(A) \mid \boldsymbol{b}(A)\rangle_X + \langle \boldsymbol{\beta}(A) \mid \boldsymbol{a}(A)\rangle_X\big\};$

(4) $[\![\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{\alpha},\, \boldsymbol{b} \oplus \boldsymbol{\beta}]\!]_{\tilde{\kappa}}(A) := [\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b}](A) \oplus \big(\mathcal{L}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{\alpha} - \imath_{\boldsymbol{b}}\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{a} - \imath_{\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}}\tilde{\kappa}\big)(A)$

によりクーラン亜代数となる．束準同型写像 $\phi : T\mathcal{A}_X \to T^*\mathcal{A}_X$ を

$$\phi_A(a) := F_A \wedge a + a \wedge F_A, \quad A \in \mathcal{A}_X,\, a \in T_A\mathcal{A}_X$$

により定義する．このとき次の定理が成り立つ:

定理 2.3 (H.& K. [3])**.** $\mathbb{T}\mathcal{A}_X$ の部分束

$$\mathcal{D}^\phi_X := \coprod_{A \in \mathcal{A}_X} \{\, a \oplus \phi_A(a) \,|\, a \in T_A\mathcal{A}_X \,\}$$

は, カルタン形式 $\tilde{\kappa}$ による捩れをもつディラック構造である．

また, $t \in \mathbb{R}$ を媒介変数とする束準同型写像 $\gamma^t : T\mathcal{A}_X \to T^*\mathcal{A}_X$

$$\gamma^t_A(a) := (F_A + tA \wedge A) \wedge a + a \wedge (F_A + tA \wedge A), \quad A \in \mathcal{A}_X,\, a \in T_A\mathcal{A}_X$$

を考えると, $\tilde{\kappa}$ による捩れをもつディラック構造の族が得られる:

定理 2.4 (H.& K. [3])**.** $\mathbb{T}\mathcal{A}_X$ の部分束の族

$$\mathcal{D}^t_X := \coprod_{A \in \mathcal{A}_X} \{\, a \oplus \gamma^t_A(a) \,|\, a \in T_A\mathcal{A}_X \,\}$$

は, カルタン形式 $\tilde{\kappa}$ による捩れをもつディラック構造の族 $\{\mathcal{D}^t_X\}_{t\in\mathbb{R}}$ となる．

定理 2.3 および 2.4 は捩れディラック構造の例であるが, 捩れがないディラック構造を構成することも可能である．実際, $\gamma'_A(a) = A \wedge A \wedge a + a \wedge A \wedge A$ で与えられる束準同型写像 $\gamma' : T\mathcal{A}_X \to T^*\mathcal{A}_X$ は, $\mathcal{A}_X$ 上にディラック構造を定める．

定理 2.5 (H.& K. [3])**.** $\mathbb{T}\mathcal{A}_X$ の部分束

$$\mathcal{D}'_X := \coprod_{A \in \mathcal{A}_X} \{\, a \oplus \gamma'_A(a) \,|\, a \in T_A\mathcal{A}_X \,\}$$

は, ディラック構造である．

注意 2.2. (4) で与えられる演算 $[\![\cdot,\cdot]\!]_{\tilde\kappa}$ の式から $\tilde\kappa$ の項を取り除いても, $\mathbb{T}\mathcal{A}_X$ は, 依然としてクーラン亜代数であることが確かめられる．定理 2.5 は, $\mathcal{D}'_X$ がこのクーラン亜代数のディラック構造になっているという意味である．

系 2.6. $\mathcal{D}'_X$ に対応する前シンプレクティック形式 Ω' は,

$$\Omega'_A(a,b) = \frac{1}{8\pi^3}\int_X \mathrm{tr}\big[(a\wedge b - b\wedge a)\wedge A\wedge A\big], \quad A\in\mathcal{A}_X,\ a,b\in T_A\mathcal{A}_X$$

で与えられる．

3 平坦接続の空間におけるディラック構造

第 2 節で議論した内容を, 平坦接続に制限しよう．M を連結でコンパクトな 3 次元有向リーマン多様体とし, X を M を境界にもつ 4 次元有向リーマン多様体とする．M, X 上の自明な主 $\mathrm{SU}(n)$-束 ($n \geqq 2$) の平坦接続全体の空間をそれぞれ $\mathcal{A}^\flat_M$, $\mathcal{A}^\flat_X$ とする．すなわち,

$$\mathcal{A}^\flat_M = \{\, A\in\mathcal{A}_M \,|\, F_A = 0\,\}, \quad \mathcal{A}^\flat_X = \{\, A\in\mathcal{A}_X \,|\, F_A = 0\,\}$$

であり, それぞれの接空間は

$$T_A\mathcal{A}^\flat_M = \{\, a\in\Omega^1_{s-1}(M,\mathfrak{g}) \,|\, \mathrm{d}_A a = 0\,\}, \quad T_A\mathcal{A}^\flat_X = \{\, a\in\Omega^1_{s-\frac{1}{2}}(X,\mathfrak{g}) \,|\, \mathrm{d}_A a = 0\,\}$$

で与えられる．ここで, d_A は共変外微分 $\mathrm{d}_A a = \mathrm{d}a + [A\wedge a]$ を表す．また, 既約接続の場合と同様に, $\mathcal{A}^\flat_X$, $\mathcal{A}^\flat_M$ 上のベクトル束 $\mathbb{T}\mathcal{A}^\flat_X$, $\mathbb{T}\mathcal{A}^\flat_M$ もクーラン亜代数となる．

前節で扱った束準同型 ω, γ' を再び考えよう．それぞれの底空間を $\mathcal{A}^\flat_X$, $\mathcal{A}^\flat_M$ に制限した準同型写像も同じ記号 ω, γ' で表すことにする．γ' が誘導する $\mathbb{T}\mathcal{A}^\flat_X$ の部分束を

$$\mathcal{D}^\flat_X := \coprod_{A\in\mathcal{A}^\flat_X} \{\, a\oplus\gamma'_A(a) \,|\, a\in T_A\mathcal{A}^\flat_X\,\}$$

とおくと, 定理 2.5 と同様にして $\mathcal{D}^\flat_X$ も $\mathcal{A}^\flat_X$ 上のディラック構造になることが確かめられる．一方, ω が誘導する $\mathbb{T}\mathcal{A}^\flat_M$ の部分束

$$\mathcal{D}^\flat_M := \coprod_{A\in\mathcal{A}^\flat_M} \{\, a\oplus\omega_A(a) \,|\, a\in T_A\mathcal{A}^\flat_M\,\}$$

は, $\mathcal{A}^\flat_M$ 上のディラック構造となる．平坦接続に制限することで, カルタン形式による捩れが消失したことに注意されたい (定理 2.2 参照).

さらに考察を進め, 境界への制限に伴う接続の空間の間の写像 $r:\mathcal{A}_X\to\mathcal{A}_M$ を考えよう．r による $\mathcal{A}^\flat_X$ の像は

$$\mathcal{A}^{\flat,\deg 0}_M := \Big\{\, A\in\mathcal{A}^\flat_M \;\Big|\; \int_M \mathrm{tr}(A\wedge A\wedge A) = 0\,\Big\}$$

と表される [6]．束準同型 ω は, $\mathcal{A}^{\flat,\deg 0}_M$ 上に以下のディラック構造を定める:

定理 3.1 (H.& K. [3]). $\mathbb{T}\mathcal{A}_M^{\flat,\deg 0}$ の部分束

$$\mathcal{D}_M^{\flat,\deg 0} := \coprod_{A\in\mathcal{A}_M^{\flat,\deg 0}} \left\{\, a \oplus \omega_A(a) \,|\, a \in T_A\mathcal{A}_M^{\flat,\deg 0} \,\right\}$$

は, $\mathcal{A}_M^{\flat,\deg 0}$ 上のディラック構造である.

4　まとめ

本稿では [3] に従って, 3 次元ならびに 4 次元有向リーマン多様体各々の既約接続全体の空間 $\mathcal{A}_M$, $\mathcal{A}_X$ 上に (捩れ) ディラック構造が具体的に記述できることを概観した. それらは接束から余接束への非自明な束準同型写像を用いて構成された. $\mathcal{A}_M$ にはカルタン形式を捩れとする捩れディラック構造 $\mathcal{D}_M$ が入り, 一方, $\mathcal{A}_X$ には同様の捩れディラック構造 $\mathcal{D}_X^\phi$(およびその族 $\{\mathcal{D}_X^t\}$) と捩れを持たないディラック構造 $\mathcal{D}'_X$ が存在した. D'_X から $\mathcal{A}_X$ 上の前シンプレクティック構造も得られる. また, 3 次元, 4 次元有向リーマン多様体各々に対する平坦接続の空間においては捩れが消失し, 捩れを持たないディラック構造が入ることがわかった. さらに, [3] ではゲージ変換群による作用を考察し, その作用の下で D_X^ϕ が不変であることが議論される. 本稿で紹介された内容の証明を含め, 詳細な設定, 議論については [3] に譲ることにする.

筆者達の主要な関心はゲージ場の幾何学的量子化であり, 本研究はその途上にある. 注意 2.1 にて言及したように, 3 次元有向リーマン多様体の場合, その既約接続全体の空間に (前) シンプレクティック構造が存在することは考え難い. その代わりに捩れディラック構造という, より一般的な幾何的構造が入る. 捩れを持たないディラック構造から底空間の関数環にポアソン代数が定まるのに対し, 捩れディラック構造の場合はポアソン代数とならない. しかしながら, 別の代数構造が微分形式の空間に誘導されることが確かめられる. 今後の課題として, 従来の前量子化の定義を拡張し, 捩れディラック構造から得られる代数構造の表現を構成することが考えられる.

参考文献

[1] M. F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemannian surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 308 (1983), no. 1505, 523–615. MR702806, Zbl 0509.14014.

[2] T. Courant, *Dirac manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990), no. 2, 631–661, MR0998124, Zbl 0850.70212.

[3] Y. Hirota and T. Kori, *Dirac structures on the space of connections*, Asian J. Math. Vol. 26 (2022), no. 5, 617–634.

[4] C. Klimčík and P. Ševera, *Open strings and D-branes in WZNW models*. Nuclear Phys. B 488 (1997), no. 3, 653–676, MR1437071, Zbl 0925.81240.

[5] T. Kori, *Chern-Simons pre-quantization over four-manifolds*, Differential. Geom. Appl. 29 (2011), no. 5, 670-684, MR2831824, Zbl 1230.53076.

[6] T. Kori, *Pre-symplectic structures on the space of connections*, Differential. Geom. Appl. 67 (2019), 101559, 24pp, MR3999437, Zbl 1425.53108.

[7] D. Li-Bland and E. Meinrenken, *Courant algebroids and Poisson geometry*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, no. 11, 2106–2145, MR2507112, Zbl 1169.53061.

[8] J.-S. Park, *Topological open p-branes*, Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), 311–384, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001, MR1882334, Zbl 1024.81043.

[9] D. Roytenberg, *Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds*. Thesis (Ph.D.)–University of California, Berkeley. *ProQuest LLC, Ann Arbor, MI*, 1999. 103pp. ISBN: 978-0599-31598-3, MR2699145.

[10] P. Ševera and A. Weinstein, *Poisson geometry with a 3-form background*, Noncommutative geometry and string theory (Yokohama, 2001). Progr. Theoret. Phys. Suppl. no. 144 (2001), 145–154, MR2023853, Zbl 1029.53090.