$\mathbb{Z}_p$ 被覆の p 進極限について

東京理科大学・理工学研究科　吉崎 彪雅
HYUGA YOSHIZAKI
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE

Abstract. 本稿は，RIMS 共同研究 (公開型)「代数的整数論とその周辺２０２２」での筆者の講演内容に基づくものである．Weber の類数問題の研究において，筆者は，有理数体上の円分 $\mathbb{Z}_2$ 拡大の中間体の類数からなる列が 2 進的に収束するという現象を発見した．本稿では，任意の素数 p に対して，一般の大域体上の全ての $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対して，同様の結果が成り立つことを紹介する．加えて，数論的位相幾何学の精神に則り，有向連結 3 次元閉多様体の $\mathbb{Z}_p$ 被覆に対しても類似結果が成り立つことを紹介する．さらに，整数係数多項式の p 冪巡回終結式の p 進極限の数値的研究のために，位数が p と互いに素な 1 の冪根，p 進 log，岩澤不変量を用いた p 進極限値の明示公式を与える．具体例として，トーラス結び目やツイスト結び目で分岐する S^3 の $\mathbb{Z}_p$ 被覆と，楕円曲線に対する関数体の定数的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の p 進極限を計算し，Weber 問題の変種について議論する．本稿は，植木潤氏 (お茶の水女子大学) との共同研究に基づくものである．

1. 導入–類似研究–

本稿では，有理数体上の有限次拡大体を代数体と呼び，有限体上一変数代数関数体を (大域) 関数体と呼ぶ．また，代数体と関数体を総称して，大域体と呼ぶ．関数体の拡大 k'/k に対して，それぞれの定数体を $\mathbb{F}_{k'}, \mathbb{F}_k$ とする．$k' = \mathbb{F}_{k'}k$ のとき，定数拡大と呼び，$\mathbb{F}_{k'} = \mathbb{F}_k$ のとき，幾何拡大と呼ぶ．代数体と関数体の類似は古くから研究の原動力である．たとえば岩澤理論は，関数体の定数拡大における現象を源流とし，今や数論における一大分野である．類似研究は，問題意識や手法の貿易を通して，分野の相互発展を目指すものである．

B. Mazur と D. Mumford の指摘に始まり，結び目と素数の類似性を中心に，代数体と 3 次元多様体の類似を比較する試みが行われている．このような 3 次元多様体と代数体の間の類似研究を総称して，数論的位相幾何学 (arithmetic topology) と呼ぶ．

類似研究の基本は，類似物の比較対応である．以下に，古典的な関数体と代数体の類似と，数論的位相幾何学における代数体と 3 次元多様体の類似の基本的な対応 (M^{2}KR dictionary) をまとめる．

k：関数体	k：代数体	M：有向連結 3 次元閉多様体
P：素点	p：素イデアル	K：結び目
$C^0(k)$：次数 0 の因子類群	$C(k)$：イデアル類群	$H_1(M)$：$\mathbb{Z}$ 係数 1 次ホモロジー群
$h(k) := \#C^0(k)$	$h(k) := \#C(k)$	$h(k) := \#H_1(M)_{\mathrm{tor}}$
k'/k	k'/k：体拡大	$M' \to M$：被覆空間

特に，素イデアルと結び目の類似性という観点では，素イデアルで生成される自由アーベル群の商であるイデアル類群は，結び目で生成される自由アーベル群の商である 1 次ホモロジー群の類似物とみなすのが自然である．一般には 1 次ホモロジー群は有限群ではないが，ここで

はそのねじれ部分のサイズを類数の類似物とみなす．また，3 次元多様体 M の 1 ホモロジー群が有限である必要十分条件は，M が有理ホモロジー 3 球面 ($:\Leftrightarrow H_*(M,\mathbb{Q}) = H_*(S^3,\mathbb{Q})$) となることである．本稿で扱う多様体は，全て有理ホモロジー 3 球面であるから，類数は 1 次ホモロジー群全体のサイズである．ここでは詳しく書かないが，分岐条件を含む被覆空間のガロア理論が並行的に記述できる (cf. [Mor11]).

本稿の目的は，大域体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大における類数列のふるまいについて紹介することである．そのために，$\mathbb{Z}_p$ 拡大にまつわる概念の類似対応についてまとめる．

関数体	代数体	有向連結 3 次元閉多様体
k_{p^∞}/k: $\mathbb{Z}_p$ 拡大	k_{p^∞}/k: $\mathbb{Z}_p$ 拡大	$M_\infty \to M$: K で分岐する $\mathbb{Z}$ 被覆
F_k: k の Frobenius 多項式	I_{k_∞}: k_∞ の岩澤多項式	Δ_K: K の Alexander 多項式

ここで，関数体の Frobenius 多項式とは，定数体の標数と異なる素数 l に対して，k に対応する非特異代数曲線の l 進エタールコホモロジーへの幾何的 Frobenius 作用の特性多項式である．岩澤多項式とは，$\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞ の岩澤加群の特性イデアルの生成元である．結び目 K の Alexander 多項式とは，S^3 における K の補空間の無限巡回被覆 X に対し，$H_1(X)$ の $\mathbb{Z}[\mathrm{Aut}(X)]$ 加群としての特性イデアル (Alexander イデアル) の生成元である．結び目の $\mathbb{Z}$ 被覆は中間被覆として $\mathbb{Z}_p$ 被覆をもたないが，p 冪巡回部分被覆の系列 $(M_{p^n} \to M)_n$ を考えることで，岩澤理論の精密な類似が現れる．そこでこの系列を，$\mathbb{Z}_p$ 被覆と呼ぶことにする．

最後に，Weil 予想を念頭に置き，それぞれの多項式がゼータ関数の情報を持っていることにも言及したい．有限体上の非特異射影代数曲線の Weil 予想の一部を関数体の場合に言い換えると，合同ゼータ関数の $\mathbb{C}$ 上の解析接続を与える有理関数の分子が，Frobenius 多項式 (の相反形) となることである (cf. [Ros02, Theorem 5.9])．岩澤多項式と p 進 L 関数を結びつける岩澤主予想 (cf. [Was97, Section 15.4]) は，Weil 予想の部分的な類似と考えられる．3 次元多様体では，結び目 K の Alexander 多項式の根が，K の補空間の無限巡回被覆の Lefschetz ゼータ関数の零点である ([Nog05, Remark 3.5])．また Dehornoy [Deh15] は，Lorenz 結び目という結び目の Alexander 多項式の根の大きさを，結び目の種数とブレイド指数という二つの不変量によって評価した．これは，Weil 予想の類似という観点で見れば，Riemann 仮説の類似結果と考えられる．

本稿の構成は以下の通りである．Section 2 では，Weber 問題と呼ばれる数論の古典的問題を紹介し，その関数体，3 次元多様体における類似問題と知られている結果を紹介する．Section 3 では，本講演の主結果である，類数の p 進収束性と明示的な極限公式を紹介する．Section 4 では，いくつかの結び目と関数体に対して，p 進極限値の例を見る．Section 5 では，ツイスト結び目に対する ν_p 不変量の計算を紹介する．Section 6 では，素朴な問題をいくつか提案する．

2. Weber 問題

p を素数とする．代数体 k 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大とは，k 上の無限次 Galois 拡大で，その Galois 群が p 進整数全体からなる加法群 $\mathbb{Z}_p$ と位相群として同型なものである．各正の整数 n に対して，$\mathbb{Z}_p$ 拡大は次数 p^n 次の中間体をただ一つ持つ．これを n-th layer と呼び，k_{p^n} と書く．Weber 問題とは，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の全ての中間体の類数を問う問題であり，様々な研究から，それらは全て 1 であろうと予想されている．

有理数体に対する Weber 問題 (予想) は未解決であるが，関数体における類似問題は解決している．さらにいえば，以下の定理により，有理関数体以外の関数体で，類数が 1 になるものは有限個しか存在しない．

定理 2.1 (Mercuri–Stripe [MS15, Theorem 1.1], Shen–Shi [SS15]). 有理関数体以外の関数体の中で，類数が 1 のものは，同型を除いてちょうど 8 個存在する．

よって，自明な例，すなわち有理関数体上の定数的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大を除いて，Weber 予想は成り立たないことが分かる．
3 次元多様体においても類似問題は考えられるが，実は S^3 の分岐被覆に対する問題は解決している．

定理 2.2 (Livingston [Liv02, Theorem 1.2]). K を S^3 内の結び目とし，素数 p と正の整数 n に対し，S^3_{K,p^n} を K で分岐する S^3 の p^n 次巡回被覆空間とする．また，Δ_K を K の Alexander 多項式とする．この時，任意の素数 p と正の整数 n に対して $h(S^3_{K,p^n}) = 1$ となる必要十分条件は，Δ_K を割る全ての 1 でない整数係数多項式 f に対して，少なくとも 3 つの素数で割られる正の整数 r が存在し，f は r 番目の円分多項式 Φ_r に一致することである．

よって，Alexander 多項式という不変量によって，結び目が Weber 予想を満たすかどうかの必要十分条件が与えられる．たとえば，Alexander 多項式が $\Delta_K = \Phi_{30}$ となる結び目 K が存在することが知られており，そのような K は定理の条件を満たす．定理 2.2 は，concordance group というトポロジーにおける重要な対象と関係がある．このように，全く異なる背景を持った結果が類似によってつながるのは，大変興味深いことと思う．

3. 類数の p 進収束性と p 進極限値

本節では，本講演で述べた主結果を紹介する．講演者は，$p = 2$ に対する有理数体の Weber 予想の研究において，中間体の類数からなる数列が， 2 進的に収束するという現象を観測した．我々はこの現象を，任意の素数 p に対する，任意の大域体上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対しても成り立つことを証明した．しかし，実はこの結果は，最初に W. Sinnott が CM 体上の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の類数とそのマイナスパートに対して発見し，H. Kisilevsky が一般の大域体上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対して証明しており，我々の結果は別証明による再発見である．また，S. G. Han [Han91, Theorem 4] は，マイナスパートの極限値を計算している．

定理 3.1 (Kisilevsky [Kis97, Corollary 2], Ueki–Y [UY22, Theorem 2.1]). k を大域体とし，k_{p^∞} を k 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする．このとき，n-th layer の類数 $h(k_{p^n})$，その non-p-part $h(k_{p^n})_{\text{non-}p}$，任意の素数 l に対する l-part $h(k_{p^n})_l$ は，p 進的に収束する．

我々はまた，定理 3.1 のトポロジー類似を証明した．

定理 3.2 (Ueki–Y [UY22, Theorem 3.1]). X を連結コンパクトな 3 次元多様体とし，$(X_{p^n} \to X)_n$ を X の $\mathbb{Z}_p$ 被覆とする．このとき，n-th layer の類数 $h(X_{p^n})$，その non-p-part $h(X_{p^n})_{\text{non-}p}$，任意の素数 l に対する l-part $h(X_{p^n})_l$ は，p 進的に収束する．

実は，定理 3.2 もまた，トポロジーの先行研究と関連がある．S. Kionke [Kio20] は，p 進 Betti 数と p 進トーションという二つの新しい位相不変量を定義した．[Kio20, Theorem 1.1 (ii)] に対して Poincaré 双対を考えると，Kionke の (2nd) p 進トーションは類数の p 進極限に一致していることが分かる．
次に，関数体の定数的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大と，結び目で分岐する S^3 上の $\mathbb{Z}_p$ 被覆に関して，類数の p 進極限の明示公式を紹介する．そのために，いくつか準備をする．

定義 3.3. 整数係数多項式 $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_0$, $g(t) = b_m t^m + \cdots + b_0 \in \mathbb{Z}[t]$ に対して，それぞれ重複を含めた根を α_i $(1 \leq i \leq n)$, β_j $(1 \leq j \leq m)$ とする．このとき，整数

$$\mathrm{Res}(f(t), g(t)) = a_n^m b_m^n \prod_{i,j} (\alpha_i - \beta_j)$$

を，$f(t)$ と $g(t)$ の終結式という．

関数体 k の種数を g_k とする．k の合同ゼータ関数

$$\zeta_k(s) := \prod_{P:\text{素点}} \left(1 - \frac{1}{(q^{\deg P})^s}\right)^{-1}$$

に対して，次数 $2g_k$ の整数係数多項式 $L_k(t)$ があり，$\Re(s) > 1$ において

$$\zeta_k(s) = \frac{L_k(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})}$$

となる．また，$h(k) = L_k(1)$ となる (cf. [Ros02, Theorem 5.9])．$\overline{\mathbb{Q}}[t]$ における分解を $L_k(t) = \prod_i (1 - \pi_i t)$ とする．ここで，Frobenius 多項式 $F_k(t)$ は，$L_k(t)$ の相反多項式となることに注意する．すなわち，

$$F_k(t) = t^{2g_k} L_k(1/t) = \prod (t - \pi_i)$$

となる．また，k の n 次の定数拡大 k_n に対して，

$$F_{k_n}(t) = t^{2g_k} L_k(1/t) = \prod (t - \pi_i^n)$$

となる (cf. [Ros02, Proposition 8.16])．よって，定数拡大の類数は，Frobenius 多項式の巡回終結式によって計算できる．

定理 3.4. 関数体 k に対して，$F(t)$ を Frobenius 多項式とする．このとき，全ての正の整数 n に対して，

$$h(k_n) = \mathrm{Res}(t^n - 1, F(t)).$$

トポロジー側にも類似公式がある．

定理 3.5 (Fox [Fox56], Weber [Web80])**.** 結び目 K に対して，$\Delta_K(t)$ を Alexander 多項式とする．このとき，全ての正の整数 n に対して，

$$|H_1(S^3_{K,n}, \mathbb{Z})| = |\mathrm{Res}(t^n - 1, \Delta_K(t))|.$$

ここで，$H_1(S^3_{K,n}, \mathbb{Z})$ が位数無限の場合は，$|H_1(S^3_{K,n}, \mathbb{Z})| = 0$ と定める．

定理 3.4 と 定理 3.5 によって，類数の p 進極限値の計算は，それぞれの多項式不変量の p 冪巡回終結式の計算に帰着された．我々はより一般に，任意の整数係数多項式の p 冪巡回終結式に対して，p 進収束定理とその極限値を得た．

定理 3.6 (Ueki–Y [UY22, Theorem 5.3])**.** 整数係数多項式 $f(t)$ に対して，$r_{p^n}(f) = \mathrm{Res}(t^{p^n} - 1, f(t))$ とする．このとき，数列 $\{r_{p^n}(f)\}_n$, non-p-parts $\{r_{p^n}(f)_{\text{non-}p}\}_n$, 任意の素数 l に対する l-parts $\{r_{p^n}(f)_l\}_n$ は，p 進的に収束する．さらに，$\lim_{n\to\infty} r_{p^n}(f) = 0$ となる必要十分条件は，$p \mid f(1)$ である．

注意 3.7. 定理 3.6 の最後の主張について，$p \nmid f(1)$ ならば，すべての n に対して $p \nmid r_{p^n}(f)$ も成り立つ．

p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p 進完備化を $\mathbb{C}_p$ とし，有理数体の閉包の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する．また，p 進付値は， $v_p(p) = 1$ によって正規化されたものを考える．$|\alpha|_p = 1$ なる $\alpha \in \mathbb{C}_p$ に対して，$|\alpha - \zeta|_p < 1$ をみたす，位数が p と互いに素な 1 の原始根 ζ がただ一つ存在する (cf. [Uek20, Lemma 2.10])．このような ζ を，“α に対する p 素冪根” と呼ぶことにする．

定理 3.8 (Ueki–Y [UY22, Theorem 5.7])**.** $f(t) \in \mathbb{Z}[t] \setminus p\mathbb{Z}[t]$ に対して，$\overline{\mathbb{Q}}[t]$ において $f(t) = a_0 \prod (t - \alpha_i)$ とする．$a_0 \prod_{|\alpha_j|_p > 1} \alpha_j$ に対する p 素冪根を ξ，$|\alpha_i|_p = 1$ を満たす α_i に対する p 素冪根を ζ_i とする．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} r_{p^n}(f)_{\text{non-}p} = (-1)^{p \deg f + \#\{i; |\alpha_i|_p < 1\}} \xi p^{-\nu_p} \prod_{\substack{|\alpha_i|_p = 1, \\ |\alpha_i - 1|_p = 1}} (\zeta_i - 1) \prod_{\substack{|\alpha_i|_p = 1, \\ |\alpha_i - 1|_p < 1}} \log_p \alpha_i$$

となる．ただし， $\log_p$ は p 進対数で，ν_p は $p^{-\nu_p} = \prod_{|\alpha_i - 1|_p < 1} |\log_p \alpha_i|_p$ をみたす整数とする．$p \mid f(t)$ の場合は，$f(t)$ を割る最大の p 冪を p^{μ} とおくと，$r_{p^n}(f) = p^{\mu p^n} r_{p^n}(f(t)/p^{\mu})$ となる．

注意 3.9. v_p を $\mathbb{C}_p[t]$ 上の p 進付値とみなす．このとき，$f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ に対して $\lambda_p(f) = \#\{\alpha_i \mid |\alpha_i|_p = 1, |\alpha_i - 1|_p < 1\}$, $\mu_p(f) = v_p(f(t))$, $\nu_p(f) = -v_p(\prod_{|\alpha_i - 1|_p < 1} |\log_p \alpha_i|_p)$ とすれば，十分大きいすべての n に対して，

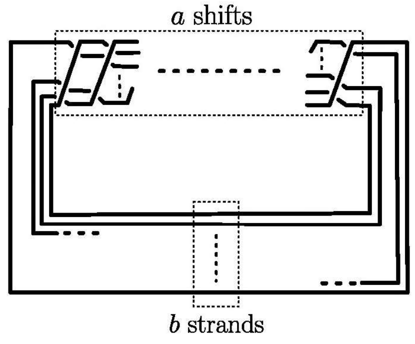
$$v_p(r_{p^n}(f)) = \lambda_p(f) n + \mu_p(f) p^n + \nu_p(f)$$

となる．

関数体の Frobenius 多項式に対しては， Kisilevsky [Kis97, Proposition 2] が同様の結果を得ている．

4. 例

この節では，p 進極限値の例を見る．まずは，定理 3.8 の公式を使う必要のない簡単な例として，トーラス結び目に対する p 進極限を見る ([UY22, Proposition 6.3])．互いに素な正の整数 (a, b) に対して，下図のような結び目 $T_{a,b}$ をトーラス結び目という．$T_{a,b} = T_{b,a}$ であるから，$p \nmid b$ としてよい．



$T_{a,b}$

$T_{a,b}$ の Alexander 多項式は

$$\Delta_{T_{a,b}}(t) = \frac{(1-t)(1-t^{ab})}{(1-t^a)(1-t^b)} = \prod_{\substack{N|ab \\ N\nmid a,b}} \Phi_N(t)$$

という形である．ここで，$\Phi_N(t)$ は N 番目の円分多項式である．多項式の積の終結式は終結式の積に分解できるため，

$$|\mathrm{Res}(t^{p^n}-1, \Delta_{T_{a,b}}(t))| = \prod_{i=0}^{n} \prod_{\substack{N|ab \\ N\nmid a,b}} |\mathrm{Res}(\Phi_{p^i}(t), \Phi_N(t))|$$

となる．[Apo70, Theorem 4] を用いて円分多項式の終結式を計算すれば，

$$h(S^3_{T_{a,b},p^n}) = b^{p^{\min(v_p(a),n)}-1}$$

となる．よって，数列 $\{h(S^3_{T_{a,b},p^n})\}_n$ は十分大きな n に対しては定数列になり，$b^{p^{v_p(a)}-1}$ に収束する．

さて，Section 3 で，Kionke が p 進 Betti 数と p 進トーションを導入したことを紹介し，p 進トーションが類数の p 進極限値と一致していることに言及した．Kionke はさらに，L^2-Betti 数に関する Atiyah 予想の p 進類似として，p 進 Betti 数がいつ整数値をとるかという問題を提唱している．そこで我々は，類数の p 進極限値に対しても同様の問題を考える．

問題 4.1. 大域体，3 次元多様体の類数の p 進極限が整数になるのはどのような場合か．

特に，p 進極限値が 1 になる場合を問うことは，Weber 問題の変種と思える．

たとえばトーラス結び目の場合は，すべての組 (a,b) に対して p 進極限値は $b^{p^{v_p(a)}-1} \in \mathbb{Z}$ となり，極限値が 1 になるのは $p \nmid a$ の場合に限ることが分かる．本稿でさらに，種数が 1 である有限素体上の関数体に対して，問題 4.1 と Weber 問題の変種の解決を報告する．

4.1. **種数 1 の関数体．** 種数 1 の関数体は，楕円曲線に対応するものである．ここでは，有限素体上の楕円曲線のみ扱う．E を素数 l で良還元を持つ $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とし，$\mathbb{F}_l$ 上に還元したものを E_l とする．E_l に対応する関数体を k_{E_l} とする．この場合に，問題 4.1 を次のように定式化する．

問題 4.2. $\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l p^n}) = 1$, $\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l p^n}) \in \mathbb{Z}$ となるペア (l,p,E) を求めよ．

$E(\mathbb{F}_l)$ を E の $\mathbb{F}_l$ 上の Mordell–Weil 群として，$a_l = l+1-\#E(\mathbb{F}_l)$ とする．このとき，k_{E_l} の Frobenius 多項式は，

$$F_{k_{E_l}}(t) = t^2 - a_l t + l$$

という形である．

$p = l$ の場合は次のようにまとめられる．

命題 4.3 (Ueki–Y [UY22, Proposition 7.8])**.** $\mathbb{F}_l$ で良還元を持つ $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対して，$\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l l^n})$ が有理整数ならば，$\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l l^n}) = 0, 1, 2$ となる．さらに，

- $\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l l^n}) = 0$ となる必要十分条件は $\#E(\mathbb{F}_l) \equiv 0 \mod l$,
- $\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l l^n}) = 1$ となる必要十分条件は $\#E(\mathbb{F}_l) \equiv 1 \mod l$,
- $\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l l^n}) = 2$ となる必要十分条件は $\#E(\mathbb{F}_l) \equiv 2 \mod l$

である．

$\#E(\mathbb{F}_l) \equiv 0 \mod l$ をみたす素数 l を，楕円曲線 E の変則素数 (anomalous prime) と呼び，$\#E(\mathbb{F}_l) \equiv 1 \mod l$ をみたす素数 l を，楕円曲線 E の超特異素数 (supersingular prime) と呼ぶ．よって，Weber 問題の変種への解答は，E の超特異素数 l に対して (l, l, E) となる．

$p \neq l$ の場合は，次のようにまとめられる．

命題 4.4 (Ueki–Y [UY22, Proposition 7.10])**.** $\mathbb{F}_l$ で良還元を持つ $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対して，$\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l p^n})$ が有理整数ならば，$\lim_{n\to\infty} h(k_{E_l p^n}) = 0, 1, 2, 3, 4$ となる．それぞれの場合を Table 1 にまとめる．

$l \mod p$	$\#E(\mathbb{F}_l) \mod p$	lim
1	4	4
1	0	0
-1	0	0
1	3	3
1	2	2
1	1	1

Table 1

よって，Weber 問題の変種への解答は，$l \equiv \#E(\mathbb{F}_l) \equiv 1 \mod p$ をみたす (l, p, E) となる．[UY22, Proposition 6.8, 6.10] で，種数 1 の結び目に対しても考察している．また，[UY22, Section 6, 7] では，具体的な関数体と結び目に対して，p 進極限値を計算している．

5. ν_p 不変量について

定理 3.8 の $\log_p$ 部分の p 進付値を計算すれば，ν_p 不変量が分かる．そこで，次のような問題を考えてみる．

問題 5.1. 基礎体，底空間の類数の p 進付値が小さく，ν_p が大きくなるものを構成せよ．

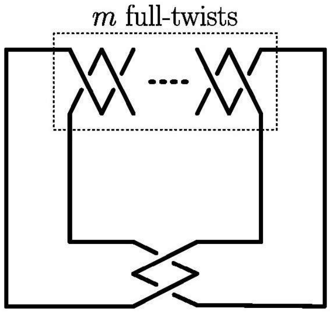
この問題に対して，種数 1 の結び目に対して一つの解答を与える．

5.1. **種数 1 の結び目.**

整数係数多項式 $\Delta(t)$ が結び目の Alexander 多項式になる必要十分条件は，$\Delta(t) = t^{\deg \Delta}\Delta(1/t)$ かつ $|\Delta(1)| = 1$ をみたすことである (cf. [Rol76, Chapter 7, C, Theorem 5])．また，結び目 K の種数を g_K とすると，K の Alexander 多項式は，$\deg \Delta_K(t) \leq 2g_K$ をみたすことが知れらている．よって，種数が 1 となる結び目の Alexander 多項式は，非自明ならば整数 m によって

$$\Delta_K(t) = mt^2 + (1-2m)t + m$$

という形である．整数 m に対して，下図のような結び目 $J(2, 2m)$ をツイスト結び目という．



$J(2,2m)$

ツイスト結び目は種数 1 であり，その Alexander 多項式は $\Delta_{J(2,2m)}(t) = mt^2+(1-2m)t+m$ である．

3 次元多様体でも，岩澤類数公式の類似が成立する．

定理 5.2 (cf. [Uek17, Theorem 4.9])**.** 有向連結 3 次元閉多様体 M 上の，有理ホモロジー 3 球面からなる分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆 $\widetilde{M} = (M_{p^n} \to M)_n$ に対して，λ_p, μ_p, $\nu_p \in \mathbb{Z}$ が存在し，十分大きい全ての整数 n に対して，

$$v_p(h(M_{p^n})) = \lambda_p n + \mu_p p^n + \nu_p$$

となる．

本稿では，これらの不変量をそれぞれ $\lambda_p(\widetilde{M})$, $\mu_p(\widetilde{M})$, $\nu_p(\widetilde{M})$ と書くことにする．任意の結び目の K の Alexander 多項式は $|\Delta_K(1)| = 1$ であるから，注意 3.7 をふまえると，K で分岐する S^3 上の $\mathbb{Z}_p$ 被覆 $\widetilde{S^3}$ に対して，$\lambda_p(\widetilde{S^3}) = \mu_p(\widetilde{S^3}) = \nu_p(\widetilde{S^3}) = 0$ となる．そこで，正の整数 e に対して，K で分岐する S^3 の e 次巡回被覆 $S^3_{K,e}$ 上の，K で分岐する $\mathbb{Z}_p$ 被覆 $V(K,e) := (S^3_{K,ep^n} \to S^3_{K,e})_n$ を考える．このとき，一般に $h(S^3_{K,e}) \neq 1$ であり，岩澤不変量は非自明になりうる ($\mu_p(V(K,e))$ は常に 0 であることが知られている)．

問題 5.1 を次のように定式化する．

問題 5.3. 任意の $N > 0$ に対して，$p \nmid e$, $v_P(h(S^3_{J(2,2m),e})) < \nu_p(V(J(2,2m),e))$, $\nu_p(V(J(2,2m),e)) > N$ となる，組 (p,m,e) を見つけよ．

$p \mid e$ の場合は，$e' = e/p^{v_p(e)}$ に対して，$S^3_{J(2,2m),e}$ は $V(J(2,2m),e')$ の 中間被覆であるから除外している．

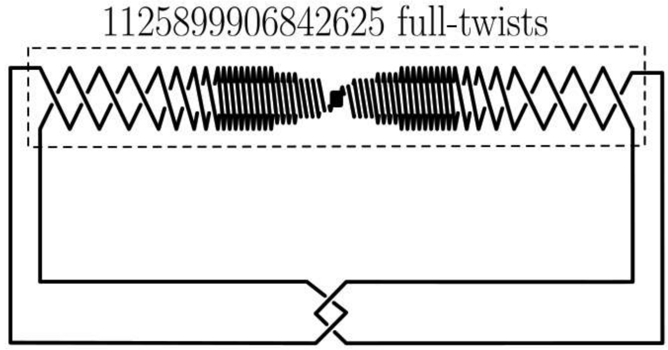
定理 3.6 に倣い，$J(2,2m)$ の Alexander 多項式 $\Delta_m(t)$ と全ての正の整数 e に対して，$r_e(\Delta_m) = \mathrm{Res}(t^e-1, \Delta_m(t))$ とおく．この問題に対して，我々は次の命題を用意した．ただし，この命題では p は e を割ってもよい．

命題 5.4 (Ueki–Y [UY22, Proposition 6.12])**.** 以下の状況を除いて，$\nu_p(V(J(2,2m),e)) = v_p(h(S^3_{J(2,2m),e}))$.

- $p = 2$, $v_2(r_e) = 2$.
- $p = 3$, $2 \mid e$, $v_3(r_2) = v_3(r_e) = 1$.

この命題を用いて，問題 5.3 に対する具体例を見る．$p = 2$, $e = 3$ とする．このとき，終結式を直接計算することで，$r_3(3t^2-5t+3) = (3m-1)^2$ となる．命題 5.4 の $p = 2$ の条件に合わせるために，$v_2(3m-1) = 1$ とする．すなわち，$3m-1 = 2(2a+1)$ $(a \in \mathbb{Z})$ とす

る．このとき，$a = 3b$ ($b \in \mathbb{Z}$) と書けて，$m = 4b + 1$ となる．一方で，1st layer の類数は $r_{3\cdot 2^1}(3t^2-5t+3) = 2^6 b^2(6b+1)^2(16b+3)$ となるから，再び 命題 5.4 より，1st layer 上の $\mathbb{Z}_2$ 被覆の ν_2 不変量は $\nu_2(V(J(2,2m),3\cdot 2^1)) = 6+2v_2(b)$ となる．また，λ_p 不変量は，定理 3.8 における $\log_p$ の個数に一致するため，Alexander 多項式の相反性から，$\lambda_2(V(J(2,2m),3)) = 2$ が分かる．よって，$\nu_2(V(J(2,2m),3)) = \nu_2(V(J(2,2m),3\cdot 2^1)) - 1\cdot\lambda_2(V(J(2,2m),3)) = 4+2v_2(b)$ となる．$b = 2^{48}$ として，$m = 2^{50}+1$ とすると， $\nu_2(V(J(2,2^{51}+2),3)) = 100$ となる．



$J(2,2(2^{50}+1))$

6. 問題

いくつか素朴な問題を挙げる．

結び目や関数体の他のクラスの p 進極限値：トーラス結び目やツイスト結び目，楕円曲線の関数体に対して p 進極限値が系統的に取り扱えたように，他の無限族に対しても，系統的な研究ができる期待がある．たとえば [Deh15] は，Lorenz 結び目という族に対して Alexander 多項式の根の大きさを評価しており，その p 進類似ができれば，p 進極限値に関する研究にも応用できると思われる．

関数体の幾何的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の p 進極限値の計算：幾何的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大の p 進極限値は，多項式の終結式では計算できない．しかし，類数は Frobenius 多項式の $t = 1$ での特殊値であるため，まずは具体的な幾何的 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対して，n-th layer の Frobenius 多項式を求めることを課題として提案する．

p 進極限値と他の不変量の間の関係：関数体や結び目の場合は，p 進極限値の公式から，岩澤不変量との関連は明白である．他の代数的，位相的な不変量と，p 進極限値との関連にも興味がある．たとえば S. G. Han [Han91, Theorem 4] は，CM 体上の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対して，類数のマイナスパートの p 進極限値を，いくつかの不変量を用いて計算している．

謝辞

本研究集会で講演する機会をいただき，プログラム委員である加塩朋和先生，千田雅隆先生，内田幸寛先生に，改めて感謝申し上げます．

References

[Apo70] Tom M. Apostol. Resultants of Cyclotomic Polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24(3):457–462, 1970.

[Deh15] Pierre Dehornoy. On the zeroes of the Alexander polynomial of a Lorenz knot. *Annales de l'Institut Fourier*, 65(2):509–548, 2015.

[Fox56] Ralph H. Fox. Free Differential Calculus III. Subgroups. *Ann. Math.*, 64(3):407–419, 1956.

[Han91] Sang G. Han. On p-adic l-functions and the riemann-hurwitz genus formula. *Acta Arithmetica*, 60(2):97–104, 1991.

[Kio20] Steffen Kionke. On p-adic limits of topological invariants. *Journal of the London Mathematical Society*, 102(2):498–534, apr 2020.

[Kis97] Hershy Kisilevsky. A Generalization of a result of Sinnott. *Pacific Journal of Mathematics*, 181(3):225–229, 1997.

[Liv02] Charles Livingston. Seifert forms and concordance. *Geometry & Topology*, 6(1):403–408, 2002.

[Mor11] Masanori Morishita. *Knots and Primes: An Introduction to Arithmetic Topology*. Universitext. Springer London, 2011.

[MS15] Pietro Mercuri and Claudio Stirpe. Classification of algebraic function fields with class number one. *Journal of Number Theory*, 154:365–374, 2015.

[Nog05] Akio Noguchi. A functional equation for the Lefschetz zeta functions of infinite cyclic coverings with an application to knot theory. *Topology Proceedings*, 29(1):277–291, 2005.

[Rol76] Dale. Rolfsen. *Knots and Links*. Mathematics lecture series. Publish or Perish, 1976.

[Ros02] Michael Rosen. *Number Theory in Function Fields*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2002.

[SS15] Qibin Shen and Shuhui Shi. Function fields of class number one. *Journal of Number Theory*, 154:375–379, 2015.

[Uek17] Jun Ueki. On the Iwasawa invariants for links and Kida ' s formula. *International Journal of Mathematics*, 28(06):1750035, 2017.

[Uek20] Jun Ueki. p-adic Mahler measure and $\mathbb{Z}$-covers of links. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 40(1), 2020.

[UY22] Jun Ueki and Hyuga Yoshizaki. The p-adic limits of class numbers in $\mathbb{Z}_p$-towers, 2022. preprint. arXiv:2210.06182.

[Was97] Lawrence C. Washington. *Introduction to Cyclotomic Fields*. Springer New York, NY, 2 edition, 1997.

[Web80] Claude Weber. Sur une formule de R. H. Fox concernant l'homologie des revêtements cycliques. *Enseign. Math. (2)*, 25:261, 1980.

Email address: `yoshizaki.hyuga@gmail.com`

Department of Mathematics, Graduate school of science and Technology, Tokyo University of Science, 2641, Yamazaki, Noda-shi, 278-8510, Chiba, Japan