総実代数体の p 進ポリログと p 進 L 関数

慶應義塾大学/理化学研究所　坂内健一 *◇
Keio University/RIKEN　Kenichi Bannai

Abstract. このノートでは、総実代数体の p 進ポリログと p 進 L 関数について、講究録の自由な精神に沿って、背景となる気持ちを交えながら解説する。ページ数の制限から詳細な証明を与えることは難しいが、本原稿は筆者が過去に書いた「p 進ポリログと p 進 L 函数」と題した講究録 [2] の総実代数体版という位置付けを目指した。

20 年以上前、博士課程を修了した翌年に、RIMS で開催された伊原康隆先生主催の「整数論のこの主題、自分はこう考える」若手発表会（Young Philosophers in Number Theory）という研究集会で講演した。主題について思うことを自由に発表するという画期的な研究集会であり、Beilinson-Deligne によって提唱された「ポリログ」と呼ばれる代数群に付随する数論幾何的対象と、p 進 L 関数との関係について、最も古典的な乗法群の場合（Dirichlet L 関数の場合）について講演した。p 進 L 関数は、局所的に与えられる冪級数を用いて定義される。当時、自分が最も面白さを訴えたかったことは、様々な Dirichlet 指標に対応するそれぞれの冪級数は、大域的な幾何学的特徴付けを持つ 1 つの普遍的な母関数から得られるという現象だった。局所的に存在するものたちを大域的に捉えているからこそ、簡単な幾何学的特徴付けを持つことが推測され、乗法群以外のポリログについても、同様の現象が存在する期待を抱いていた。その後、博士論文の結果 [1, 3] を発展させ、小林真一氏、辻雄氏とともに虚数乗法を持つ楕円曲線の場合（虚 2 次体の Hecke L 関数の場合）に、大域的な幾何学的特徴付けを持つ普遍的な母関数が、Poincaré 束に付随する 2 変数テータ関数で与えられることを証明した [4–6]。

高次元の代数群の場合に、大域的な特徴付けを持つ普遍的な母関数を見つけることには、ずっと苦労した。最近、萩原啓氏、山田一紀氏、山本修司氏との共同研究を通して、総正単数群による同変性を用いて新谷卓郎の結果 [14] を再解釈し、総実代数体に付随する代数トーラスの場合（総実代数体の Hecke L 関数の場合）に、同変コホモロジー類として、普遍的な母関数の役割を果たす新谷生成類を発見することに成功した [7, 8]。本講究録では、古典的な乗法群の場合の p 進ポリログと p 進 L 関数の結果を復習し、これが総実代数体の場合にどう拡張されるか、概要を解説する。

本研究は科学研究費・基盤研究 (S)「新しい対称性による数論幾何的単数の創出に向けた戦略的研究」（課題番号：18H05233）の研究の一環として行なった。一連の研究の共同研究者である萩原啓氏、山田一紀氏、山本修司氏、大下達也氏、戸次鵬人氏、小林真一氏、安田正大氏には日々、大変お世話になり、感謝している。RIMS 研究集会での発表と今回の講究録への掲載の機会を下さった東京理科大学の加塩朋和先生に、深く感謝致します。

1. 総実代数体の Hecke L 関数と Lerch ゼータ関数

この章では、総実代数体の Hecke L 関数を表すために [7, 8] で新たに導入した総実代数体の Lerch ゼータ関数の定義を述べる。普遍的な母関数と p 進測度や p 進ポリログとの関係では、通常 L 関数の研究で利用される部分ゼータ関数ではなく、Lerch ゼータ関数の方がより直接的な役割を果たす。

まず、有理数体上の Lerch ゼータ関数と Hecke L 関数の関係から始める。いま $\xi \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times)$ を加法的指標とする。加法性より $\xi(n) = \xi(1)^n$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ であり、$\xi \mapsto \xi(1)$ により同型 $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$ が導かれる。Lerch ゼータ関数を

$$\mathcal{L}(\xi, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \xi(n) n^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

と定義する。特に $\xi \equiv 1$ のとき $\mathcal{L}(\xi, s)$ は Riemann ゼータ関数と一致する。$\xi \not\equiv 1$ のとき、$\mathcal{L}(\xi, s)$ は全複素平面に正則関数として解析接続されることが知られている。有理数体の Hecke L 関数は Dirichlet L 関数と一致し、Lerch ゼータ関数の線形和で書くことができる。

以下、$N > 0$ を整数として、$\mathfrak{I}_N$ を N と互いに素な $\mathbb{Q}$ の分数イデアル全体の集合とする。$\mathbb{Q}_+ := \{\alpha \in \mathbb{Q} \mid \alpha > 0\}$ に対して $P_N^+ := \{(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Q}_+, \alpha \equiv 1 \,(\mathrm{mod}^\times N)\} \subset \mathfrak{I}_N$ とすると、法 N の狭義イデアル類群は $\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}^+(N) := \mathfrak{I}_N / P_N^+$ と定義される。準同型

$$\chi \colon \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}^+(N) \to \mathbb{C}^\times$$

を、有理数体の導手 N の有限 Hecke 指標と呼ぶ。χ が $N' < N$ となる $\mathrm{Cl}_F^+(N')$ を経由しないとき、χ は原始的であると言う。0 で伸ばして χ を $\mathbb{Z}$ の分数イデアル上の関数とみなすと、χ の Hecke L 関数は

$$L(\chi, s) := \sum_{\mathfrak{n}:\mathrm{ideal} \subset \mathbb{Z}} \chi(\mathfrak{n}) \mathbf{N}(\mathfrak{n})^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

と定義される。$n \in \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$ に対して $\mathfrak{n} := (n) \in \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}^+(N)$ を対応させると、同型 $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cong \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}^+(N)$ が定義される。この同型を通して Hecke 指標 χ は、Dirichlet 指標

$$\chi_{\mathbb{Z}} \colon (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$$

を与える。すると、

$$L(\chi, s) = \sum_{\mathfrak{n}:\ \mathrm{ideal} \subset \mathbb{Z}} \chi(\mathfrak{n}) \mathbf{N}(\mathfrak{n})^{-s} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \chi((n)) n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\mathbb{Z}}(n) n^{-s}$$

となり、χ の Hecke L 関数は、対応する Dirichlet 指標 $\chi_{\mathbb{Z}}$ の Dirichlet L 関数と一致する。

$$\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}[N] := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times) \subset \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$$

と置く。有限 Fourier 展開より、$c_\chi(\xi) := N^{-1} \sum_{m=1}^{N} \chi_{\mathbb{Z}}(m) \xi(-m)$ とおくと、

$$\chi_{\mathbb{Z}}(n) = \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}[N]} c_\chi(\xi) \xi(n), \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

となる。この事実を用いると、

$$L(\chi, s) = \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}[N]} c_\chi(\xi)\mathcal{L}(\xi, s)$$

となり、χ の Hecke L 関数は Lerch ゼータ関数の線形和で書けることが示された。

次に、より一般の総実代数体の Hecke L 関数を表すために、総実代数体における Lerch ゼータ関数の一般化を考える。F を総実代数体として、$\mathcal{O}_F$ を F の整数環、$g := [F : \mathbb{Q}]$ を F の拡大次数とする。$\mathfrak{I}$ を F の 0 でない分数イデアルが成す群として、F の整イデアル $\mathfrak{f} \neq 0$ に対して、$\mathfrak{I}_{\mathfrak{f}}$ を $\mathfrak{f}$ と互いに素な F の分数イデアル全体の成す群とする。$I := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(F, \mathbb{R})$ を F の実数への埋め込み全体の集合として、$F_+^\times := \{\alpha \in F \mid \forall \tau \in I, \tau(\alpha) > 0\}$ に対して $P_{\mathfrak{f}}^+ := \{(\alpha) \mid \alpha \in F_+^\times, \alpha \equiv 1 \,(\mathrm{mod}^\times\, \mathfrak{f})\} \subset \mathfrak{I}_{\mathfrak{f}}$ とすると、法 $\mathfrak{f}$ の狭義イデアル類群は $\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}^+(\mathfrak{f}) := \mathfrak{I}_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}^+$ と定義される。準同型

$$\chi \colon \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) \to \mathbb{C}^\times$$

を、総実代数体の導手 $\mathfrak{f}$ の有限 Hecke 指標と呼ぶ。0 で伸ばして χ を $\mathbb{Z}$ の分数イデアル上の関数とみなすと、χ の Hecke L 関数は

$$L(\chi, s) := \sum_{\mathfrak{a}:\mathrm{ideal} \subset \mathcal{O}_F} \chi(\mathfrak{a})\mathbf{N}(\mathfrak{a})^{-s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1$$

と定義される。有理数体の場合と同様に Dirichlet L 関数的な表示を試みる。F の分数イデアル $\mathfrak{a}$ を固定したとき、$\alpha \in \mathfrak{a}_+ := \mathfrak{a} \cap F_+^\times$ に対して F の分数イデアル $\mathfrak{a}^{-1}\alpha$ を対応させると、写像 $(\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})^\times \to \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{f})$ が定義される。ここで $(\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})^\times$ は、$\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}_F/\mathfrak{f}$ 加群として生成する $\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}$ の元の集合である。この写像は、全単射

$$\left(\coprod_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}} (\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})^\times\right)/F_+^\times \cong \coprod_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Cl}_F^+(1)} ((\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})^\times)/\Delta \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) \tag{2}$$

を誘導する。ただし $F_+^\times$ の作用は、総実代数体のかけ算とする。$\Delta := \mathcal{O}_{F+}^\times$ を総正単数群とすると、Hecke 指標 $\chi \colon \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) \to \mathbb{C}^\times$ は $(\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})^\times/\Delta$ 上の写像を 0 で伸ばすことで、写像

$$\chi_{\mathfrak{a}} \colon (\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})/\Delta \to \mathbb{C}^\times \qquad \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{I}$$

を誘導する。任意の $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{I}$ と $\alpha \in \mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}, \beta \in \mathfrak{b}/\mathfrak{f}\mathfrak{b}$ に対して、$\chi_{\mathfrak{a}}(\alpha)\chi_{\mathfrak{b}}(\beta) = \chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\alpha\beta)$ が成り立つ。$\mathrm{Cl}_F^+(1) = \mathfrak{I}/F_+^\times$ と置くと、Hecke L 関数は、

$$L(\chi, s) = \sum_{\mathfrak{a}:\mathrm{ideal} \subset \mathcal{O}_F} \chi(\mathfrak{a})\mathbf{N}(\mathfrak{a})^{-s} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Cl}_F^+(1)} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+/\Delta} \chi_{\mathfrak{a}}(\alpha)\mathbf{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s} \tag{3}$$

と表される。最後の和は、$\mathfrak{a} \in \mathrm{Cl}_F^+(1)$ の代表の取り方に依らない。

$$\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}] := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}, \mathbb{C}^\times) \subset \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}(\mathbb{C})$$

とする。(4) と同様に $\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ に対して $c_\chi(\xi) := \mathbf{N}(\mathfrak{f})^{-1} \sum_{\beta \in \mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}} \chi_{\mathfrak{a}}(\beta)\xi(-\beta)$ とおくと、

$$\chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) = \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]} c_\chi(\xi)\xi(\alpha), \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{a} \tag{4}$$

となる。この事実を用いると、$\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ の Lerch ゼータ関数 $\mathcal{L}(\xi, s)$ を

$$\mathcal{L}(\xi, s)\text{“} := \text{”} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+/\Delta} \xi(\alpha)\mathbf{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s}$$

と定義したくなる。問題は、$\xi(\alpha)$ の値は、一般には $(\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})/\Delta$ 上 well-defined に定まらないところにある。以下、総正単数群 Δ による商の問題を回避するために、Δ の軌道による有限 Fourier 展開を考える。

$\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ に対して、$\Delta_\xi := \{\varepsilon \in \Delta \mid \xi^\varepsilon = \xi\}$ とする。ただし $\xi^\varepsilon(\alpha) := \xi(\varepsilon\alpha)\ \forall \alpha \in \mathfrak{a}$ とする。このとき、$\xi\Delta := \sum_{\varepsilon \in \Delta/\Delta_\xi} \xi^\varepsilon$ とする。定義より、$\xi\Delta(\alpha)$ の値は $(\mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a})/\Delta$ 上 well-defined に定まる。$\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ に対して $c_\chi(\xi\Delta) := \mathbf{N}(\mathfrak{f})^{-1} \sum_{\beta \in \mathfrak{a}/\mathfrak{f}\mathfrak{a}} \chi_{\mathfrak{a}}(\beta)\xi\Delta(-\beta)$ とおくと、

$$\chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) = \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi\Delta)\xi\Delta(\alpha), \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{a}$$

となる。これを用いて、総実代数体の Lerch ゼータ関数を次の様に定義される [7, Definition 2.1]。

定義 1.1 (総実代数体の Lerch ゼータ関数)**.** $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}$ として、$\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}(\mathbb{C}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a}, \mathbb{C}^\times)$ の有限指標とする。すなわち、ある整イデアル $\mathfrak{f}$ に対して $\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ と仮定する。このとき、総実代数体の Lerch ゼータ関数を、

$$\mathcal{L}(\xi\Delta, s) := \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+/\Delta} \xi\Delta(\alpha)\mathbf{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

と定義する。

(3) より、有限 Hecke 指標 $\chi \colon \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$L(\chi, s) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Cl}_F^+(1)} \sum_{\alpha \in \mathfrak{a}_+/\Delta} \chi_{\mathfrak{a}}(\alpha)\mathbf{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s} = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathrm{Cl}_F^+(1)} \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi\Delta)\mathcal{L}(\xi\Delta, s)$$

となり、Hecke L 関数は総実代数体の Lerch ゼータ関数の線形和で書けることが導かれる。

2. p 進ポリログと p 進 L 関数

この章では [2] の概要を、Lerch ゼータ関数を用いて説明する。有理数体の Lerch ゼータ関数の重要な性質として、普遍的な母関数 $\mathcal{G}(t) = t/(1-t)$ の存在がある。

定理 2.1. $\partial_t := t\frac{d}{dt}$ とする。このとき、任意の $\xi \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^\times)$, $\xi \neq 1$ に対して

$$\partial_t^k \mathcal{G}(t)\Big|_{t=\xi(1)} = \mathcal{L}(\xi, -k), \quad k \in \mathbb{N}$$

が成り立つ。

$\mathcal{G}(t)$ を普遍的な母関数と呼んでいる所以は、1 つの大域的な有理関数 $\mathcal{G}(t)$ が、全ての指標 $\xi \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}) \setminus \{1\}$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して、Lerch ゼータ関数の値 $\mathcal{L}(\xi, -k)$ を知っているからである。以降、素数 p を固定して、p 進 L 関数を構成する。母関数 $\mathcal{G}(t)$ を冪級数展開することで、Lerch ゼータ関数 $\mathcal{L}(\xi, s)$ の負の整数点の値を補間する p 進測度 μ_ξ を構成し、Hecke

指標 χ の有限 Fourier 展開を用いて、この p 進測度の線形和を取ることで、Hecke L 関数 $L(\chi, s)$ の負の整数点での値を補間する p 進測度 μ_χ を構成する。

まず、K を p 進体として、$\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする。Mahler の定理の帰結として、$\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{O}_K$ に値を持つ p 進測度と冪級数 $\mathcal{O}_K[\![T]\!]$ の間には、次の関係が知られている。

命題 2.2. 形式冪級数 $\Phi(T) \in \mathcal{O}_K[\![T]\!]$ に対して、$\mathbb{Z}_p$ 上の p 進測度 μ_Φ がただ 1 つ存在して、

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x d\mu_\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{k} d\mu_\Phi(x) \right) T^k = \Phi(T)$$

が成立する。ここで $\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ である。特に $\xi_p \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}[p^\infty]$ に対して

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \xi_p(x) x^k d\mu_\Phi(x) = \left((1+T)\frac{d}{dT} \right)^k \Phi(T) \Big|_{T=\xi_p(1)-1}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{5}$$

が成立する。

いま、有限位数の加法指標 $\xi \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ を考える。以下簡単のため、$\xi(1) \in \mathbb{C}^\times$ も ξ と記す。K を十分大きく取り、埋め込み $\mathbb{Q}(\xi) \hookrightarrow \mathbb{C}$ と $\mathbb{Q}(\xi) \hookrightarrow K$ を固定して考える。ここで、$\Phi_\xi(T) := \mathcal{G}(t)|_{t=\xi(1+T)}$ とおくと、

$$\Phi_\xi(T) = \frac{\xi(1+T)}{1-\xi(1+T)} = \frac{1+T}{(\xi^{-1}-1)-T} = \frac{1+T}{\xi^{-1}-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{(\xi^{-1}-1)^k} \in K[\![T]\!]$$

となる。特に $\xi \notin \mu_{p^\infty}$ であれば $\Phi_\xi(T) \in \mathcal{O}_K[\![T]\!]$ となる。このとき、冪級数 $\Phi_\xi(T)$ に対応する $\mathbb{Z}_p$ 上の p 進測度を $\mu_\xi = \mu_{\Phi_\xi}$ と記すと、(5) より、$\xi_p \in \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}[p^\infty]$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \xi_p(x) x^k d\mu_\xi(x) = \left((1+T)\frac{d}{dT} \right)^k \Phi_\xi(T) \Big|_{T=\xi_p-1} = \partial_t^k \mathcal{G}(t) \Big|_{t=\xi\xi_p} = \mathcal{L}(\xi\xi_p, -k) \tag{6}$$

を得る。従って測度 μ_ξ は、Lerch ゼータ関数の値を補間している。

次に、導手 N が p 冪でない原始 Hecke 指標 $\chi\colon \mathrm{Cl}^+_{\mathbb{Q}}(N) \to \mathbb{C}^\times$ を考える。μ^0_N を 1 の原始 N 乗根全体として、$\mu^0_N \subset K$ と仮定する。χ は原始的であることから、$c_\chi(\xi) \neq 0$ となるのは $\xi \in \mu^0_N$ のときだけである。このとき、$\xi \notin \mu_{p^\infty}$ である。p 進測度 μ_χ を

$$\mu_\chi := \sum_{\xi \in \mu^0_N} c_\chi(\xi) \mu_\xi$$

と定義すると、(6) と χ, χ_p の有限 Fourier 展開より、次の補間公式が導かれる。

定理 2.3. μ_χ を上記の通りとして、$\chi_p\colon \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{C}^\times$ を有限指標とする。このとき、

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \chi_p(x) x^k d\mu_\chi(x) = L(\chi\chi_p, -k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

を得る。これは $\mathbb{Z}_p$ 上の p 進測度として $\chi_p \mu_\chi = \mu_{\chi\chi_p}$ が成り立つことを意味する。

この原稿では扱わないが、χ の導手が p 冪の場合には、χ の有限 Fourier 展開に現れる加法指標 ξ の位数が p 冪となり、$\Phi_\xi(T) \notin \mathcal{O}_K[\![T]\!]$ となってしまう。この場合に μ_χ を構成するためには、$\mathcal{G}(t)$ の $t=1$ での極を抜く標準的な方法を用いる必要がある。

次に p 進測度 μ_χ を用いて p 進 L 関数の構成をする。いま、$\boldsymbol{p} = p\ (p \neq 2)$, $\boldsymbol{p} = 4\ (p = 2)$ として、$W := 1 + \boldsymbol{p}\mathbb{Z}_p$ と置くと、

$$\mathbb{Z}_p^\times \cong \mu_p \times W$$

が成り立つ。$\gamma \in W \setminus (1 + p\boldsymbol{p}\mathbb{Z}_p)$ を取ると、$x \mapsto \gamma^x$ により位相群としての同型 $\mathbb{Z}_p \cong W$ が導かれる。射影 $\omega_p \colon \mathbb{Z}_p^\times \to \mu_p$ を Teichmüller 指標と呼ぶ。任意の $x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して

$$\langle x \rangle := x\omega_p^{-1}(x) \in W$$

と定義すると、$\langle x \rangle \equiv 1 \pmod{\boldsymbol{p}}$ となり、任意の $s \in \mathbb{Z}_p$ に対して $\langle x \rangle^s := \sum_{n=0}^\infty \binom{s}{n}(\langle x \rangle - 1)^n$ は収束する。以上を踏まえて、p 進 L 関数を次の様に定義する。

定義 2.4 (p 進 L 関数)**.** N を p 冪でない正の整数とする。原始的な Hecke 指標 $\chi \colon \mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}^+(N) \to \mathbb{C}^\times$ に対応する p 進 L 関数を

$$L_p(\chi, s) := \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega_p^{-1}(x)\langle x \rangle^{-s} d\mu_\chi(x), \quad s \in \mathbb{Z}_p$$

と定義する。

定義 2.4 の p 進 L 関数 $L_p(\chi, s)$ は、$\mathbb{Z}_p$ 上の p 進解析関数であることが証明される。定理 2.3 と p 進測度の $\mathbb{Z}_p^\times$ への制限を計算すると、次の補間公式をみたすことが示される。

定理 2.5 (補間公式)**.** χ と $L_p(\chi, s)$ を定義 *2.4* の通りとする。このとき、補間公式

$$L_p(\chi, -k) = \left(1 - \chi\omega_p^{-1-k}(p)p^k\right) L(\chi\omega_p^{-1-k}, -k), \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

が成り立つ。

次に p 進 L 関数と p 進ポリログ関数の関係を与える。古典的なポリログ関数 $\mathrm{Li}_k(t)$ は、$t = 0$ の近傍で冪級数

$$\mathrm{Li}_k(t) := \sum_{n=1}^\infty t^n n^{-k} \qquad k > 0 \tag{7}$$

で与えられる正則関数であり、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ に多価関数として解析接続される。1 の冪根 $\xi \neq 1$ に対して $\mathrm{Li}_k(\xi) = \mathcal{L}(\xi, s)$ となることも知られている。また、$\mathrm{Li}_k(t)$ は微分方程式

$$\partial_t \mathrm{Li}_{k+1}(t) = \mathrm{Li}_k(t) \quad (k > 0), \qquad \partial_t \mathrm{Li}_1(t) = \mathcal{G}(t) \tag{8}$$

を満たす。p 進ポリログ関数 $\mathrm{Li}_k^{(p)}(t)$ は、$t = 0$ の近傍で冪級数

$$\mathrm{Li}_k^{(p)}(t) := \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^\infty t^n n^{-k}, \qquad k > 0$$

で与えられる p 進解析関数である。任意の $m > 0$ に対して

$$\mathrm{Li}^{(p)}_{k,m}(t) \coloneqq (1-t^{p^m})^{-1} \sum_{\substack{n=1 \\ (n,p)=1}}^{p^m} t^n n^{-k} \in \mathbb{Z}_p\left[t,(1-t^{p^m})^{-1}\right]$$

と置く。$\mathbb{Z}_p\{t,(1-t)^{-1}\}$ を $\mathbb{Z}_p[t,(1-t)^{-1}]$ の p 進完備化とすると、$\mathrm{Li}^{(p)}_{k,m}(t) \in \mathbb{Z}_p\{t,(1-t)^{-1}\}$ となる。定義より $m' \geq m$ のとき、$\mathrm{Li}^{(p)}_{k,m'}(t) \equiv \mathrm{Li}^{(p)}_{k,m}(t) \pmod{m}$ となる。従って完備性より $\mathrm{Li}^{(p)}_k(t) \coloneqq \lim_{m\to\infty} \mathrm{Li}^{(p)}_{k,m}(t)$ は $\mathbb{Z}_p\{t,(1-t)^{-1}\}$ 内で収束し、$\mathbb{Z}_p[\![t]\!]$ では冪級数 (7) と一致する。∂_t は微分 $\partial_t\colon \mathbb{Z}_p\{t,(1-t)^{-1}\} \to \mathbb{Z}_p\{t,(1-t)^{-1}\}$ を誘導し、$\mathrm{Li}^{(p)}_k(t)$ は微分方程式

$$\partial_t \mathrm{Li}^{(p)}_{k+1}(t) = \mathrm{Li}^{(p)}_k(t) \quad (k>0), \qquad \partial_t \mathrm{Li}^{(p)}_1(t) = \mathcal{G}^{(p)}(t) \coloneqq \mathcal{G}(t) - \mathcal{G}(t^p)$$

を満たす。$n \in \mathbb{Z}_p^\times$ と $m \geq 0$ に対して $n^{p^m(p-1)-k} \equiv n^{-k} \pmod{p^{m+1}}$ となることから、冪級数の計算より $p^m(p-1) \geq k$ であれば $\mathrm{Li}^{(p)}_k(t) \equiv \partial_t^{p^m(p-1)-k}\mathcal{G}^{(p)}(t) \pmod{p^{m+1}}$ が成り立つ。従って、$\mathbb{Z}_p\{t,(1-t)^{-1}\}$ の完備性より

$$\mathrm{Li}^{(p)}_k(t) = \lim_{m\to\infty} \partial_t^{p^m(p-1)-k}\mathcal{G}^{(p)}(t)$$

を得る。ξ を 1 の冪根で $\xi \notin \mu_{p^\infty}$ とすると、$\mathrm{Li}^{(p)}_k(\xi) \in K(\xi)$ は値として定まる。$x \in \mathbb{Z}_p^\times$ の場合 $\sum_{\zeta_p\in\mu_p} \zeta_p(x) = 0$、$x \in p\mathbb{Z}_p$ の場合 $\sum_{\zeta_p\in\mu_p}\zeta_p(x) = p$ となることから、$\mathcal{O}_{K(\mu_p)}[\![T]\!]$ の中で

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} (1+T)^x d\mu_\xi(x) &= \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x d\mu_\xi(x) - \frac{1}{p}\sum_{\zeta_p\in\mu_p}\int_{\mathbb{Z}_p} \zeta_p(x)(1+T)^x d\mu_\xi(x) \\ &= \mathcal{G}(t)\big|_{t=\xi(1+T)} - \frac{1}{p}\sum_{\zeta_p\in\mu_p}\mathcal{G}(t)\big|_{t=\xi\zeta_p(1+T)} = \mathcal{G}^{(p)}(t)\big|_{t=\xi(1+T)}\end{aligned}$$

となる。$x \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して $\lim_{m\to\infty} x^{p^m(p-1)-k} = x^{-k}$ より、

$$\mathrm{Li}^{(p)}_k(\xi) = \lim_{m\to\infty}\partial_t^{p^m(p-1)-k}\mathcal{G}^{(p)}(\xi) = \lim_{m\to\infty}\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{p^m(p-1)-k} d\mu_\xi(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_\xi(x) \tag{9}$$

を得る。$N > 0$ を p 冪でない整数として $\chi\colon \mathrm{Cl}^+_F(N) \to \mathbb{C}^\times$ を原始 Hecke 指標とすると、$k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}L_p(\chi\omega_p^{-k+1}, k) &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \omega_p^{-k}(x)\langle x\rangle^{-k} d\mu_\chi(x) = \sum_{\xi\in\mu_N^0} c_\chi(\xi)\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\omega_p^{-k}(x)\langle x\rangle^{-k} d\mu_\xi(x) \\ &= \sum_{\xi\in\mu_N^0} c_\chi(\xi)\int_{\mathbb{Z}_p^\times} x^{-k} d\mu_\xi(x) = \sum_{\xi\in\mu_N^0} c_\chi(\xi)\mathrm{Li}^{(p)}_k(\xi)\end{aligned}$$

となり、p 進 L 関数の $k \in \mathbb{N}$ での値は、p 進ポリログ関数で記述されることが導かれる。

3. 代数トーラスと新谷生成類

以降、§2 の総実代数体版である [7,8] の結果を解説する。総実代数体の場合、Lerch ゼータ関数 $\mathcal{L}(\xi\Delta, s) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{a}_+/\Delta}\xi\Delta(\alpha)\mathbf{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-s}$ を考えるにあたり、和が $\mathfrak{a}_+/\Delta$ という商を渡っている。$F=\mathbb{Q}$ のときは $\Delta=\mathbb{Z}_+^\times=\{1\}$ となるので難しさは無い。総実代数体の場合、$\mathfrak{a}_+/\Delta$ の代表系を取る手法が、新谷の錐分解である。まずは錐（cone）の言葉を用意する。

F を総実代数体とする。$\alpha\otimes 1\mapsto(\tau(\alpha))_{\tau\in I}$ より同型 $F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^I$ が導かれる。$\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}$ とする。$\mathfrak{a}$ の $\mathbb{Z}$ 加群としての生成系 $\alpha_1,\ldots,\alpha_g\in\mathfrak{a}_+$ に対して、

$$\sigma\coloneqq\{x_1\alpha_1+\cdots+x_g\alpha_g\mid x_1,\ldots,x_g\in\mathbb{R}_+\}$$

と表される $\mathbb{R}_+^I$ の部分集合 σ を、単体的有理開錐、あるいは単に錐と呼ぶ。

$\mathfrak{f}\subset\mathcal{O}_F$ を F の 0 でない整イデアルとして、$\xi\in\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ とする。

定義 3.1. 新谷ゼータ関数 $\zeta_\sigma(\xi,\boldsymbol{s})$ を

$$\zeta_\sigma(\xi,\boldsymbol{s})\coloneqq\sum_{\alpha\in\mathfrak{a}_+\cap\sigma}\xi(\alpha)\alpha^{-\boldsymbol{s}},\quad \boldsymbol{s}=(s_\tau)_{\tau\in I},\quad \mathrm{Re}(s_\tau)>1$$

と定義する。ただし $\alpha^{-\boldsymbol{s}}\coloneqq\prod_{\tau\in I}\tau(\alpha)^{-s_\tau}$ とする。

新谷ゼータ関数は $\boldsymbol{s}\in\mathbb{C}^I$ に有理型関数として解析接続される。$F=\mathbb{Q},\mathfrak{a}=\mathbb{Z},\sigma=\mathbb{R}_+\coloneqq\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\}$ のとき、$\zeta_\sigma(\xi,s)=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+\cap\mathbb{R}_+}\xi(n)n^{-s}=\sum_{n=1}^\infty\xi(n)n^{-s}=\mathcal{L}(\xi,s)$ となる。

次に、新谷ゼータ関数の母関数を考える。いま、$\mathbb{Q}$ 上 t^α $(\alpha\in\mathfrak{a})$ で生成される $\mathbb{Q}$ 代数を考えて、関係 $t^0=1, t^{\alpha_1}t^{\alpha_2}=t^{\alpha_1+\alpha_2}$ $(\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathfrak{a})$ で割った商環を $A\coloneqq\mathbb{Q}[t^\alpha\mid\alpha\in\mathfrak{a}]$ とする。さらに、$\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}\coloneqq\mathrm{Spec}\,A$ とする。$\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ は Katz [13, §1] にも登場している。任意の $\mathbb{Q}$ 代数 R を考えて、$\xi'\in\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}(R)=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(A,R)$ に対して $\xi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a},R)$ を $\xi(\alpha)\coloneqq\xi'(t^\alpha)$ $(\forall\alpha\in\mathfrak{a})$ として対応させると、同型 $\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}(R)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a},R^\times)$ を得る。すなわち、$\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ は $\mathfrak{a}$ 上の加法指標全体を与える代数群 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a},\mathbb{G}_m)$ と一致する。従って、記号 $\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}(\mathbb{C})$ は §2 の用法と一致する。

特に $F=\mathbb{Q}$ のとき $\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}=\mathbb{G}_m$ となる。普遍的母関数 $\mathcal{G}(t)$ は $\mathbb{G}_m$ 上の有理関数であり、

$$\mathcal{G}(t)=\frac{t}{1-t}=\sum_{n=1}^\infty t^n=\sum_{n\in\mathbb{Z}_+\cap\mathbb{R}_+}t^n$$

を満たしている。一般の総実代数体の場合、錐 σ に対して $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_g)$ を σ の生成系としたとき、$\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ 上の有理関数 $\mathcal{G}_\sigma(t)$ を次の様に定義すると、形式的な計算として

$$\mathcal{G}_\sigma(t)\coloneqq\frac{t^{\alpha_1}\cdots t^{\alpha_g}}{(1-t^{\alpha_1})\cdots(1-t^{\alpha_g})}=\sum_{n_1,\ldots,n_g=1}^\infty t^{n_1\alpha_1+\cdots+n_g\alpha_g}=\sum_{\alpha\in\mathfrak{a}_+\cap\sigma}t^\alpha \tag{10}$$

を得る。上記の計算が鍵となり、定理 2.1 の新谷ゼータ関数版が導かれる。

命題 3.2 ([10, Théorème 5], [11, Lemme 3.2])**.** いま、$\xi\in\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ として、$\xi(\alpha_1),\ldots,\xi(\alpha_g)\neq 1$ とする。任意の $\boldsymbol{k}=(k_\tau)_{\tau\in I}\in\mathbb{N}^I$ に対して

$$\partial^{\boldsymbol{k}}\mathcal{G}_\sigma(t)\big|_{t=\xi}=\zeta_\sigma(\xi,-\boldsymbol{k})$$

が成り立つ。ただし、∂_τ は $\partial_\tau(t^\alpha)=\tau(\alpha)t^\alpha$ をみたす微分として、$\partial^{\boldsymbol{k}}:=\prod_{\tau\in I}\partial_\tau^{k_\tau}$ とする。

総実代数体の Lerch ゼータ $\mathcal{L}(\xi\Delta,s)$ は、$\mathfrak{a}_+/\Delta$ の代表を与える適切な錐たち（新谷分解）に対応する新谷ゼータ関数 $\zeta_\sigma(\xi,\boldsymbol{s})$ の和として表される（(12) 参照）。新谷分解の取り方は幾つもあり、また、分解の取り方は加法指標 ξ にも依存するために、Lerch ゼータ関数を新谷ゼータ関数で表す方法は、標準的でも普遍的でも無い。従って、単純に線形和を取って $\mathcal{G}_\sigma(t)$ より普遍的母関数を作ることはできない。同変コホモロジー類として大域的で普遍的な生成類を作るところが、新谷生成類の革新的なアイディアである。

$x\in F_+^\times$ の作用を考える。$\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}$ としたとき、$t^\alpha\mapsto t^{x\alpha}$ に誘導される環準同型 $\mathbb{Q}[t^\alpha\mid\alpha\in\mathfrak{a}]\to\mathbb{Q}[t^{x\alpha}\mid x\alpha\in x\mathfrak{a}]$ は、概型の射 $\langle x\rangle\colon\mathbb{T}^{x\mathfrak{a}}\to\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ を導く。$\mathbb{T}:=\coprod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ と置くと、概型の自己同型 $\langle x\rangle\colon\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ が誘導される。従って $\mathbb{T}$ には $F_+^\times$ の作用がある。$U^{\mathfrak{a}}:=\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}\setminus\{1\}$ とすると、$U:=\coprod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}U^{\mathfrak{a}}$ にも $F_+^\times$ の作用がある。従って、同変連接コホモロジー $H^m(U/F_+^\times,\mathcal{O}_{\mathbb{T}})$ が $m\in\mathbb{N}$ に対して定義される。

以下、新谷生成類を同変連接コホモロジー $H^{g-1}(U/F_+^\times,\mathcal{O}_{\mathbb{T}})$ の類として構成する。最初に同変連接コホモロジーを計算する複体を考える。$\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}$ に対して、$\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}:=\{\alpha\in\mathfrak{a}_+\mid N^{-1}\alpha\notin\mathfrak{a}\,\forall N>1\}$ を $\mathfrak{a}$ の原始的元とする。$\alpha\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}$ に対して $U_\alpha:=\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}\setminus\{t^\alpha=1\}$ とする。$\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}:=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}}$ は $U^{\mathfrak{a}}$ のアフィン開被覆を与える。$\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}$ に対して $U_{\alpha_1\cdots\alpha_m}:=U_{\alpha_1}\cap\cdots\cap U_{\alpha_m}$ とすると、$U^{\mathfrak{a}}$ の被覆 $\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}}$ による Čech 複体は、

$$\prod_{\alpha\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}}^{\mathrm{alt}}\Gamma(U_\alpha,\mathcal{O}_{\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}})\to\prod_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}}^{\mathrm{alt}}\Gamma(U_{\alpha_1\alpha_2},\mathcal{O}_{\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}})\to\cdots\to\prod_{\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}}^{\mathrm{alt}}\Gamma(U_{\alpha_1\cdots\alpha_m},\mathcal{O}_{\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}})\to\tag{11}$$

で与えられる。以下、この複体を $C^\bullet(\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}})$ と記す。$C^\bullet(\mathfrak{U}):=\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}C^\bullet(\mathfrak{U}_{\mathfrak{a}})$ は、U の Čech 複体を与える。$F_+^\times$ の U への作用は、$F_+^\times$ の $C^\bullet(\mathfrak{U})$ への作用を与える。

命題 3.3. 複体 $C^\bullet(\mathfrak{U}/F_+^\times):=C^\bullet(\mathfrak{U})^{F_+^\times}$ に対して、以下の同型が成り立つ。

$$H^m(U/F_+^\times,\mathcal{O}_{\mathbb{T}})\cong H^m(C^\bullet(\mathfrak{U}/F_+^\times)).$$

新谷生成類の構成で、錐の境界部分をうまく貼り合わすために、錐の上閉包を考える。いま、I の元に $I=\{\tau_1,\dots,\tau_g\}$ と番号を振ると、同型 $\mathbb{R}^I\cong\mathbb{R}^g$ が導かれる。$\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}$ として、σ を $\mathfrak{a}$ の $\mathbb{Z}$ 加群としての生成系 $\alpha_1,\dots,\alpha_g\in\mathfrak{a}_+$ で生成される錐としたとき、σ の上閉包を

$$\widehat{\sigma}:=\{x\in\mathbb{R}^g\mid\exists\delta>0,0<\forall\delta'<\delta,x-(0,\dots,0,\delta')\in\sigma\}$$

と定義する。定義 3.1 と同様に、$\widehat{\sigma}$ に対応する新谷ゼータ関数を $\zeta_{\widehat{\sigma}}(\xi,\boldsymbol{s}):=\sum_{\alpha\in\mathfrak{a}_+\cap\widehat{\sigma}}\xi(\alpha)\alpha^{-\boldsymbol{s}}$ とする。こうすると、新谷分解の理論より、錐からなる有限集合 Φ_ξ が存在して、

$$\mathcal{L}(\xi\Delta,s)=\sum_{\sigma\in\Phi_\xi}\zeta_{\widehat{\sigma}}(\xi,(s,\dots,s))\tag{12}$$

と表される。Φ_ξ の取り方は一意では無い。

$\zeta_{\widehat{\sigma}}(\xi,\boldsymbol{s})$ に対して (10) と同様な母関数 $\mathcal{G}_{\widehat{\sigma}}(t)\in\Gamma(U_{\alpha_1\cdots\alpha_g},\mathcal{O}_{\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}})$ が定まる。以後簡単のため、$\mathcal{G}_{\widehat{\sigma}}(t)$ を $\mathcal{G}_\sigma(t)$ と記す。$\mathfrak{a}_+$ の元の組 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_g)$ に対して、$\operatorname{sgn}\boldsymbol{\alpha}=\operatorname{sgn}(\det(\tau_i(\alpha_j)))$ と置く。ただし、$x\in\mathbb{R}$ に対して $\operatorname{sgn}(x):=x/|x|\ (x\neq0)$, $\operatorname{sgn}(0):=0$ とする。

いま、$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_g)\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}^g$ に対して $\boldsymbol{\alpha}$ が $\mathfrak{a}$ を $\mathbb{Z}$ 加群として生成するとき、$\boldsymbol{\alpha}$ が生成する錐 σ に対して $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(t)\coloneqq\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\alpha})\mathcal{G}_\sigma(t)$ として、そうでないときは $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(t)\coloneqq 0$ とする。

命題 3.4. 任意の $\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}$ と $\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}^g$ に対して、

$$\mathcal{G}(t)\coloneqq(\mathcal{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(t))_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I},\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}^g}\in\Bigg(\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}\prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}_{\mathfrak{a}}^g}^{\text{alt}}\Gamma(U_{\alpha_1\cdots\alpha_g},\mathcal{O}_{\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}})\Bigg)^{F_+^\times}=:C^{g-1}(\mathfrak{U}/F_+^\times)$$

は $C^\bullet(\mathfrak{U}/F_+^\times)$ の余輪体となる。この帰結として、$\mathcal{G}(t)$ は $H^{g-1}(U/F_+^\times,\mathcal{O}_{\mathbb{T}})$ の類を与える。この類 $\mathcal{G}(t)$ を新谷生成類と呼ぶ。

命題 3.4 の $\mathcal{G}(t)$ の新谷生成類は、総実代数体の Lerch ゼータ関数の普遍的な生成類となっている。まずは同変連接コホモロジー類の微分と、点での値を考察する。$\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}$ に対して $A_{\mathfrak{a}}\coloneqq\mathbb{Q}[t^\alpha\mid\alpha\in\mathfrak{a}]$ とする。このとき、$\boldsymbol{\partial}_{\mathfrak{a}}(t^\alpha)=\mathbf{N}(\alpha)t^\alpha$ で与えられる微分作用素 $\boldsymbol{\partial}_{\mathfrak{a}}\colon A_{\mathfrak{a}}\to A_{\mathfrak{a}}$ を考える。$\boldsymbol{\partial}\coloneqq\mathbf{N}(\mathfrak{a})^{-1}\boldsymbol{\partial}_{\mathfrak{a}}$ とおくと、$\boldsymbol{\partial}\colon\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}A_{\mathfrak{a}}\to\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}A_{\mathfrak{a}}$ は $F_+^\times$ の作用と可換となる。従って、同変連接コホモロジーに微分作用素

$$\boldsymbol{\partial}\colon H^{g-1}(U/F_+^\times,\mathcal{O}_{\mathbb{T}})\to H^{g-1}(U/F_+^\times,\mathcal{O}_{\mathbb{T}})$$

が誘導される。

次に $\mathbb{T}_{\text{tors}}\coloneqq\bigcup_{\mathfrak{f}\colon\text{ideal}\subset\mathcal{O}_F}\mathbb{T}[\mathfrak{f}]$、ただし $\mathbb{T}[\mathfrak{f}]\coloneqq\bigcup_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]$ として、$U_{\text{tors}}\coloneqq U\cap\mathbb{T}_{\text{tors}}$ とする。$\xi\in U_{\text{tors}}$ に対して ξ の Δ の作用による軌道 $\xi\Delta$ を考えると、$\xi\Delta$ は $\mathbb{Q}$ 上有限であり、射 $\xi\Delta\to U$ が与えられる。この点への引き戻しにより、同変連接コホモロジーの引き戻し

$$(\xi\Delta)^*\colon H^{g-1}(U/F_+^\times,\mathcal{O}_{\mathbb{T}})\to H^{g-1}(\xi\Delta/\Delta,\mathcal{O}_{\xi\Delta})$$

が与えられる。単数定理より $\Delta\cong\mathbb{Z}^{g-1}$ となることを用いて、群コホモロジーの計算より

$$H^{g-1}(\xi\Delta/\Delta,\mathcal{O}_{\xi\Delta})\cong H^{g-1}\big(\Delta,H^0(\xi\Delta,,\mathcal{O}_{\xi\Delta})\big)\cong\mathbb{Q}(\xi)\tag{13}$$

という標準的な同型が与えられる。$f(t)\in H^{g-1}(U/F_+^\times,\mathcal{O}_{\mathbb{T}})$ に対して $(\xi\Delta)^*f(t)$ の同型 (13) を通した $\mathbb{Q}(\xi)$ への像を $f(t)|_{t=\xi\Delta}$ と記す。新谷生成類 $\mathcal{G}(t)$ は次を満たす。

定理 3.5. 任意の $\xi\in U_{\text{tors}}$ に対して

$$\boldsymbol{\partial}^k\mathcal{G}(t)\Big|_{t=\xi\Delta}=\mathcal{L}(\xi\Delta,-k),\quad k\in\mathbb{N}$$

が成り立つ。

定理 3.5 は、定理 2.1 の総実代数体版である。新谷生成類 $\mathcal{G}(t)$ は全ての有限指標 $\xi\in U_{\text{tors}}$ と $k\in\mathbb{N}$ に対して、総実代数体の Lerch ゼータ関数 $\mathcal{L}(\xi\Delta,s)$ の負の整数点での値を知っている。このことから、新谷生成類は普遍的な母関数の役割を果たす。

乗法群のポリログの場合 (8) との類推から、仮に同変コホモロジー類 $\mathrm{Li}_k(t)$ が存在して

$$\boldsymbol{\partial}\mathrm{Li}_{k+1}(t)=\mathrm{Li}_k(t)\quad(k>0),\qquad\boldsymbol{\partial}\mathrm{Li}_1(t)=\mathcal{G}(t)\tag{14}$$

が成り立つと仮定すると、$\mathrm{Li}_k(t)$ はポリログの総実代数体版となる。現在のところ、この様な類をどこで考えると良いかすら、見当をつけることができていない。次節では $\mathrm{Li}_k(t)$ の p 進版である、総実代数体の場合の p 進ポリログの構成を解説する。

4. 総実代数体の p 進ポリログと p 進 L 関数

この節では、総実代数体の p 進ポリログを定義し、p 進 L 関数との関係を述べる。記号は§3の通りとする。総実代数体の p 進 L 関数は、Hilbert モジュラー多様体の Eisenstein 級数を用いる方法で Deligne-Ribet [12] により構成された。その後別途、Barsky [9] と Cassou-Noguès [10] によって新谷の理論を用いた構成が与えられた。この節では [10] の構成を、総実代数体の Lerch ゼータ関数を用いて整理して紹介する。最後に総実代数体の p 進ポリログの定義を与え、p 進 L 関数との関係を述べる。

K を十分大きな p 進体とする。特に $F \hookrightarrow K$ を固定する。σ を錐として、$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_g) \in \mathscr{A}_{\mathfrak{a}}^g$ を σ の生成系とする。このとき、$\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ 上の有理関数 $\mathcal{G}_\sigma(t)$ の冪級数展開を用いて p 進測度を構成する。いま、$\xi \in U_{\alpha_1 \cdots \alpha_g} \cap \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}_{\mathrm{tors}}$ を取り、$i = 1, \dots, g$ に対して、$t^{\alpha_i} = \xi(\alpha_i)(1 + T^{\alpha_i})$ というパラメーターを取ると、$\xi \in K$ となる様に K を十分大きく取れば、形式冪級数 $\mathcal{G}_\sigma(t)|_{t=\xi} \in K[\![T^{\alpha_1}, \dots, T^{\alpha_g}]\!]$ を得る。特に $\xi \notin \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[p^\infty] := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[p^m]$ のとき、

$$\Phi_\xi(T) := \mathcal{G}_\sigma(t)|_{t=\xi} \in \mathcal{O}_K[\![T^{\alpha_1}, \dots, T^{\alpha_g}]\!]$$

となる。形式冪級数と p 進測度の関係（命題 2.2）の多変数版より、$\Phi_\xi(T)$ に対応する $\mathbb{Z}_p^g$ 上の p 進測度 $\mu_{\sigma,\xi}$ が定まる。$\boldsymbol{\alpha}$ は $\mathfrak{a}$ の $\mathbb{Z}$ 上の生成系であることから、同型 $\mathbb{Z}_p^g \cong \mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p$ が定まり、$\mu_{\sigma,\xi}$ は $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p$ 上の p 進測度を誘導する。$\mathcal{G}_\sigma(t)$ が新谷ゼータ関数 $\xi_{\widehat{\sigma}}(\xi, s)$ の負の整数点での値の母関数となっていること（命題 3.2) より、次が成り立つ。

命題 4.1 ([7, Proposition 4.6])**.** 任意の $\xi_p \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[p^\infty]$ と $\boldsymbol{k} = (k_\tau) \in \mathbb{N}^I$ に対して、

$$\int_{\mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p} \xi_p(x) x^{\boldsymbol{k}} d\mu_{\sigma,\xi}(x) = \zeta_{\widehat{\sigma}}(\xi\xi_p, -\boldsymbol{k})$$

が成り立つ。

命題 4.1 は、形式冪級数の定義と同型 $\mathbb{Z}_p^g \cong \mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p$ における $\boldsymbol{\alpha}$ の取り方が打ち消しあって、$\mu_{\sigma,\xi}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ の取り方に依らないことを示している。(12) の新谷分解 Φ_ξ を与えると、$\mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p$ 上の p 進測度 $\mu_\xi := \sum_{\sigma \in \Phi_\xi} \mu_{\sigma,\xi}$ が定義される。この p 進測度は Φ_ξ の取り方に依存する。しかしながら $\overline{\Delta}$ を $\mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p$ の中での Δ の p 進完備化とすると、μ_ξ の $(\mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p)/\overline{\Delta}$ への順像 $\mu_{\xi\Delta}$ は新谷分解 Φ_ξ の取り方に依存せず、次の通り、(6) の総実代数体版が成り立つ。

定理 4.2 ([7, Theorem 4.1])**.** $\xi \notin \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[p^\infty]$ とする。任意の $\xi_p \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[p^\infty]$ と $k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\int_{(\mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p)/\overline{\Delta}} \xi_p\Delta(x) \mathbf{N}_{\mathfrak{a}}(x)^k d\mu_{\xi\Delta}(x) = \mathcal{L}(\xi\Delta\ \xi_p\Delta, -k)$$

が成り立つ。ただし、$\mathbf{N}_{\mathfrak{a}}$ は $\mathbf{N}_{\mathfrak{a}}(\alpha) := \mathbf{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)$ を $(\mathfrak{a} \otimes \mathbb{Z}_p)/\overline{\Delta}$ まで p 進的に伸ばした関数。

§2 の場合と同様、μ_ξ を用いて総実代数体の p 進 L 関数を構成する。$\mathfrak{f} \neq 0$ を F の整イデアルとして、$\mathfrak{f}$ は (p) の冪を割り切らないとする。原始 Hecke 指標 $\chi\colon \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) \to \mathbb{C}^\times$ を考える。各 $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}$ に対して、$\chi_{\mathfrak{a}}(\alpha) = \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi\Delta)\xi\Delta(\alpha)$ と表される。

$$\mu_{\chi_{\mathfrak{a}}} := \sum_{\xi \in \mathbb{T}^{\mathfrak{a}}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi\Delta)\mu_{\xi\Delta}$$

は $(\mathfrak{a}\otimes\mathbb{Z}_p)/\overline{\Delta}$ 上の p 進測度を与える。同型 (2) を (p^n) について逆極限を取ると、全単射

$$\Bigl(\coprod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}(\mathfrak{a}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times\Bigr)/\overline{F_+^\times}\cong\Bigl(\coprod_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}_F^+(1)}(\mathfrak{a}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times/\overline{\Delta}\Bigr)\cong\mathrm{Cl}_F^+(p^\infty)$$

を得る。この全単射を通して、$\mu_{\chi_\mathfrak{a}}$ より $\mathrm{Cl}_F^+(p^\infty)$ 上の p 進測度 μ_χ が定まる。この p 進測度は定理 2.3 と同様、Hecke L 関数 $L(\chi,s)$ の負の整数点での値を補間する。(p) と互いに素な分数イデアル $\mathfrak{b}$ に対して $\mathbf{N}(\mathfrak{b})$ を対応させることで、連続準同型 $\mathbf{N}\colon\mathrm{Cl}_F^+(p^\infty)\to\mathbb{Z}_p^\times$ が誘導される。p 進 L 関数 $L(\chi,s)$ は、次の通りである。

定理 4.3 (総実代数体の p 進 L 関数)**.** $\mathfrak{f}\neq 0$ を F の整イデアルとして、$\mathfrak{f}$ は (p) の冪を割り切らないとする。原始 *Hecke* 指標 $\chi\colon\mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{f})\to\mathbb{C}^\times$ を考える。p 進 L 関数 $L_p(\chi,s)$ を

$$L_p(\chi,s):=\int_{\mathrm{Cl}_F^+(p^\infty)}\omega_p^{-1}(\mathbf{N}(\mathfrak{x}))\langle\mathbf{N}(\mathfrak{x})\rangle^{-s}d\mu_\chi(\mathfrak{x})$$

と定義する。このとき、任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$L_p(\chi,-k)=\Bigl(\prod_{\mathfrak{p}|(p)}(1-\chi\omega_p^{-k-1}(\mathfrak{p})\mathbf{N}(\mathfrak{p})^k\Bigr)L(\chi\omega_p^{-k-1},-k)$$

が成り立つ。

最後に、総実代数体の場合の p 進ポリログを定義して、p 進 L 関数との関係を述べる。$\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}$, 錐 σ と $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{Li}_{k,\sigma}^{(p)}(t):=\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}_+\cap\widehat{\sigma}\\ \alpha\in(\mathfrak{a}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times}}t^\alpha\mathbf{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-k}\tag{15}$$

と定義する。$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_g)\in\mathscr{A}_\mathfrak{a}^g$ を σ の生成系としたとき、$\mathrm{Li}_{k,\sigma}^{(p)}(t)\in K[\![t^{\alpha_1},\dots,t^{\alpha_g}]\!]$ となる。$m\in\mathbb{N}$ に対して $P_{\boldsymbol{\alpha},m}:=\{x_1\alpha_1+\cdots+x_g\alpha_g\mid 0<x_i\le p^m\}$ として $\widehat{P}_{\boldsymbol{\alpha},m}$ を $P_{\boldsymbol{\alpha},m}$ の上閉包とする。

$$\mathrm{Li}_{k,\sigma,m}^{(p)}(t):=\prod_{i=1}^g\frac{1}{(1-t^{p^m\alpha_i})}\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{a}_+\cap\widehat{P}_{\boldsymbol{\alpha},m}\\ \alpha\in(\mathfrak{a}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times}}t^\alpha\mathbf{N}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha)^{-k}$$

とする。$A_\mathfrak{a}:=O_K[t^\alpha\mid\alpha\in\mathfrak{a}]$ として $B_{\boldsymbol{\alpha}}:=A_\mathfrak{a}[(1-t^{\alpha_1})^{-1},\dots,(1-t^{\alpha_g})^{-1}]$ とする。$B_\mathfrak{a}$ の p 進完備化を $\widehat{B}_\mathfrak{a}:=A_\mathfrak{a}\{(1-t^{\alpha_1})^{-1},\dots,(1-t^{\alpha_g})^{-1}\}$ とすると、

$$\mathrm{Li}_{k,\sigma,m}^{(p)}(t)\in\widehat{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$$

を得る。$m'\ge m$ のとき、$\mathrm{Li}_{\sigma,m'}^{(p)}(t)\equiv\mathrm{Li}_{\sigma,m}^{(p)}(t)\pmod{p^m}$ となり、$\mathrm{Li}_{k,\sigma}^{(p)}(t)=\lim_{m\to\infty}\mathrm{Li}_{k,\sigma,m}^{(p)}(t)$ は $\widehat{B}_{\boldsymbol{\alpha}}$ で収束し、$K[\![t^{\alpha_1},\dots,t^{\alpha_g}]\!]$ では冪級数 (15) と一致する。

$\widehat{A}_\mathfrak{a}$ を $A_\mathfrak{a}$ の p 進完備化として、K 上のリジッド解析空間 $\widehat{\mathbb{T}}^\mathfrak{a}:=\mathrm{Spm}\,(\widehat{A}_\mathfrak{a}\otimes K)$ を考える。$\widehat{\mathbb{T}}:=\coprod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}}\widehat{\mathbb{T}}^\mathfrak{a}$ とする。また、$\alpha\in\mathscr{A}_\mathfrak{a}$ に対して $B_\alpha:=A_\mathfrak{a}[(1-t^\alpha)^{-1}]$ として、$\widehat{U}_\alpha:=\mathrm{Spm}\,(\widehat{B}_\alpha\otimes K)$ とする。$\widehat{U}^\mathfrak{a}:=\bigcup_{\alpha\in\mathscr{A}_\mathfrak{a}}\widehat{U}_\alpha$ は、$\widehat{\mathbb{T}}^\mathfrak{a}$ から原点の周りの単位多重開円板を抜いた空間である。

$\widehat{U} := \coprod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}} \widehat{U}^{\mathfrak{a}}$ とする。$\widehat{\mathfrak{U}} := \{U_\alpha\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I},\alpha\in\mathscr{A}_\mathfrak{a}}$ は $\widehat{U}$ のアフィノイドによる被覆である。$F_+^\times$ は $\widehat{\mathbb{T}}$, $\widehat{U}$, $\widehat{\mathfrak{U}}$ に作用する。(11) と同様に複体 $C^\bullet(\widehat{\mathfrak{U}}) := \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}} C^\bullet(\widehat{\mathfrak{U}}_\mathfrak{a})$ を定義し、$C^\bullet(\widehat{\mathfrak{U}}/F_+^\times) := C^\bullet(\widehat{\mathfrak{U}})^{F_+^\times}$ とする。同変 p 進コホモロジーを

$$H^m(\widehat{U}/F_+^\times, \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{T}}}) := H^m(C^\bullet(\widehat{\mathfrak{U}})^{F_+^\times})$$

と定義する。

任意の $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_g) \in \mathscr{A}_\mathfrak{a}^g$ に対して $\boldsymbol{\alpha}$ が $\mathfrak{a}$ の $\mathbb{Z}$ 生成系のとき $\mathrm{Li}_{k,\boldsymbol{\alpha}}^{(p)}(t) := \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\alpha})\mathrm{Li}_{k,\sigma}^{(p)}(t)$ として、そうでないときは $\mathrm{Li}_{k,\boldsymbol{\alpha}}^{(p)}(t) = 0$ とする。$\mathrm{Li}_{k,\boldsymbol{\alpha}}^{(p)}(t) \in \widehat{B}_{\boldsymbol{\alpha}} \otimes K = \Gamma(\widehat{U}_{\alpha_1\cdots\alpha_g}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{T}}^\mathfrak{a}})$ である。

定理 4.4 ([7, Theorem 3.9])**.** 任意の整数 $k > 0$ に対して

$$\mathrm{Li}_k^{(p)}(t) := (\mathrm{Li}_{k,\boldsymbol{\alpha}}^{(p)}(t))_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I},\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}_\mathfrak{a}^g} \in \Bigg(\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{I}} \prod_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}_\mathfrak{a}^g}^{\mathrm{alt}} \Gamma(\widehat{U}_{\alpha_1\cdots\alpha_g}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{T}}^\mathfrak{a}})\Bigg)^{F_+^\times} =: C^{g-1}(\widehat{\mathfrak{U}}/F_+^\times)$$

は余輪体であり、$H^{g-1}(\widehat{U}/F_+^\times, \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{T}}})$ の類を定義する。この類 $\mathrm{Li}_k^{(p)}(t)$ を p 進ポリログと呼ぶ。

p 進ポリログは微分方程式

$$\boldsymbol{\partial}\mathrm{Li}_{k+1}^{(p)}(t) = \mathrm{Li}_k^{(p)}(t), \quad k \in \mathbb{N}$$

をみたす。$\xi \in \widehat{U}_{\mathrm{tors}} := \widehat{U} \cap U_{\mathrm{tors}}$ は $\xi\Delta \to \widehat{U}$ を導く。$\mathrm{Li}_k^{(p)}(t)$ の引き戻し

$$(\xi\Delta)^*\colon H^{g-1}(\widehat{U}/F_+^\times, \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{T}}^\mathfrak{a}}) \to H^{g-1}(\xi\Delta/\Delta, \mathcal{O}_{\xi\Delta}) \cong K$$

による像を $\mathrm{Li}_k^{(p)}(\xi\Delta)$ と記す。

定理 4.5 ([7, Theorem 5.5])**.** $\xi \in \widehat{U}_{\mathrm{tors}}$ とする。$\xi \in U^\mathfrak{a}$ となる $\mathfrak{a} \in \mathfrak{I}$ に対して、

$$\mathrm{Li}_k^{(p)}(\xi\Delta) = \int_{(\mathfrak{a}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times/\overline{\Delta}} \mathbf{N}_\mathfrak{a}(x)^{-k} d\mu_{\xi\Delta}(x)$$

が成り立つ。

$\mathfrak{f} \neq 0$ を F の整イデアルとして、$\mathfrak{f}$ は (p) の冪を割り切らないとする。原始 Hecke 指標 $\chi\colon \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{f}) \to \mathbb{C}^\times$ を考える。命題 4.5 を用いると、

$$L_p(\chi\omega_p^{-k+1}, k) = \int_{\mathrm{Cl}_F^+(p^\infty)} \omega_p^{-k}(\mathbf{N}(\mathfrak{x}))\langle\mathbf{N}(\mathfrak{x})\rangle^{-k} d\mu_\chi(\mathfrak{x}) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}_F^+(1)} \int_{(\mathfrak{a}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times/\overline{\Delta}} \mathbf{N}_\mathfrak{a}(x)^{-k} d\mu_{\chi_\mathfrak{a}}(x)$$
$$= \sum_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}_F^+(1)} \sum_{\xi\in\mathbb{T}^\mathfrak{a}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi) \int_{(\mathfrak{a}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times/\overline{\Delta}} \mathbf{N}_\mathfrak{a}(x)^{-k} d\mu_{\xi\Delta}(x) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathrm{Cl}_F^+(1)} \sum_{\xi\in\mathbb{T}^\mathfrak{a}[\mathfrak{f}]/\Delta} c_\chi(\xi)\mathrm{Li}_k^{(p)}(\xi\Delta)$$

となり、p 進 L 関数 $L_p(\chi, s)$ の $k \in \mathbb{N}$ での値は、p 進ポリログの値の線形和で書けることが示された。

参考文献

[1] Kenichi Bannai, *Rigid syntomic cohomology and p-adic polylogarithms*, J. Reine Angew. Math. **529** (2000), 205–237, DOI 10.1515/crll.2000.097. MR1799937

[2] ———, p 進ポリログと p 進 L 函数, 数理解析研究所講究録 **1256** (2002), 97–130.「整数論のこの主題、自分はこう考える」若手発表会（Young Philosophers in Number Theory, Kyoto 2001）. MR1927158

[3] ———, *On the p-adic realization of elliptic polylogarithms for CM-elliptic curves*, Duke Math. J. **113** (2002), no. 2, 193–236, DOI 10.1215/S0012-7094-02-11321-0. MR1909217

[4] Kenichi Bannai and Shinichi Kobayashi, *Algebraic theta functions and Eisenstein-Kronecker numbers*, Proceedings of the Symposium on Algebraic Number Theory and Related Topics, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, vol. B4, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007, pp. 63–77. MR2402003

[5] ———, *Algebraic theta functions and the p-adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers*, Duke Math. J. **153** (2010), no. 2, 229–295, DOI 10.1215/00127094-2010-024. MR2667134

[6] Kenichi Bannai, Shinichi Kobayashi, and Takeshi Tsuji, *On the de Rham and p-adic realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **43** (2010), no. 2, 185–234, DOI 10.24033/asens.2119 (English, with English and French summaries). MR2662664

[7] Kenichi Bannai, Kei Hagihara, Kazuki Yamada, and Shuji Yamamoto, *p-adic polylogarithms and p-adic Hecke L-functions for totally real fields*, J. Reine Angew. Math. **791** (2022), 53–87, DOI 10.1515/crelle-2022-0040. MR4489625

[8] ———, *Canonical equivariant cohomology classes generating zeta values of totally real fields*, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B **10** (2023), 613–635, DOI 10.1090/btran/144. MR4583122

[9] Daniel Barsky, *Fonctions zeta p-adiques d'une classe de rayon des corps de nombres totalement réels*, Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique (5e année: 1977/78), Secrétariat Math., Paris, 1978, pp. Exp. No. 16, 23 (French). MR525346

[10] Pierrette Cassou-Noguès, *Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques*, Invent. Math. **51** (1979), no. 1, 29–59, DOI 10.1007/BF01389911 (French). MR524276

[11] Pierre Colmez, *Résidu en* $s = 1$ *des fonctions zêta p-adiques*, Invent. Math. **91** (1988), no. 2, 371–389, DOI 10.1007/BF01389373 (French). MR922806

[12] Pierre Deligne and Kenneth A. Ribet, *Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math. **59** (1980), no. 3, 227–286, DOI 10.1007/BF01453237. MR0579702

[13] Nicholas M. Katz, *Another look at p-adic L-functions for totally real fields*, Math. Ann. **255** (1981), no. 1, 33–43, DOI 10.1007/BF01450554. MR611271

[14] Takuro Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), no. 2, 393–417. MR0427231

Email address: `bannai@math.keio.ac.jp`

[*]Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kouhoku-ku, Yokohama 223-8522, Japan

[◇]Mathematical Science Team, RIKEN Center for Advanced Intelligence Project (AIP),1-4-1 Nihonbashi, Chuo-ku, Tokyo 103-0037, Japan