Modular Jacobian varieties over cyclotomic fields with the Mordell-Weil rank 0

東京大学数理科学研究科　松田光智
Koji Matsuda
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

本稿では楕円曲線の捻じれ部分群の分類に関する諸結果と、その証明に用いられるモジュラー曲線について紹介する。また、有理数体とは限らない代数体上で定義されるある種のモジュラー曲線の中から、そのヤコビ多様体の Mordell–Weil ランクが 0 となるものを特定し、その結果を用いて円分体上の楕円曲線の捻じれ部分群に関する著者の定理やそれに関連した事項も紹介する。

1　導入

よく知られているように、代数体 K 上の楕円曲線 E に関して、その有理点の成す群 $E(K)$（Mordell–Weil 群）は有限生成アーベル群であり、よってとくにその捻じれ部分群 $E(K)_{\mathrm{tors}}$ は有限群である（Mordell–Weil の定理）。さらに、体 K と楕円曲線 E を定義する式が具体的に与えられているとき、その捻じれ部分群 $E(K)_{\mathrm{tors}}$ を計算するのは簡単である。（例えば E の reduction を調べる等。よほど複雑な式でもない限り数秒足らずでこれを計算するアルゴリズムも存在する。）しかし逆に、どのような有限群がこういった代数体上の楕円曲線の Mordell–Weil 群の捻じれ部分群として現れ得るかという問いは難しく、また深い歴史がある。この問いに関して 1977 年に Mazur が以下の定理を証明した。

Theorem 1.1 ([Maz77])**.** 有理数体上の楕円曲線 E に関して、$E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ は以下のいずれかと同型である。

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} && \textit{for } 1 \leq N \leq 12, N \neq 11, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z} && \textit{for } 1 \leq N \leq 4. \end{aligned}$$

さらにこれらいずれの群に関しても、それと同型な捻じれ部分群をもつ有理数体上の楕円曲線が（同型の違いを除いて）無限個存在する。

この定理の証明以降、同様の手法をより発展させ、数々の研究者がこの定理の一般化を調べてきた。例えば、Kenku–Momose と Kamienny により、二次体に関する以下の定理が得られた。

Theorem 1.2 ([KM88], [Kam92])**.** 二次体 K 上の楕円曲線 E/K に関して、$E(K)_{\mathrm{tors}}$ は以下のいずれかと同型である。

$$\begin{aligned} &\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} && \textit{for } 1 \leq N \leq 18, N \neq 17, \\ &\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2N\mathbb{Z} && \textit{for } 1 \leq N \leq 6, \\ &\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3N\mathbb{Z} && \textit{for } 1 \leq N \leq 2, \\ &\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}. && \end{aligned}$$

さらにこれらいずれの群に関しても、それと同型な捻じれ部分群をもつ二次体上の楕円曲線が（同型の違いを除いて）無限個存在する。

この定理をさらに発展させ、1996 年に Merel が以下の定理を証明した。

Theorem 1.3 ([Mer96])**.** 正整数 d に関して、以下の条件を満たす d のみに依存するある定数 N が存在する：次数 d の代数体 K 上の楕円曲線 E に関して、$E(K)_{\mathrm{tors}}$ の位数は N 以下である。

この定理によって、固定された次数の代数体上の楕円曲線の捻じれ部分群として現れ得る群は有限個しかないことがわかったが、多くの研究者が実際に現れ得る群を完全に特定しようと調べている。例えば（同型の違いを除いて）無限個の楕円曲線の捻じれ部分群として現れ得る群は多くの次数に関して特定されている（[DvH14, Theorem 3]）し、完全な分類も 3 次体に関しては [DEvH^{+}21] によって得られている。

これらはモジュラー曲線と呼ばれる、ある意味で全ての楕円曲線とある種の付加構造を支配しているといえる代数曲線を調べることによって研究されてきた。より詳しく手法を述べると、これらはある種のモジュラー曲線のヤコビ多様体の商であって、その Mordell–Weil 群のランクが 0 であるようなものをうまく構成し、それを用いてモジュラー曲線の有理点を特定することによって証明された。本稿ではこの手法から示唆を受けて、ある種の（有理数体上で定義されているとは限らない）モジュラー曲線の中から、そのヤコビ多様体の Mordell–Weil ランクが 0 のものを特定する。以下が主定理の一つである。

Theorem 1.4. 以下の M, N に対し、$J_1(M, MN)(\mathbb{Q}(\zeta_M))$ の *rank* は 0.*:*

$$\begin{aligned}
M &= 1, & N &\in \{1, \ldots, 36, 38, \ldots, 42, 44, \ldots, 52, 54, 55, 56, 59, 60, 62, 64, 66, 68, \ldots, 72, 75, 76, 78,\\
&&&\quad 81, 84, 87, 90, 94, 96, 98, 100, 108, 110, 119, 120, 132, 140, 150, 168, 180\},\\
M &= 2, & N &\in \{1, \ldots, 21, 24, \ldots, 27, 30, 33, 35, 42, 45\},\\
M &= 3, & N &\in \{1, \ldots, 10, 12, 14, 16, 20\},\\
M &= 4, & N &\in \{1, \ldots, 6\},\\
M &= 5, & N &\in \{1, \ldots, 4, 6\},\\
M &= 6, & N &\in \{1, \ldots, 5\},\\
M &= 7, & N &\in \{1, 2\},\\
M &= 8, & N &= 1\\
M &= 9, & N &= 1\\
M &= 10, & N &= 1\\
M &= 12, & N &= 1.
\end{aligned}$$

さらに、*Birch–Swinneryon-Dyer* 予想が正しければ、逆も成り立つ。

この定理の $M = 1, 2$ の場合は [DEvH^{+}21, Theorem 3.1] からの引用である。また、Birch–Swinneryon-Dyer 予想の全てを仮定せずとも、後に紹介する加藤の定理（4.1）の逆を仮定すれば十分である。またこれを用いて、円分体上の楕円曲線の捻じれ部分群に関する以下の結果を証明する。

Theorem 1.5. $N = 6, 7, 8, 9, 10$ か 12 とすると、$\mathbb{Q}(\zeta_N)$ 上の楕円曲線 E であって、$E(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ に $(\mathbb{Z}/N)^2$ と同型な部分群を含むものは存在しない。

なお、定理 1.5 で述べられているような楕円曲線は、$N \leq 5$ に関しては同型の違いを除いて無限個存在し、$N = 11$ か $N \geq 13$ に関しては存在するとしても多くとも有限個であることがすぐにわかる。

2 モジュラー曲線

以下本稿では特に断りの無い限り N と M を正整数とする。$\mathbb{H}$ を上半平面、つまり虚部が正である複素数全体の集合とし、ここに $\mathrm{SL}_2 \mathbb{Z}$ を

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

のように作用させる。$\mathrm{GL}_2 \mathbb{Z}/N$ の部分群 Γ に対し、Γ' を $\mathrm{SL}_2 \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}_2 \mathbb{Z}/N$ による Γ の逆像とし、$Y_\Gamma = \Gamma' \backslash \mathbb{H}$, X_Γ をこのコンパクト化とする。また、1 の N 乗根を添加した円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ の整数環を $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ とかき、行列式によって $\mathrm{GL}_2 \mathbb{Z}/N$ を $\mathbb{Z}[\zeta_N]$ に作用させる。また、この作用で不変な部分を $\mathbb{Z}[\zeta_N]^\Gamma$ と書く。このとき X_Γ は（Weil pairing によって）標準的に $\mathbb{Z}[\zeta_N]^\Gamma[1/N]$ 上の smooth projective curve とみなすことができ、またその幾何的ファイバーは全て連結となる。この曲線の genus は Γ の群論のみによって簡単に計算できることが知られている。

さらに Y_Γ は楕円曲線とそのレベル Γ 構造の組を分類する algebraic stack の coarse moduli となっていることが知られている。（X_Γ の方も、広義楕円曲線というものまで考えればよいモジュライとなっていることが知られている。）

特にそれぞれ

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N) \right\}$$

と

$$\Gamma_1(M, MN) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/MN) \middle| b \equiv 0, d \equiv 1 \mod M \right\}$$

に対して、X_Γ をそれぞれ $X_0(N), X_1(M, MN)$ と書き、$X(M) := X_1(M, M), X_1(N) := X_1(1, N)$ とする。このとき $X_0(N)$ は $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線であり、$X_1(M, MN)$ は $\mathbb{Q}(\zeta_M)$ 上の代数曲線である。さらに、$X_0(N)$ は楕円曲線とその位数 N の巡回部分群の組を分類する coarse moduli となっており、また 1 の原始 M 乗根 ζ を一つ固定すると、$X_1(M, MN)$ は楕円曲線とその二つの有理点 P, Q であって、$\mathbb{Z}/M \times \mathbb{Z}/MN$ と同型な部分群を生成し、さらに Weil pairing の像 $e_M(P, NQ)$ が ζ と一致しているものらの組を分類している coarse moduli（$M \geq 3$ か $MN \geq 4$ の場合は fine moduli）となっている。本講演ではこれらの曲線を調べることによって楕円曲線の捻じれ部分群に関する定理を導いたのであった。またそれぞれに付随する対象を同様の記号を用いて表す。（例えばそれぞれの Jacobian variety を $J_0(N), J_1(M, MN), J(M), J_1(N)$ と書く。）

以下では本講演で紹介しきれなかった細かいところもある程度含めて主定理の証明の概略を紹介する。

3 定理 1.5 の証明

本節では定理 1.4 を認めて、定理 1.5 の証明の概略を述べる。

Proof. 正整数 N を定理の通りとし、$Y := Y(N), X := X(N), J := J(N)$ とする。$Y(N)(\mathbb{Q}(\zeta_N)) = \varnothing$ を示す。今 N は 5 より大きいので X の genus は正であることが知られており、さらに定理 1.4 より $J(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ のランクは 0 であるため、[Kat81, Appendix] より、X がよい還元を持つ $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ の有理素数 p 上の素点 $\mathfrak{p}$（つまり N を割り切らない素点 $\mathfrak{p}$）に対し、もしその absolute inertia index e が不等式 $e < p - 1$ を満たすなら、reduction $J(N)(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \to J(N)(\mathbb{F}_q)$ は単射となる。（ただし $\mathbb{F}_q$ は $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ の素点 $\mathfrak{p}$ での residue field とした。）∞-cusp によって引き起こされる標準射 $X(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \to J(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ は単射なので、図式

$$\begin{array}{ccc} X(N)(\mathbb{Q}(\zeta_N)) & \hookrightarrow & J(N)(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X(N)(\mathbb{F}_q) & \hookrightarrow & J(N)(\mathbb{F}_q), \end{array}$$

より、redction $X(N)(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \to X(N)(\mathbb{F}_q)$ も単射である。

一方、Hasse bound よりもし $N^2 > (1 + \sqrt{q})^2$, つまりもし $q < (N-1)^2$ が成り立つなら、体 $\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線の有理点の成す群は位数が N^2 未満となり、よって特にその部分群に $(\mathbb{Z}/N)^2$ と同型なものを含み得ない。これは $Y(\mathbb{F}_q) = \varnothing$, 即ち $X(\mathbb{F}_q)$ がカスプのみからなるということに他ならない。また reduction $X(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \to X(\mathbb{F}_q)$ はカスプをカスプに全射に写し、それぞれのカスプの個数が同じであることが知られているため、$X(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ の任意の点 x に対してカスプ y が存在し、x, y は射 $X(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \to X(\mathbb{F}_q)$ で同じ点に写る。

これらにより、もし N を割り切らない素点 $\mathfrak{p}$ であって、不等式 $e < p - 1$ と $q < (N-1)^2$ を満たすものが存在するならば、$X(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ はカスプしか持ちえない、即ち $Y(\mathbb{Q}(\zeta_N)) = \varnothing$ を得る。最後に、我々の N に対して条件 $e < p - 1$ と $N^2 > (1 + \sqrt{q})^2$ を満たす素点は存在するから、$X(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ もカスプのみから成り、これにて定理を得る。 □

4 モジュラーアーベル多様体の Mordell–Weil ランク

前節にて、モジュラーヤコビ多様体を用いてモジュラー曲線を調べることによって楕円曲線の性質を調べられるということがわかった。本節ではモジュラーヤコビ多様体を計算するが、これにあたってモジュラーヤコビ多様体の simple factor であるモジュラーアーベル多様体を用いるのが有用である。

重さ 2 でレベル $\Gamma_1(N)$ の正規化された固有形式 f に対して、K_f を f の Fourier 係数が生成する代数体とし、A_f を f に付随するアーベル多様体する。このアーベル多様体の次元は $[K_f:\mathbb{Q}]$ であり、さらに K_f のある order が作用する。([Shi73, Theorem 1]) さらに、素数 ℓ に対して、Tate 加群 $V_\ell(A_f) := T_\ell(A_f)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$ は $K_f\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_\ell$ 上で階数 2 の自由加群であり、素数 $p\neq\ell$ に対し、p 番目の Frobenius の $V_\ell(A_f)$ での trace は $a_p(f)$ である。さらにもし f が新形式であるならば、A_f は単純アーベル多様体であり、$\mathrm{End}\,A_f\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=K_f$ が成り立つ。([Rib80, Corollary 4.2]) また、モジュラーヤコビ多様体 $J_1(N)$ は以下と同種となる：

$$\bigoplus_M\bigoplus_f A_f^{m_f}.$$

ここで、M は N の正の約数を走り、f は重さ 2 でレベル M の新形式のガロア群の作用における共役類を走り、m_f は N/M の正の約数の個数とした。([Rib80, Proposition 2.3])

これにより、モジュラーヤコビ多様体の計算はある意味である種のモジュラーアーベル多様体の計算に帰着される。モジュラーアーベル多様体の Mordell–Weil ランクを計算する際には Birch–Swinnerton-Dyer 予想の既知の場合を用いる。

Theorem 4.1 ([Kat04])**.** f を重さ 2 でレベル $\Gamma_1(N)$ の新形式とする。もし A_f の L-関数の $s=1$ での零点の位数が 0 であるならば、$A_f(\mathbb{Q})$ の *Mordell–Weil* ランクも 0 である。

なお、本稿で Birch–Swinnerton-Dyer 予想を仮定している命題は、全てこの加藤の定理の逆を仮定すれば十分である。

また定理 1.4 を証明するにあたって、以下の先行研究を用いる。

Theorem 4.2 ([DEvH$^+$21])**.** 以下の N に対し、$J_1(N)(\mathbb{Q})$ の *rank* は 0*.:*

$$\begin{aligned}N\in\{&1,\dots,36,38,\dots,42,44,\dots,52,54,55,56,59,60,62,64,66,\\&68,\dots,72,75,76,78,81,84,87,90,94,96,98,100,108,110,119,\\&120,132,140,150,168,180\}.\end{aligned}$$

さらに、*Birch–Swinneryon-Dyer* 予想が正しければ、逆も成り立つ。

5 定理 1.4 の証明

部分群 $\Delta=\ker((\mathbb{Z}/M^2N)^*/\pm1\to(\mathbb{Z}/MN)^*/\pm1)$ に対し、

$$\Gamma_\Delta=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N)\middle| a\mod\pm1\in\Delta\right\}.$$

と定め、これに付随するモジュラー曲線を X_Δ と書き、このヤコビ多様体を J_Δ と書く。このとき、これらは $\mathbb{Q}$ 上の代数曲線であり、[JK05] より $(X_\Delta)_{\mathbb{Q}(\zeta_M)}\simeq X_1(M,MN)$ を得る。さらにこのモジュラーヤコビ多様体に関して以下が成り立つ。

Proposition 5.1. $J_\Delta(\mathbb{Q})$ の *Mordell–Weil* ランクが 0 であることと $J_1(M,MN)(\mathbb{Q}(\zeta_M))$ の *Mordell–Weil* ランクが 0 であることは同値。

以下に証明の概略を述べる。

Proof. $K:=\mathbb{Q}(\zeta_N), G:=\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ とし、$A:=A_f$ を J_Δ の simple factor とする。さらに B を A_K の $K/\mathbb{Q}$ に沿った Weil 制限とする。このとき素数 ℓ に対し、B の Tate 加群 $V_\ell(B)$ はガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の作用も含めて $V_l(A)\otimes_{\mathbb{Q}_\ell}\mathbb{Q}_\ell[G]$ と同型となることが示せる。今 G はアーベル群であるため、これは $\oplus_\chi V_\ell(A)\otimes\chi$ と同型となる。ただし直和は G の Dirichlet character を走る。ここで、$p\neq\ell$ を素数とすると、p 番目の Frobenius の $V_\ell(A)$ での trace は $a_p(f)$ である。よって Dirichlet character χ に対して、p 番目の Frobenius の $V_\ell(A)\otimes\chi, V_\ell(A_{f_\chi})$ での trace はそれぞれ $a_p(f)\chi(p), a_p(f_\chi)$ となる。(ただし f_χ は保形形式 f の χ での twist.) 保形形式の twist の定義よりこれら二つは等しいので、Chebotarev density theorem より、$V_\ell(A)\otimes\chi\simeq V_\ell(A_{f_\chi})$ を得る。これにて Faltings の定理 [Fal83, Korollar1] より $A_f(K)$ の Mordell–Weil ランクは $A_{f_\chi}(\mathbb{Q})$ の Mordell–Weil ランクを用いて計算できる。

一方、レベル Γ_Δ の保形形式は、まさにレベル $\Gamma_1(M^2N)$ の保形形式で、その character の conductor が MN を割り切るものに他ならないことが容易にわかる。よって [AWL78, Proposition 3.1] より、重さ 2 でレベル Γ_Δ の保形形式 f と G の Dirichlet character χ に関して、twist f_χ は再びレベル Γ_Δ の保形形式となる。これにて J_Δ の 4 節と同様の分解を考えることにより、命題は示された。(より正確には、新形式 f の twist f_χ に付随する新形式を考える必要がある。詳しくは本講演の基となった [Mat23] 参照。) □

最後に定理 1.4 の証明の概略を述べる。

Proof. 体 $\mathbb{Q}$ 上の標準射 $X_1(M^2N) \to X_\Delta \to X_0(M^2N)$ と $\mathbb{Q}(\zeta_M)$ 上の標準射 $X_1(M, MN) \to X_1(MN)$ を考える。命題 5.1 より、もし $J_1(M^2N)(\mathbb{Q})$ のランクが 0 ならば $J_1(M, MN)(\mathbb{Q}(\zeta_M))$ のランクも 0 であり、逆にもし $J_1(M, MN)(\mathbb{Q}(\zeta_M))$ のランクが 0 ならば $J_1(MN)(\mathbb{Q})$ と $J_0(M^2N)(\mathbb{Q})$ のランクも 0 となる。

よって定理 4.2 より、$(M, N) = (3, 7), (3, 14), (3, 16), (4, 5), (6, 4)$ と $(12, 1)$ 以外の (M, N) に対して結果を得る。最後にこれらの (M, N) に対して、[AS05, Theorem 4.5] のアルゴリズムを用いることにより、結果を得る。(例えば Magma [BCP97] を用いる。) □

本稿ではランクが 0 になるものを計算したが、定理 1.4 の証明をより精密にすることによって、ランクが 0 とは限らないモジュラーヤコビ多様体のランクもある程度計算することができる。例えば著者は $\operatorname{rank} J(11)(\mathbb{Q}(\zeta_{11})) = 10, \operatorname{rank} J(14)(\mathbb{Q}(\zeta_{14})) = 8, \operatorname{rank} J(15)(\mathbb{Q}(\zeta_{15})) = 20$ などを得た。さらに、加藤の定理の逆のみを仮定して、$J_0(N)(\mathbb{Q})$ のランクの下限を得ることもできる。本講演の基となった [Mat23] を参照。

また、本稿では定理 1.5 を示すためにはある種のモジュラーヤコビ多様体のランクが 0 となることが肝要であった。しかし定理 1.5 を示すには、導入で紹介した Mazur の定理や Merel の定理と同様に、formal immersion の議論を用いることによって、実はモジュラー多様体の構成要素であるモジュラーアーベル多様体の内、どれか一つでもランクが 0 となるものがあるということを示せば十分であることがわかる。この主張は計算機を用いて今のところ $N \leq 31$ まで確かめている（よって特に定理 1.5 は $6 \leq N \leq 31$ で成り立つ）が、一般にそうなるかはまだわかっていない。著者は加藤の定理 4.1 を用い、保形形式をより詳しく解析的に調べることによってこれが証明できるのではないかと考えている。(例えば [KM99, Theorem 1] と同様に、$J_1(N)$ のランクをその次元を用いて上から抑えることができれば恐らく証明できると考えている。しかし Mathoverflow という質問サイトにて D. Loeffler 氏が [KM99] の著者からこれは非常に難しい問題だと聞いたと言っており、証明できるのかよくわからない。)

参考文献

[AWL78] A. O. L. Atkin and Wein-Ch'ing Winnie Li, *Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W-operators*, Invent. Math. **48** (1978), no. 3, 221–243, DOI 10.1007/BF01390245. ↑4

[AS05] Amod Agashe and William Stein, *Visible evidence for the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture for modular abelian varieties of analytic rank zero*, Math. Comp. **74** (2005), no. 249, 455–484. ↑5

[BCP97] Wieb Bosma, John Cannon, and Catherine Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), no. 3-4, 235–265, DOI 10.1006/jsco.1996.0125. Computational algebra and number theory (London, 1993). ↑5

[DEvH+21] Maarten Derickx, Anastassia Etropolski, Mark van Hoeij, Jackson S. Morrow, and David Zureick-Brown, *Sporadic cubic torsion*, Algebra Number Theory **15** (2021), no. 7, 1837–1864, DOI https://doi.org/10.2140/ant.2021.15.1837. ↑2, 4

[DvH14] Maarten Derickx and Mark van Hoeij, *Gonality of the modular curve $X_1(N)$*, J. Algebra **417** (2014), 52–71, DOI 10.1016/j.jalgebra.2014.06.026. MR3244637 ↑2

[Fal83] Gerd Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), no. 3, 349–366, DOI 10.1007/BF01388432. ↑4

[JK05] Daeyeol Jeon and Chang Heon Kim, *Bielliptic modular curves $X_1(M, N)$*, Manuscripta Math. **118** (2005), no. 4, 455–466, DOI 10.1007/s00229-005-0595-9. ↑4

[Kat04] Kazuya Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, Astérisque **295** (2004), ix, 117–290. ↑4

[Kam92] Sheldon Kamienny, *Torsion points on elliptic curves and q-coefficients of modular forms*, Inventiones Mathematicae **109** (1992), no. 1, 221–229. ↑1

[Kat81] Nicholas M. Katz, *Galois properties of torsion points on abelian varieties*, Invent. Math. **62** (1981), no. 3, 481–502. ↑3

[KM88] M. A. Kenku and Fumiyuki Momose, *Torsion points on elliptic curves defined over quadratic fields*, Nagoya Math. J. **109** (1988), 125–149. ↑1

[KM99] E. Kowalski and P. Michel, *The analytic rank of $J_0(q)$ and zeros of automorphic L-functions*, Duke Math. J. **100** (1999), no. 3, 503–542, DOI 10.1215/S0012-7094-99-10017-2. MR1719730 ↑5

[Maz77] Barry Mazur, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Publications Mathématiques de l'IHÉS **47** (1977), 33 –186. ↑1

[Mat23] Koji Matsuda, *Determination of the modular Jacobian varieties $J_1(M, MN)$ with the Mordell-Weil rank zero*, Res. Number Theory **9** (2023), no. 2, Paper No. 22, DOI 10.1007/s40993-023-00430-4. MR4563689 ↑4, 5

[Mer96] Loïc Merel, *Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres*, Invent. Math. **124** (1996), no. 1-3, 437–449, DOI 10.1007/s002220050059 (French). MR1369424 ↑1

[Rib80] Kenneth A Ribet, *Twists of modular forms and endomorphisms of abelian varieties*, Math. Ann. **253** (1980), 43 –62. ↑4

[Shi73] Goro Shimura, *On the factors of the jacobian variety of a modular function field*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), no. 3, 523 –544. ↑4