Stochastic analogues of ergodic theory of differentiable dynamical systems and related topics

盛田 健彦[1]

大阪大学・大学院理学研究科

本ノートでは Ruelle [29] による 'a.e. 安定多様体定理' に関連した結果のランダム版を得ようとする試みについての話題を中心に，これまでのランダム力学系研究についても振り返ってみたいと思う．

[29](1979) の主結果 (Theorem 6.3) はコンパクト Riemann 多様体の $C^{1,\epsilon}$ 級可微分同相写像の如何なる不変確率測度に対しても，負の Lyapunov 指数が生ずるようなほとんどすべての点で安定多様体が存在することを示すという類のもであった ($1 \leq r \leq +\infty$，$0 < \epsilon \leq 1$)．Lyapunov 指数やエントロピーと関わる可微分同相写像のエルゴード理論を現在では Pesin 理論といっているように思われるが，[29] においては Pesin [25](1976), [26](1976), [27](1977) における滑らかな不変測度をもつ可微分同相写像に関する安定多様体定理に言及はしているものの，Pesin 理論という言葉は用いられていない．一方，その後に発表された [29] を無限次元の場合にも応用できるよう拡張した Ruelle [30](1982) においては，Lyapunov 指数を利用して不変測度についてほとんどすべて点における (不) 安定多様体を構成する理論に Pesin 理論という言葉が用いられていることから，Pesin 理論が普及していく過程を断片的に垣間みることができる．ここで，余談ではるが，[29] が掲載された Publ. IHES **50** (1979) は前年 31 歳の若さで亡くなった R. Bowen の追悼巻ともいえるもので興味深い論文が多く収められており，それらに触発された研究を進めてきたのは著者ばかりではないと推測される．

[29] においては，まず，Oseledec [24] の乗法的エルゴード定理の証明を摂動論に耐え得るように書き換え，その後，ある種の非線形エルゴード定理を示し，その応用として主結果の証明を与えている．それらを以下に列挙しておこう．

定理 1(乗法的エルゴード定理)： τ を確率空間 (M, Σ, ρ) 上の保測力学系とし，$T : M \to \mathbf{M}_m$ は m 次正方行列の空間 $\mathbf{M}_m$ に値をとる M 上の可測関数とする．このとき，$\log^+ \|T(\cdot)\| \in L^1(\rho)$ が成り立つならば，$\tau\Gamma \subset \Gamma$，$\rho(\Gamma) = 1$ を満たす $\Gamma \in \Sigma$ で $x \in \Gamma$ なる限り，以下が成り立つものが存在する．

(a) 極限 $\Lambda_x = \lim_{n\to\infty} (T_x^{n*} T_x^n)^{1/2n}$ が存在する．ただし，$A \in \mathbf{M}_m$ に対して，A^* は行列 A の転置行列を表し，$n \geq 1$ に対して $M \ni x \mapsto T_x^n \in \mathbf{M}_m$ は $T_n^x = T(\tau^{n-1}x) \circ \cdots \circ T(\tau x) \circ T(x)$ で与えられる．

[1]Partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP17H02850 and the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

(b) $\exp\lambda_x^{(1)} < \cdots < \exp\lambda_x^{(s)}$ を Λ_x の固有値とし ($s = s(x)$ と $\lambda^{(1)}(x)$ ($-\infty$ をとり得る) は可測である)，$U_x^{(1)}, \ldots, U_x^{(s)}$ を対応する固有空間とする．さらに，$m_x^{(r)} = \dim U_x^{(r)}$ とおく． このとき，関数 $x \mapsto \lambda_x^{(r)}$, $m_x^{(r)}$ は τ-不変であり，$V_x^{(0)} = \{0\}$, $V_x^{(r)} = U_x^{(1)} + \cdots + U_x^{(r)}$ とおけば，$u \in V_x^{(r)} \setminus V_x^{(r-1)}$ $(r = 1, \ldots, s)$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|T_x^n u\| = \lambda_x^{(r)}$$

が成り立つ． □

[29] では $\lambda_x^{(j)}$ には T のスペクトルという用語を用いている．また，定理 1 の時間パラメータが連続な場合のバージョンも与えられている．本ノートでは $\lambda_x^{(j)}$ を Lyapunov 指数ということにする．著者は 1981 年頃 Ledrappier [16] 読んだ際に，次に紹介する非線形エルゴード定理が利用されていることを知り，それをきっかけに [29] を学ぶことになった．その主張を述べるために少し準備が必要でる．

$C^{r,\epsilon}(\overline{B}(1), 0; \mathbb{R}^m, 0)$ で $\mathbb{R}^m$ の単位閉球 $\overline{B}(1)$ で定義された $\mathbb{R}^m$-値 $C^{r,\epsilon}$ 級写像で原点を固定するもの全体を表す．$n \geq 1$ と $F : M \to C^{r,\epsilon}(\overline{B}(1), 0; \mathbb{R}^m, 0)$ に対し $F_x^n = F_{\tau^{n-1}x} \circ \cdots \circ F_{\tau x} \circ F_x$ と定める．定理 1 の T としては $T_x = DF_x(0)$ を考える．

定理 2(Reulle の非線形エルゴード定理): $x \mapsto T(x)$, $\|F_x\|_{r,\theta}$ は可測で $x \mapsto \log^+ \|F_x\|_{r,\theta}$ は $L^1(\rho)$ に属するとする．$\lambda < 0$ をとり， a.e.x に対して T の x における Lyapunov 指数 は λ にも $-\infty$ にもならないと仮定する．このとき，$\tau\Gamma \subset \Gamma$, $\rho(\Gamma) = 1$ を満たす $\Gamma \in \Sigma$ と $0 < \alpha < \beta$, $\gamma > 1$ を満たす Γ 上の可測関数の組 α, β, γ で次が成り立つものが存在する：

(a) $x \in \Gamma$ のとき，集合 $\mathcal{V}_x^\lambda = \{u \in \overline{B}(\alpha(x)) : \|F_x^n u\| \leq \beta(x) e^{n\lambda} \text{ for all } n \geq 0\}$ は原点において V_x^λ を接空間とする $\overline{B}(\alpha(x))$ の $C^{r,\epsilon}$-部分多様体となる.

(b) 任意の $u, v \in \mathcal{V}_x^\lambda$ に対して $\|F_x^n u - F_x^n v\| \leq \gamma(x) e^{n\lambda} \|u - v\|$.

さらに，(τ, ρ) がエルゴード的なとき，T の Lyapunov 指数は Γ 上で定数であるとみなすことができ，もし，$\lambda' < \lambda$ をとったとき，$[\lambda', \lambda]$ に属する Lyapunov 指数が存在しないならば，Γ 上の可測関数 γ' で以下を満たすものが存在する．

$(b)'$ 任意の $u, v \in \mathcal{V}_x^\lambda$ に対して $\|F_x^n u - F_x^n v\| \leq \gamma'(x) e^{n\lambda'} \|u - v\|$. □

次が [29] の主結果である．

定理 3(a.e. 安定多様体定理)： $f : M \to M$ をコンパクト Riemann 多様体 M 上の $C^{r,\theta}$ 級可微分同相写像とする．このとき，$f\Gamma = \Gamma$ を満たす可測集合 Γ で以下が成り立つものが存在する：

(a) $\lambda_x^{(1)} < \cdots < \lambda_x^{(q)}$ が $x \in \Gamma$ における負の Lyapunov 指数とすると，$p \leq q$ に対して，集合

$$\mathcal{V}_x^{(p)} = \{y \in M : \lim_{n\to\infty} (1/n) \log d(f^n x, f^n y) \leq \lambda_x^{(p)}\}$$

は原点において恒等写像に接する単射な $C^{r,\epsilon}$-はめ込み I_x による $V_x^{(p)}$ の像となる.

(b) $x \in \Gamma$ で $\lambda_x^{(p)} < 0$ のとき，$\mathcal{V}_x^{(p)}$ を台に含むようなエルゴード的不変測度 ρ が存在する．フィルトレーション $V_y^{(1)} \subsetneq \cdots \subsetneq V_y^{(s(x))}$ は $I_x^{-1} y \in V_x^{(p)}$ に $C^{r-1,\epsilon}$ に依存する．

□

以上は単独の写像の反復合成が定める決定論的な力学系に関するものであるが，それらのランダム力学系に関する類似を考える．そのために，Kakutani [13] にならってランダム力学系の定式化を与えておこう．

2 つの標準可測空間 $(M, \mathscr{M})$ と $(S, \mathscr{S})$ を考える．M はランダム力学系の状態空間であり，S はパラメータ空間に相当する．M 上の可測変換の族 $\{\tau_s\}_{s \in S}$ で $S \times M \ni (s, x) \mapsto \tau_s x \in M$ が $(\mathscr{S} \times \mathscr{M})/\mathscr{M}$-可測となるものを準備する．荒っぽくいうと，各時刻ごとに目の集合が S であるようなサイコロを振り，出た目を添字とする時間発展の規則 τ_s を選んで，その時点の状態に施して次の時刻の状態を定めるという方法でランダム力学系を定義しようというのである．各時刻においてサイコロを振るという操作の定式化としては，もう 1 つの確率空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ とその上の保測変換 θ および S-値確率変数 ξ を用いて得られる S-値定常列 $\xi_n = \xi \circ \theta^n$ $n \geq 0$ で各時刻における時間発展の規則のランダムな選択が行われるものとする．したがって，標本 ω ごとに次のように写像列が指定されているとき，$\mathscr{X} = \{X_n\}$ を $(\{\tau_s\}, \theta, \xi)$ が定めるランダム力学系 (以下，RDS と略す) という．

$$\begin{cases} X_0(\omega) = \mathrm{id}_M \\ X_{n+1}(\omega) = \tau_{\xi_n(\omega)} X_n(\omega) \qquad (n \geq 0), \end{cases}$$

ただし，id_M は M 上の恒等写像とする．

ランダム力学系は，変換の族 $\{\tau_s\}$ を一つの変換 τ の ‘適当’ な意味での摂動とみなすならば，決定論的な力学系のランダム摂動のことと解釈することもできるであろう．そういう意味で，保測力学系 (σ, P) をノイズ力学系ということもある．

以下では，簡単のため

$$\mathscr{F} = \sigma(\xi_n\,;\, n \geq 0)$$

を仮定しよう．

[13] にならって，歪積変換 $T : M \times \Omega \to M \times \Omega$

$$T(x, \omega) = (X_1(\omega)x, \theta\omega) \qquad ((x, \omega) \in M \times \Omega)$$

を考えることによって，RDS の漸近的性質のいくつかは単一の変換 T のそれに帰着することができる．例えば，選択 $\{\xi_n\}$ が独立である場合には，$\{X_n x\}$ は x から出発する Markov 過程となり，その推移確率 $\{p(x, A) : x \in M,\, A \in \mathscr{M}\}$ は

$$p(x, A) = \int_\Omega \mathrm{I}_A(\tau_{\xi(\omega)} x)\, P(d\omega).$$

で与えられる．ここで，Markov 過程 $\mathscr{X} = \{X_n\}$ の不変測度とそれに関するエルゴード性の定義を思い出しておこう．$\mathscr{M}$ 上の確率測度 μ が $\mathscr{X}$-不変であるとは，任意の $A \in \mathscr{M}$ に対して

$$\int_M p(x, A)\,\mu(dx) = \mu(A)$$

が成り立つことであり，$\mathscr{X}$-不変確率測度 μ が $\mathscr{X}$-エルゴード的であるとは，$p(x, A) = I_A(x)$ μ-a.e. x を満たす $A \in \mathscr{M}$ について $\mu(A) = 0$ または $\mu(A) = 1$ となることである．次のようなことがわかる．

命題 4([13, 15, 22, 23])： $\{\xi_n\}$ は独立であるとする．このとき，μ を $\mathscr{M}$ 上の確率測度とすると以下の (1), (2) が成立する．

(1) μ が $\mathscr{X}$-不変であるための必要十分条件は $\mu \times P$ が T-不変であることである．

(2) μ が $\mathscr{X}$-エルゴード的であるための必要十分条件は $\mu \times P$ が T-エルゴード的であることである．

命題 4 の証明と関連して次が得られる．

命題 5(決定論的修正補題 [22]) $(\{\tau_s\}_{s\in S}, \sigma, \xi)$ が定める RDS $\mathscr{X}$ において $\{\xi_n\}$ が独立であるとし，μ は $\mathscr{M}$ 上の確率測度とする． このとき，可分距離空間 Y に値をとる $(\mathscr{M} \times \mathscr{F})$-可測写像 $\varPhi$ が $\varPhi \circ T = \varPhi$ $(\mu \times P)$-a.e. を満たすならば，$\varPhi$ は決定論的修正をもつ．すなわち，Y に値をとる $\mathscr{M}$-可測写像 φ が存在して $\varPhi = \varphi$ $(\mu \times P)$-a.e. が成り立つ．

命題 5 の主張と証明は [19] の中でも特別な場合に与えられている．ここで紹介したものは [22] で述べられているものより一般的になっているが本質的に同じである．

ランダム力学系に対する定理 1，定理 2，定理 3 の類似を得ようとする試みは 1985 年前後に [15, 20, 21] 等で行われている．後述するように連続時間パラメータの場合は [4, 6, 7, 8] 等がある．読みやすいという訳ではないがより一般的な形で [1] のなかにさまざまな結果が収められている．ここでは，我田引水となってしまうが [15] と [20, 21] にしたがったものを羅列しておこう．

定理 6(乗法的エルゴード定理のランダム版)： $\{\xi_n\}$ が S-値独立確率変数となり，$\mathscr{F}$ を生成するという仮定の下で $(\{\tau_s\}, \theta, \xi)$ が定める RDS $\mathscr{X}$ を考える．μ を Markov 過程としての $\mathscr{X}$ の不変確率測度であり，$D(\cdot,\cdot) : S \times M \to \mathbf{M}_m$ は $\log^+ \|D(\xi(\cdot), \cdot)\| \in L^1(\mu \times P)$. を満たす $\mathscr{S} \times \mathscr{M}/\mathscr{B}(\mathbf{M}_m)$-可測写像とする．このとき，$n \geq 1$ に対して

$$D^n(x, \omega) = D(\xi_{n-1}(\omega), X_{n-1}(\omega)) \cdot \cdots \cdot D(\xi_1(\omega), X_1(\omega)) \cdot D(\xi_0(\omega), X_0(\omega))$$

とおくと以下を得る．

$\mathscr{X}$ に付随する歪積変換 T に対して $T\Gamma \subset \Gamma$ で $(\mu \times P)(\Gamma) = 1$ なる可測集合 Γ と Γ 上の可測関数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m_1, \ldots, m_m$, κ で決定論的修正をもつものが存在して，$(x, \omega) \in \Gamma$ である限り以下が成立する．

(1) $m_1(x), \ldots, m_m(x)$ と $\kappa(x)$ は，で $0 < \kappa(x) \leq m$, $m_i(x) > 0$ $(i \leq \kappa(x))$, $m_i(x) = 0$ $(\kappa(x) < i)$ であり，$\sum_{i=1}^{\kappa(x)} m_i(x) = m$ を満たす.

(2) $-\infty \leq \lambda_1(x) = \cdots = \lambda_{m_1}(x) < \lambda_{m_1+1}(x) = \cdots = \lambda_{m_1+m_2}(x) < \cdots < \lambda_{m_1+m_2+\cdots+m_{\kappa(x)-1}+1}(x) = \cdots = \lambda_m(x)$. とくに，各 i に対して $\lambda_i^+ \in L^1(\mu)$ が成り立つ.

(3) 極限 $\Lambda(x,\omega) = \lim_{n\to\infty} (D^n(x,\omega)^* D^n(x,\omega))^{1/2n}$ が存在し，$\exp \lambda_i(x)$ $(1 \leq i \leq \kappa(x))$ の相異なる値 $\exp \lambda^{(1)}(x) < \cdots < \exp \lambda^{(\kappa(x))}(x)$ は $\Lambda(x,\omega)$ の固有値となる.

(4) $U^{(1)}_{(x,\omega)}, \ldots, U^{(\kappa(x))}_{(x,\omega)}$ を対応する固有空間とすると，$\dim U^{(i)}_{(x,\omega)} = m_i(x)$ $(i \leq \kappa(x))$ が成り立つ.

(5) $V^{(0)}_{(x,\omega)} = \{0\}$, $V^{(i)}_{(x,\omega)} = U^{(1)}_{(x,\omega)} + \cdots + U^{(i)}_{(x,\omega)}$ $(1 \leq i \leq \kappa(x))$ とおき，フィルトレーション $\{0\} = V^{(0)}_{(x,\omega)} \subsetneq \cdots \subsetneq V^{(\kappa(x))}_{(x,\omega)} = \mathbb{R}^m$ を考えると $1 \leq i \leq \kappa(x)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|D^n(x,\omega)u\| = \lambda^{(i)}(x) \qquad (u \in V^{(i)}_{(x,\omega)} \setminus V^{(i-1)}_{(x,\omega)})$$

が成り立つ. □

定理 6 の証明は，歪積変換 T を用いることで決定論的な保測力学系の議論に持ち込む方法をとる．他の定理のランダム版についても多かれ少なかれ同様なアイデアが有効となる．定理 1 と定理 6 を対比して若干具体的に書いておくと，保測力学系 (M,Σ,ρ,τ) に $(M \times \Omega, \mathscr{M} \times \mathscr{F}, \mu \times P, T)$ を，$M \ni x \mapsto F(x) \in \mathbf{M}_m$ に $M \times \Omega \ni (x,\omega) \mapsto D(x,\xi(\omega))$ を対応させれば，T_x^n には $D^n(x,\omega)$ が対応していることがわかり，定理 1 を適用できる形になっている.

次に非線形エルゴード定理のランダム力学系版を述べる．そのために，記号を少し準備する.

$\mathscr{S} \times \mathscr{M}$-可測関数 $\rho(\cdot,\cdot) : S \times M \to (0,\infty)$ に対して，写像 $S \times M \ni (s,x) \mapsto F(s,x) \in C^{r,\epsilon}(\overline{B}(\rho(s,x)), 0; \mathbb{R}^m, 0)$ が与えれたとき，$n \geq 1$ に対して

$$F^n(x,\omega) = F(\xi_{n-1}(\omega), X_{n-1}(\omega)x) \circ \cdots \circ F(\xi_1(\omega), X_1(\omega)x) \circ F(\xi_0(\omega), x)$$

とおく．$DF(s,x)$ で写像 $F(s,x) \in C^{r,\epsilon}(\overline{B}(\rho(s,x)), 0; \mathbb{R}^m, 0)$ の原点 $0 \in \overline{B}(\rho(s,x))$ における微分を表すこととする.

定理 7(Ruelle の非線形エルゴード定理のランダム版)： $\{\xi_n\}$ が S-値独立確率変数となり，$\mathscr{F}$ を生成する仮定の下で $(\{\tau_s\}, \theta, \xi)$ が定める RDS $\mathscr{X}$ を考える．μ を Markov 過程としての $\mathscr{X}$ の不変確率測度とする．さらに，$(s,x) \mapsto DF(s,x)$, $\|F(s,x)\|_{r,\theta}$ は $(\mathscr{S} \times \mathscr{M})/\mathscr{B}(\mathbf{M}_m)$-可測で

$$\int_{M\times\Omega} \log^- \rho(\xi(\omega), x)\, d(\mu \times P) < +\infty,$$

$$\int_{M\times\Omega} \log^+ \|F(\xi(\omega), x)\|_{r,\theta}\, d(\mu \times P) < +\infty.$$

であると仮定する．$\lambda<0$ とし，$DF(\cdot,\cdot)$ の $\mu\times P$ に関する Lyapunov 指数は λ にも $-\infty$ にならないとする．このとき，$T\Gamma\subset\Gamma$ と $(\mu\times P)(\Gamma)=1$ を満たす $\Gamma\in\mathscr{M}\times\mathscr{F}$ と Γ 上の $\mathscr{M}\times\mathscr{F}$-可測関数 α, β, γ で $0<\alpha<\beta$, $\gamma>1$ を満たすものが存在して，$(x,\omega)\in\Gamma$ なる限り以下が成り立つ．

(a) 集合 $\mathcal{V}_\lambda(x,\omega)=\{u\in\overline{B}(\alpha(x,\omega)) : \|F^n(x,\omega)u\|\le\beta(x,\omega)e^{\lambda n}\ \text{ for any } n\ge 0\}$ は原点において $V^\lambda_{(x,\omega)}$ を接空間とする $\overline{B}(\alpha(x,\omega))$ の $C^{r,\epsilon}$-部分多様体である．ただし，$V^\lambda_{(x,\omega)}=\bigcup_{\lambda^{(i)}_x\le\lambda}V^{(i)}_{(x,\omega)}$ である．

(b) $\|F^n(x,\omega)u-F^n(x,\omega)v\|\le\beta(x,\omega)e^{\lambda n}\|u-v\|$ が任意の u, $v\in\mathcal{V}_\lambda(x,\omega)$ に対して成立する．

$(b)'$ μ が $\mathscr{X}$-エルゴード的であるとする． $\lambda'<\lambda$ を $[\lambda',\lambda]$ に Lyapunov 指数を含まないようにとると，Γ 上の可測関数 γ' が存在して

$\|F^n(x,\omega)u-F^n(x,\omega)v\|\le\gamma'(x,\omega)e^{n\lambda'}\|u-v\|$ が任意の u, $v\in\mathcal{V}^\lambda(x,\omega)$ に対して成立する． □

[29] において可微分同相写像に関する安定多様体定理 (定理 3) を与える前に，可逆性を仮定しない局所安定多様定理が与えられている．以下でも定理 3 のランダム類似を述べる前に局所安定多様体定理のランダム類似を述べておく．RDS の状態空間 M はコンパクト Riemann 多様体とし，パラメータ空間としては $C^{r,\epsilon}$-ノルムを備えた M から M 自身への $C^{r,\epsilon}$ 級写像の全体とする．この場合，$S\times M\ni(s,x)\mapsto\tau_s x=s(x)\in M$ と定めることにする．すなわち，$X_n(\omega)x=\xi_{n-1}(\omega)\circ\cdots\circ\xi_1(\omega)\circ\xi_0(\omega)x$ を考える．この場合ノイズ力学系 $(\Omega,\mathscr{F},P,\theta)$ は $(S^{\mathbb{Z}_+},\mathscr{S}^{\mathbb{Z}_+},\nu^{\mathbb{Z}_+},\theta)$ であるとする．ただし，$\theta\omega=\theta((\omega_n)_{n\ge0})=(\omega_{n+1})_{n\ge0}$ で，ν は $\xi(\omega)=\omega_0$ で定義される S-値確率変数の分布とする. この場合，Markov 過程 $\mathscr{X}$ は不変確率測度をもつことが一般論でよく知られていることを申し添えておく．

定理 8(局所安定多様体定理のランダム版) 上の設定と記号のもと
$$\int_\Omega\log^+\|X_1(\omega)\|_{r,\epsilon}\,dP=\int_S\log^+\|s\|_{r,\epsilon}\,d\nu<+\infty$$
を仮定する．このとき，以下を得る．

(1) $T\Gamma\subset\Gamma$ と $(\mu\times P)(\Gamma)=1$ を満たす可測集合 $\Gamma\subset M\times\Omega$ で $(x,\omega)\in\Gamma$ なる限り，フィルトレーション
$$\{0\}=V^{(0)}_{(x,\omega)}\subsetneq V^{(1)}_{(x,\omega)}\subsetneq\cdots\subsetneq V^{(\kappa(x))}_{(x,\omega)}=T_xM.$$
と，
$$-\infty\le\lambda^{(1)}(x)<\cdots<\lambda^{(\kappa(x))}(x)<+\infty$$
が存在して
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|DX_n(\omega)(x)u\|_{X_n(\omega)x}=\lambda^{(i)}(x)$$
が各 $u\in V^{(i)}_{(x,\omega)}\setminus V^{(i-1)}_{(x,\omega)}$ に対して成立する．

(2) $\lambda < 0$ に対して $\Gamma^\lambda = \{(x,\omega) \,:\, \lambda^{(i)}(x) \notin \{-\infty, \lambda\} \text{ for } i = 1, \ldots, \kappa(x)\}$ とおく．このとき，$0 < \alpha < \beta$ と $\gamma > 1$ を満たす Γ^λ 上の可測関数 α, β, γ で以下の性質をもつもの存在する：

(a) $(x,\omega) \in \Gamma^\lambda$ のとき，集合

$$\mathcal{V}^\lambda(x,\omega) = \{y \in \overline{B}(x, \alpha(x,\omega)) \,:\, d(X_n(\omega)x, X_n(\omega)y) \leq \beta(x,\omega)e^{\lambda n}\}$$

は x において $V^\lambda_{(x,\omega)} = \bigcup_{\lambda^{(i)}(x) \leq \lambda} V^{(i)}_{(x,\omega)}$ を接空間とする $\overline{B}(x, \alpha(x,\omega))$ の $C^{r,\epsilon}$-部分多様体となる．

(b) y, $z \in \mathcal{V}^\lambda(x,\omega)$ ならば $d(X_n(\omega)x, X_n(\omega)y) \leq \gamma(x,\omega)e^{\lambda n}d(y,z)$ が成り立つ．

$(b)'$ もし，μ が $\mathscr{X}$-エルゴード的であり，$\lambda' < \lambda$ を $[\lambda', \lambda]$ が Γ 上の Lyapunov 指数を含まないようにとると， Γ 上の可測関数 $\gamma' \geq \gamma$ が存在して y, $z \in \mathcal{V}^\lambda(x,\omega)$ ならば

$$d(X_n(\omega)x, X_n(\omega)y) \leq \gamma'(x,\omega)e^{\lambda' n}d(y,z)$$

が成り立つ． □

定理 3 のランダム版を述べるために，$S = \mathrm{Diff}^{r,\epsilon}(M)$ とする．

定理 9(Ruelle の安定多様体定理のランダム版) 定理 8 の仮定に加え $S = \mathrm{Diff}^{r,\epsilon}(M)$ とし，

$$\int_\Omega \log^+ \|X_1(\omega)\|_{r,\epsilon}\, dP < +\infty, \qquad \int_\Omega \log^+ \|X_1(\omega)^{-1}\|_{r,\epsilon}\, dP < +\infty$$

を仮定する．このとき，$T\Gamma \subset \Gamma$ と $(\mu \times P)(\Gamma) = 1$ を満たす可測集合 $\Gamma \subset M \times \Omega$ で $(x,\omega) \in \Gamma$ なる限り以下が成立するようなものが存在する．

(a) $\lambda^{(1)}(x) < \cdots < \lambda^{(q)}(x)$ を $(x,\omega) \in \Gamma$ における負の Lyapunov 指数とするとき，各 $p \leq q$ に対して，集合

$$\mathcal{V}^{(p)}(x,\omega) = \{y \in M \,:\, \lim_{n\to\infty} (1/n)\log d(X^n(\omega)x, X^n(\omega)y) \leq \lambda^{(p)}(x)\}$$

は $x \in M$ において恒等写像に接するような単射な $C^{r,\epsilon}$-はめ込み $I_{(x,\omega)}$ の $V^{(p)}(x) = V^{(p)}(x,\omega)$ の像となる．とくに，$\mathcal{V}^{(p)}(x,\omega)$ は M の $C^{r-1,\theta}$-部分多様体となる．

(b) $\lambda^{(p)}(x) < 0$ に対して $\mathcal{V}^{(p)}(x,\omega)$ は μ のエルゴード成分の部分集合となる．また，フィルトレーション $V(y)^{(1)} \subsetneq \cdots \subsetneq V(y)^{(s(x))}$ は $I_x^{-1}y \in V(x)^{(p)}$ に $C^{r-1,\theta}$ に依存する．

□

定理 9 においては空間 $V^{(p)}(x,\omega)$ が決定論的な修正をもっていることを含んでいることに注意する．$S = \mathrm{Diff}^{r,\epsilon}(M)$ の場合にはエルゴード的な不変測度であるかないかに関わらず，Lyapunov 指数に関連したフィルトレーションが決定論的なものなるという事実による ([15])．

ここまでは，離散時間の場合を扱って来たが，以下では連続時間の場合について考える．結果自体は極めて離散時間のものとの類似性が高く，同じような主張を繰り返

すことになることや紙面の関係で割愛する．詳しくはCarverhill [6, 7, 8], Baxendale [4] を参照していただければと思う．とはいうものの確率微分方程式による定式化や関連する確率流の一般論にについてこの機会に少し触れておこう．

定理9を得るまでの離散時間RDSの定式化をふりかえると，状態空間 M はコンパクトRiemann多様体，可微分同相写像の空間 $\mathrm{Diff}^r(M)$ に値をとる独立確率変数 $\{\xi_n\}$ の合成をもって得られる $\mathrm{Diff}^r(M)$-値確率変数列 $X_n(\omega)=\xi_{n-1}(\omega)\circ\cdots\circ\xi_0(\omega)$ を考えるということになっている．すなわち，$\mathrm{Diff}^r(M)$ 上のランダムウォークといってよいだろう．簡単のためコンパクトRiemann多様体上の C^∞ 可微分同相写像の群Diff(M)に値をとる確率過程のみ考えることにする．ランダムウォークの連続時間版をBrown運動とみなすことにすれば，われわれの目標とするRDSはDiff(M)に値をとる以下の性質をもつ確率過程 $\mathscr{X}=\{X_t : t\geq 0\}$ であるといってよいだろう．

(i)(独立増分) $0\leq s<t\leq u<v$ ならば $X_tX_s^{-1}$ と $X_vX_u^{-1}$ は独立．

(ii)(時間的一様性) $X_tX_s^{-1}$ の分布は $t-s$ のみに依存する．

(iii)(連続性) $[0,\infty)\ni t\mapsto X_t\in\mathrm{Diff}(M)$ は連続．

(iv) $X_0=\mathrm{id}_M$.

上の (i)~(iv) を満たす $\mathrm{Diff}(M)$ 上の確率過程を $\mathrm{Diff}(M)$ のBrown運動という．$\mathscr{X}=\{X_t : t\geq 0\}$ を $\mathrm{Diff}(M)$ のBrown運動とするとき，$x\in M$ に対して $\{X(t)x\}$ は x を出発する M 上の拡散過程を一意的に定めるが，$\mathrm{Diff}(M)$ のBrown運動を定めるためには M 上のすべての点に関する時間発展を同時に考えねばならないことを危惧するのは当然であろう．そういうと途方にくれてしまうが，幸いにしてBaxendaleによる次の結果が知られている．

定理 10([3],cf.[17]) (1) $\{X_t : t\geq 0\}$ を $\mathrm{Diff}(M)$ のBrown運動とする．このとき，各変数について C^∞ 級の α; $M^2\ni(x,y)\to\alpha(x,y)\in T_xM\otimes T_yM$ と C^∞ 級のベクトル場 $\beta\in\mathscr{X}(M)=\mathscr{X}^\infty(M)$ で以下の (a), (b) を満たすものが存在する．

(a) 各 $n\geq 1$ と任意の $(x_1,\ldots,x_n)\in M^n$ および $v_i\in T^*_{x_i}M$ $(1\leq i\leq n)$ に対して

$$\sum_{i,j=1}^n\alpha(x_i,x_j)(v_i,v_j)\geq 0,\quad \alpha(x_i,x_j)(v_i,v_j)=\alpha(x_j,x_i)(v_j,v_i)$$

が成り立つ.

(b) 各 $n\geq 1$，$x=(x_1,\ldots,x_n)\in M^n$ および $f\in C^2(M^n)$ に対して, 一様収束極限 $A^{(n)}f(x)=\lim_{h\to 0}(1/h)(E[f(X_hx_1,\ldots,X_hx_n)]-f(x))$ が存在，すなわち， n-点過程の生成作用素の定義域は $C^2(M^n)$ を含み，

$$A^{(n)}f(x)=\sum_{i=1}^nA_if(x)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i\neq j}^n\alpha(x_i,x_j)(d_id_jf)(x)$$

が成り立つ．

上において $A=A^{(1)}$ は $f\in C^2(M)$ に対して $Af=(A^{(0)}+\beta)f$ で定義される2階の楕円型偏微分作用素である．ただし，$A^{(0)}f(x)$ は局所座標 $x=(u^1,\ldots,u^m)$, $y=(v^1,\ldots,v^m)$ を用いて以下で与えられる．

$$A^{(0)}f(x) = \frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{m} \alpha^{pq}(x) f_{pq}(x) + \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m}\left(\sum_{p=1}^{m} \frac{\partial}{\partial v^p}\alpha^{pq}(x,y)\Big|_{y=x}\right) f_q(x)$$

$$\alpha^{pq}(x) = \alpha^{pq}(x,x) = \alpha(du^p, dv^q).$$

(2) $\alpha\,;\, M^2 \ni (x,y) \to \alpha(x,y) \in T_xM \otimes T_yM$ を各変数に対して C^∞ で上述の (1) の (a) を満たすとし，$\beta \in \mathscr{X}(M)$ とする．このとき，$\mathrm{Diff}(M)$ の Brown 運動で，(1) の (b) を α と β に対して成立させるものが分布の意味でただ一つ存在する． □

以上により，RDS の連続時間版の存在が理論的に保証されたことになる．以下では，$\mathrm{Diff}(M)$ の Brown 運動を離散時間の RDS の極限として構成する方法と確率微分方程式を用いて構成する方法について紹介しておこう．定理 10 によって，大雑把な言い方ではあるが，定理中出現した概念の組 (α, β)，組 $(A, .\alpha)$，組 $(A^{(1)}, A^{(2)})$ を定めることは同等であることがわかる．したがって，$\mathrm{Diff}(M)$ の Brown 運動は 2 点過程によって決定される．

定理 10 の組 (A, α) と $f,\, g \in C^\infty(M)$ に対して $\langle f, g\rangle_{x,y} = \alpha(x,y)(df, dg)$ と定義すると次を示すことができる．

(1) $\langle f, g\rangle_{x,y} = \langle g, f\rangle_{y,x}$ が任意の $f,\, g \in C^\infty(M)$ と $x,\, y \in M$ に対して成立する．

(2) $\langle fg, h\rangle_{x,y} = f(x)\langle g, h\rangle_{x,y} + g(x)\langle f, h\rangle_{x,y}$ が任意の $f,\, g,\, h \in C^\infty(M)$ と $x,\, y \in M$ 対して成立する．

(3) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \langle f_i, f_j\rangle_{x_i, x_j} \geq 0$ が任意の $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots f_n \in C^\infty(M)$ と $x_1 \ldots, x_n \in M$ に対して成立する．

(4) $\langle f, g\rangle_{x,x} = A(fg)(x) - f(x)(Ag)(x) - g(x)(Af)(x)$ が任意の $f,\, g \in C^\infty(M)$ と $x \in M$ に対して成立する．

逆に，組 $(A, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\cdot,\cdot})$ は組 (A, α) を決定する．$(A, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\cdot,\cdot})$ を局所特性系 (L.C. 系) という ([17] 参照)．L.C. 系の例を挙げておこう．

例 11: $(U, \mathscr{U}, \nu)$ を有限測度空間とし，$\Phi_\cdot : U \to \mathscr{X}(M)$ は $\mathscr{X}(M)$-値可測関数で次の (a), (b) を満たすとする．

(a) Ψ_u の $(x, u) \in M \times U$ に関するすべての階の微分が有界．

(b) $\displaystyle\int_U \Phi_u\, \nu(du) = 0.$

以上の準備の下で

$$A = \frac{1}{2}\int_U \Phi_u^2\, \nu(du).$$

$$\langle f, g\rangle_{x,y} = \int_U \Phi_u f(x) \Phi_u g(y)\, \nu(du)$$

と定義すると，$(A, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\cdot,\cdot})$ は L.C. 系となる． □

例 12： C^∞ ベクトル場 $V_0, V_1, \ldots, V_r \in \mathscr{X}(M)$ として，$f, g \in C^\infty(M), x, y \in M$ に対して

$$Lf = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} V_i^2 f + V_0 f,$$

$$[f,g]_{x,y} = \sum_{i=1}^{r}(V_i)f(x)(V_i g)(y)$$

とおけば，$(L, [\cdot,\cdot]_{\cdot,\cdot})$ は L.C. 系となる． □

例 11 を用いて離散時間 RDS の極限として $\mathrm{Diff}(M)$ の Brown 運動を構成することができる．$\{\tau_u^t : t \in \mathbb{R}\}$ をバクトル場 Φ_u が定める連続時間力学系 (流れ) としよう．U-値 独立同分布確率変数列 $\{\xi_n\}$ は共通の分布 ν にしたがうとする．このとき，n に依存した時間のスケールをともなった RDS の列 X_t^n を

$$X_t^n = \begin{cases} \mathrm{Id}_M, & (0 \le t < 1/n) \\ \tau_{\xi_k}^{1/\sqrt{n}} \circ \cdots \circ \tau_{\xi_1}^{1/\sqrt{n}}, & (k/n \le t < (k+1)/n,\ k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

で定義すると以下の結果が成り立つことが知れれている．

定理 13(Matsumoto-Shigekawa [18]) X_t^n が $D([0,\infty); \mathrm{Diff}(M))$ に誘導する分布は例 11 で与えた $(A, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\cdot,\cdot})$ を L.C. 系とする $\mathrm{Diff}(M)$ の Brown 運動の分布に弱収束する．ここで，$D([0,\infty); \mathrm{Diff}(M))$ は $\mathrm{Diff}(M)$ に値をとる右連続かつ左極限をもつ道の空間を表す． □

[18] では定理 13 の他に流れの族 $\{\tau_u^t : t \in \mathbb{R}\}$ をランダムな時間に乗り換えながら運動を続ける場合も扱っている．いずれも飛躍を許した確率流に関するものである．飛躍をもつ確率流については例えば Fujiwara-Kunita [10] を参照されたい．

次に例 12 の L.C. 系が有限次元の確率微分方程式が定める確率流として与えられる $\mathrm{Diff}(M)$ の Brown 運動に対応していることを見ておこう．紙面の関係で多様体上の確率微分方程式については Ikeda-Watanabe [12] を見ていただくこととして，ここでは事実だけを述べるにとどめる．$r \in \mathbb{N}$, とし，$W^r = C([0,\infty), 0; \mathbb{R}^r, 0)$ を原点を出発する $\mathbb{R}^r$ の連続な道の全体とする．P^W で W^r 上の Wiener 測度，すなわち，P^W によって $w = (w^1, \cdots, w^r) \in W^r$ が r-次元 Brown 運動として観測されている．例 14 のようにコンパクト Riemann 多様体 M 上の C^∞-ベクトル場 $V_0, V_1, \ldots, V_r \in \mathscr{X}(M)$ をとり，確率微分方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} dX_t = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} V_i(X_t) \circ dw_t^i + V_0(X_t)\,dt, \\ X_0 = x \in M \end{cases}$$

を考える．ここで，$(*)$ の意味は，M に値をとる確率過程 $\{X_t\}$ が任意の $f \in C^\infty(M)$

と $t \geq 0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
f(X_t) - f(x) =& \sum_{i=1}^{r} \int_0^t (V_i f)(X_s) \circ dw_t^i + \int_0^t (V_0 f)(X_s)\, ds, \\
=& \sum_{i=1}^{r} \int_0^t (V_i f)(X_s)\, dw_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \int_0^t (V_i^2 f)(X_s)\, ds + \int_0^t (V_0 f)(X_s)\, ds \\
=& \sum_{i=1}^{r} \int_0^t (V_i f)(X_s)\, dw_t^i + \int_0^t (Lf)(X_s)\, ds,
\end{aligned}
$$

を満たしているという意味である．上式左辺 1 行目，2 行目の和記号内はそれぞれ Fisk-Stratonovich の確率積分，Itô の確率積分とよばれるものである．$(*)$ は強解という非常に良い性質もった解をもつばかりでなく，例 14 を L.C. 系とする Diff(M) の Brown 運動を定める．確率流の定式化には [9] のように埋め込み定理を用いて Euclid 空間に埋め込んで確率微分方程式を考える手法もある．[6, ?, 8] はその延長上にあるといえよう．

離散時間の場合に [29] の結果のランダム版を得るために歪積変換の方法が有効であったが，Diff(M) の Brown 運動の場合も同様であることを垣間見ておこう．ノイズの空間 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ としては Wiener 空間 $(W^r, \mathscr{B}(W^r), P^W)$ をとることにする．$s \geq 0$ に対して $\theta_s : W^r \to W^r$ を

$$
(\theta_s w)_t = w_{t+s} - w_s \qquad (t \geq 0)
$$

と定義すると，θ_s は P^W を保存し，$\theta_s w$ も P^W で観測すると r-次元 Brown 運動になっており，$X_{t+s}(w) = X_t(\theta_s w) \circ X_s(w)$ が成り立つ．したがって，μ を拡散過程 $\{X_t\}$ の不変確率測度とすると

$$
T^t(x, w) = (X_t(w)x, \theta_t w) \qquad (x, w) \in M \times W^r
$$

なる $\mu \times P^W$ を保存する歪積変換の 1 係数半群が定まるという状況になっている．したがって，[29] で述べられている連続時間力学系に関する乗法的エルゴード定理のランダム版を導くことができるのである．

最後にランダム力学系の研究はいつごろから始まったのか考えてみたいと思う．40 年ほど前，著者がランダム力学系やランダム摂動に興味をもったころに最も影響を受けた文献としては Khasminskii [14](1980 英語版) と Freidlin-Wentzell [11](1984) を挙げることができる．その中で Pontryagin 等による [28](1933) の先駆的な仕事があることが述べられていたが，原著はロシア語で書かれており，当時は適当な英訳を見つけることもできず読まずじまいになっていた．ところが，今回の講演準備のため久しぶりに文献探しを試みたところ，[28] の英訳が F. Moss と P. V. E. McClintock 編集の Niose in Nonlinear Dynamical Systems 全 3 巻の第 1 巻 (1989) の Appendix として掲載されていることがわかった．[28] ではランダム力学系にあたる言葉は出て来ないようである．むしろ，常微分方程式で決定される古典力学系は，もはや実際の力学系ではなく，ランダムな雑音や衝撃を前提にした系を力学系として扱って

いるということを読んでとることができる．ベクトル場がランダムに変化する設定で時間と空間のスケーリング極限により，系を記述する密度関数を導くことや，ランダムな系 ([28] の意味では現実的な力学系) の Lyapunov 安定性などが論じられていることは特筆しておくべきであると思う．最初のランダム力学系の研究がいつ頃なのかはわからないままであるが，Kolmogorov による測度論的確率論の定式化が世に出て間もない 1933 年の時点で既に現代のランダム力学系研究に連なる極めて重要な論文が発表されていたことは驚きである．本ノートの読者の方々には是非この機会にご一読されることをお勧めする．

参考文献

[1] L. Arnold, Random dynamical systems, Springer 2003

[2] I. Bailluel, S. Riedel, and M. Scheutzow, Random dynamical systems, rough paths and rough flows J. differential equations, **262** (2017) 5792–5823

[3] P. H. Baxendale, Brownian motions in diffeomorphism groups I, Compositio Math. **53** (1984) 19–50

[4] P. H. Baxendale, Asymptotic behavior of stochastic flows of diffeomorphisms: two cases studies, Probab. Th. Rel. Fields **73** (1986) 51–85

[5] P. H. Baxendale and D. W. Stroock, Large deviations and stochastic flows of diffeomorphisms, Probab. Th. Rel. Fields **80** (1988) 169–215

[6] A. P. Carverhill, A formula for the Lyapunov numbers of a stochastic flow. Application to a perturbation theorem Stochastics **14** (1985) 209–26

[7] A. P. Carverhill, Flows of stochastic dynamical systems: ergodic theory Stochastics **14** (1985) 273–317

[8] A. P. Carverhill, Nonrandom Lyapunov spectrum nonlinear stochastic dynamical syems Stochastics **17** (1986) 253–287

[9] A. P. Carverhill and K. D. Elworthy, Flows of stochastic dynamical systems: the functional theoretic approach, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. verw. Gebiete, 65 (1983) 245–265

[10] T. Fujiwara and H. Kunita, Stochastic differential equations of jump type and Lévy processes in diffeomorphisms group, J. Math. Kyoto Univ. **25** (1985) 71–106

[11] M. I. Freidlin and A. D. Wentzell, Random perturbation of dynamical systems, Grundlehren der math. Wissenschaften **260** Springer Third edition 2012, Second edition 1998, First edition 1984

[12] N. Ikeda and S. Watanabe, Stochastic differential equations and diffusion processes, second edition, North Holand/Kodansha 1989

[13] S. Kakutani, Random ergodic theorem and Markoff processes with a stable distribution, Proc. 2nd. Berkeley Symp. (1957) 247–261

[14] R. Z. Khasminskii, Stochastic stability of differential equations, Stochastic Modelling and Applied Probability **66** Second edition Springer 2012, Russian edition 1969, English translation 1980

[15] Yu. Kifer, Ergodic theory of random transformations, Progress in Prob. and Statist. **10** Birkhäuger 1986

[16] F. Ledrappier, Some properties of absolutely continuous invariant measures on an interval, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **1** (1981) 77–93

[17] Y. Le Jan and S. Watanabe, Stochastic flow of diffeomorphisms, Proc. Taniguchi Inter. Symp. on Stochastic Analysis, Katata and Kyoto ed. K. Itô Kinokuniya 1984

[18] H. Matsumoto and I. Shigekawa, Limit theorems for stochastic flows of diffeomorphisms of jump type, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **69** (1985) 507–540

[19] T. Morita, Random iteration of one-dimentional transformations, Osaka J. Math. **22** (1985) 489–518

[20] T. Morita, A local stable manifold theorem for random dynamical systems, 数理解析研究所講究録 **574** (1985) 101–113

[21] T. Morita, A local stable manifold theorem for random dynamical systems, Dynamical systems and nonlinear oscillations, World Sci. Adv. Ser. Dynam. Systems **1** (1986) 157–169

[22] T. Morita, Deterministic version lemmas in ergodic theory of random dynamical systems, Hiroshima Math. J. **18** (1988) 15–29

[23] T. Ohno, Asymptotic behavior of dynamical system with random parameters, Publ. RIMS Kyoto Univ.**19** (1983) 83–98

[24] V. I Oseledec, A Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers, , Trans. Moscow Math. Soc., **19** (1968) 197–221

[25] Ya. B. Pesin, Lyapunov characteristic exponents and ergodic properties of smooth dynamical systems with an invariant measure, Soviet Math. Dokl., **17** (1976) 196–199

[26] Ya. B. Pesin, Invariant manifold families which correspond to non vanishing characteristic exponents, Math. USSR Izvestija, **10** (1976) 1261–1305

[27] Ya. B. Pesin, Lyapunov characteristic exponents and smooth ergodic theory, Russian. Math. Surveys, **32** (1977) 55–114

[28] L. S. Pontryagin, A. A. Andronov, and A. A. Vott, Statistical treatment of dynamical systems, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **3** (1933) 165–180, English translation in Appendix of vol.1 of Niose in Nonlinear Dynamical Systems edited by F. Moss and P. V. E. McClintock

[29] D. Ruelle, Ergodic theory of differentiable dynamical systems, Publ. IHES **50** (1979) 27–58

[30] D. Ruelle, Characteristic exponents and invariant manifolds in Hilbert space, Ann. Math. **115** (1982) 243–290