

大規模時系列データからの結合写像系の構成 とランダム力学系解析

佐藤譲*

(北海道大学 電子科学研究所 / 理学研究院数学部門,
London Mathematical Laboratory)

Yuzuru Sato

(RIES / Department of Mathematics, Hokkaido University,
London Mathematical Laboratory)

1 時系列データからの結合ランダム写像系の構成

埋め込み定理に依拠した時系列データからの動力学構造の抽出 [1] は, 多くの場合, 注目しているダイナミクスが実行的に低次元である場合のみ成功する. 一般に大自由度力学系の時系列データから背後にある高次元の動力学を抽出することは困難である. この論文では大自由度系の時系列データから結合写像系を構成することに成功した稀な例 [2] を紹介する. ここで得られるモデルは現象論方程式と実観測データを入力する大規模計算モデルの間に位置する扱いやすい力学系モデルとなる.

中緯度帯の高度 10km 付近の上空は赤道側の温暖な気団と極域側の寒冷な気団の2つの気団から構成されている. この二つの気団は偏西風流の付近で分断されているが, ときに気団の一部が赤道側あるいは極域側に大きく張り出したまま, 数週間スケールで停滞し, 熱波, 寒波, 異常降水などを生じさせる. これをブロッキング現象という. 局所的に発生した渦に偏西風がブロックされて迂回するといった現

*ysato@math.sci.hokudai.ac.jp

象が一因とされるが、詳細な発生メカニズムはわかっていない。ブロッキング現象の予測は気象予測、とくに異常気象の予測にとって重要であり、その異常統計性の極値統計解析 [3] など、様々な研究がなされている。

公開されている大規模気象データ [4] から中緯度ジェット気流の流速が最も速い地点の緯度を抽出し、これを寒気団と暖気団の境界をなすジェット気流の緯度であると仮定する。得られたデータは極を中心に一周する閉曲線となる。この閉曲線を経度によって 360 ユニットに空間的に分割し、偏西風流の平均緯度を原点にとって相対緯度を日毎に並べると、約 40 年分の観測データから 360 次元の長さ $N \simeq 14400$ の離散時系列データ $\{x_n^{(i)}\}_{i=1,\dots,360,n=1,\dots,N}$ が得られる。この時系列データから抽出される結合写像系により、ブロッキング現象を引き起こす中緯度ジェット気流のミニマルモデルを構成しよう。このモデルは現象論方程式と実観測データを入力した大規模シミュレーションモデルの間に位置する扱いやすい力学系モデルとなる。

局所的な時系列データ $\{x_n^{(i)}\}_n$ に着目して構成した一次元のプロファイルと平均リターンプロット¹は、全ての $x^{(i)}$ について概ね同じ構造となった。プロファイルはバイアスはあるが概ねガウシアン的であり、リターンプロットをみると原点 (偏西風流の平均緯度) は安定である (図 1)。

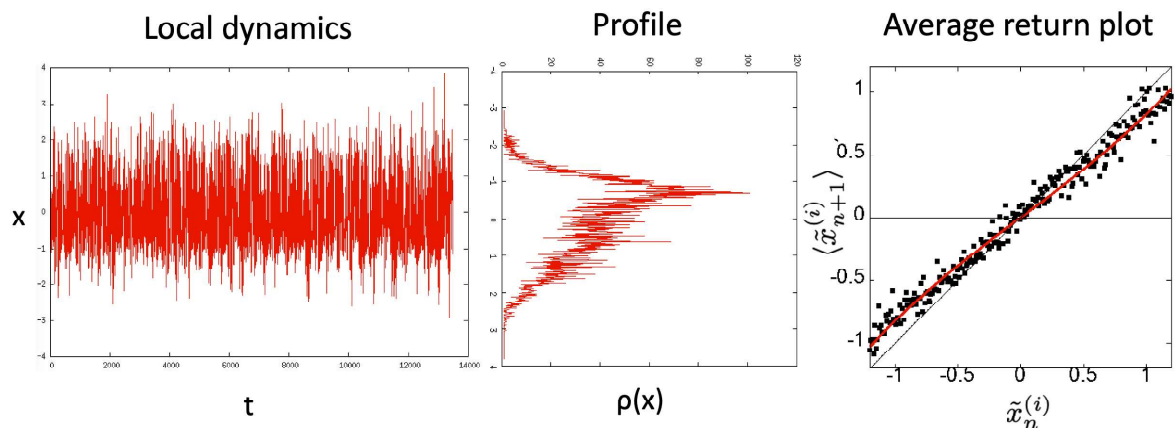


図 1: 局所ダイナミクス $\{x_n^{(i)}\}$ の時系列 (左), プロファイル (中央), および原点付近の平均リターンプロット (右).

¹状態空間 x を区切った有限メッシュ $\Delta_m = [x(m), x(m+1)]$ の中央点を \tilde{x} とする。時刻 n で Δ_m 内に x_{n-1} があった場合に時刻 $n+1$ で x がとる値の平均値を $\langle \tilde{x}_{n+1} \rangle$ とし、 $(\tilde{x}_n, \langle \tilde{x}_{n+1} \rangle)$ を描いたリターンプロットを平均リターンプロットという。

これを外乱を含む線形ランダム力学系としてモデル化すると,

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \mu)x_n^{(i)} + \sigma\xi_n, \quad (0 < \mu < 1, \xi_n \sim N(0, 1)) \quad (1)$$

(σ は分散) で表されるガウシアンを定常解に持つ線形 Langevin 系となる. 以上によりジェット気流の局所的な位置変化はガウス過程的なランダム運動であるという結論を得る. この結果は既存の報告に一致するが, 我々の目的にはそぐわない. リターンプロットをよくみるとデータに外れ値が存在する. 我々はむしろこの外れ値, すなわちブロッキング現象のダイナミクスに興味がある. ここで, ジェット気流が赤道や極まで到達することはなく, 中緯度帯の南北に位置するある境界に達すると反射的に押し戻される, という境界条件を考慮して線形な反射壁を考える. 外れ値を含めたリターンプロットに基づいて, 外乱と反射壁を考慮した力学系モデルは $x_{n+1}^{(i)} = f^{(i)}(x_n^{(i)}) + \sigma\xi_n^{(i)}$ は以下のように構成できる.

$$f^{(i)}(x) = \begin{cases} -\frac{A(A+x)}{A-c} + r^{(i)}, & x < -c, \\ \sinh(\beta x) + r^{(i)}, & -c \leq x \leq c, \\ \frac{A(A-x)}{A-c} + r^{(i)}, & c < x, \end{cases} \quad (2)$$

$$\beta = 0.75, \quad A = 3, \quad c = \sinh^{-1}(A)/\beta \simeq 2.4246.$$

$$r^{(i)} = -0.02, \quad (0 \leq i \leq 161, \quad 239 \leq i \leq 301)$$

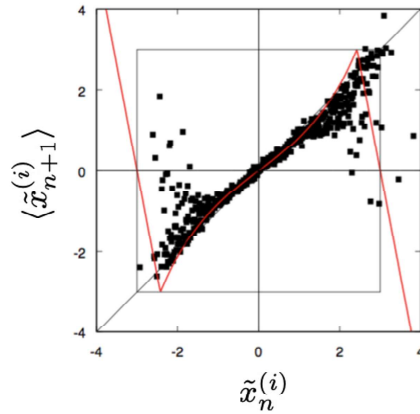


図 2: 局所ダイナミクス $\{x_n^{(i)}\}$ の平均リターンプロット. 外れ値を全て表示し, 反射壁を導入した.

ここで、太平洋と大西洋を除く陸地ではジェット気流が平均的に南側にずれるという観測に基づいて、 $0 \leq i \leq 161$ と $239 \leq i \leq 301$ の場合の $f^{(i)}$ に負のシフト $r^{(i)} = -0.02$ を導入し、写像の安定固定点を原点の左にずらしておく。陸地上の山脈の影響については無視する。

方程式 (2) で与えられる再帰写像は原点が安定で、 $x > 0$, $x < 0$ にそれぞれ対称な不安定カオス集合を持つため、ある程度大きい外乱によって雑音誘因カオスが生じる [5, 6]. つまり外乱が小さいと原点が安定な線形 Langevin 系, 外乱が大きいと左右にある不安定カオス集合に依拠したランダムストレンジアトラクター [7] が生じるカオス的なランダム力学系になっている. 各経度における局所ダイナミクス $\{x^{(i)}\}$ がこのような動力学構造を持っている, と仮定しよう. 偏西風が東向きに流れることから, $x^{(i)}$ から $x^{(i+1)}$ への影響は一方向としてよいだろう. ジェット気流の流速に従う相互作用の係数を ϵ とする. 以上でブロッキング現象を引き起こす中緯度ジェット気流のミニマルモデルとして, 周期境界条件の一方向結合ランダム写像系が得られた [2](方程式 (3), および図 3 を参照.).

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \epsilon)f^{(i)}(x_n^{(i)}) + \epsilon f^{(i-1)}(x_n^{(i-1)}) + \sigma \eta_n^{(i)}, \quad (i = 1, 2, \dots, 360), \quad (3)$$

$$\eta_n^{(i)} = \epsilon \xi_n^{(i-1)} + (1 - \epsilon)\xi_n^{(i)} \sim N(0, 1)$$

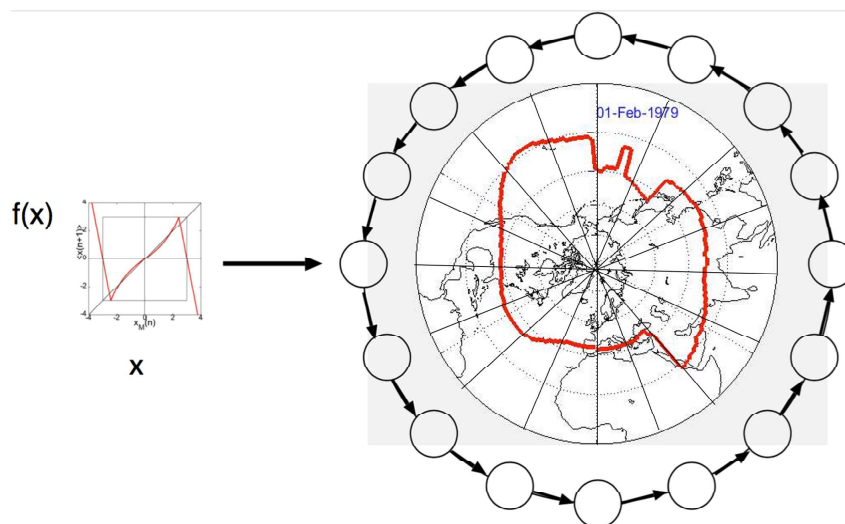


図 3: 中緯度ジェット気流のミニマルモデル

2 結合ランダム写像系の時空ダイナミクスと局所非自励系の確率分岐解析

適当なパラメーターを与えたモデル (3) の生成する時空ダイナミクスは, 例えば時空パターンの特徴的クラスターサイズや, 南北へのブロッキング発生率, といった観測データの統計性を定性的に再現する [2].

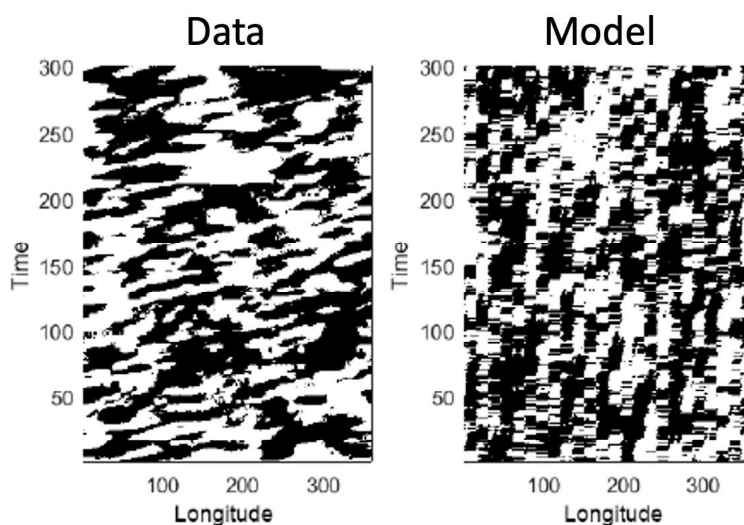


図 4: 観測データ (左) とモデル (右) の時空ダイアグラム.

局所領域, 例えば $x^{(i)}$ だけに着目し, これを一次元の非自励系とみなすと確率分岐解析が可能となる.

$$x_{n+1}^{(i)} \simeq f^{(i)}(x_n^{(i)}) + p_n^{(i)},$$

$$p_n^{(i)} = \epsilon [f^{(i-1)}(x_n^{(i-1)}) - f^{(i)}(x_n^{(i)})] + \sigma \eta_n^{(i)} \simeq \nu_n^{(i)} \in [-\kappa, \kappa] \quad (4)$$

ここでは他の全ての変数 $x^{(j)}$ ($j = 1, \dots, 360, j \neq i$) のダイナミクスの影響が $x^{(i)}$ に一様ランダム外力 $\nu_n^{(i)} \in [-\kappa, \kappa]$ として $x_n^{(i)}$ に与えられ, さらに $x^{(i)}$ が $x^{(i+1)}$ に与えた影響はモデルのリング構造を一周する間に無視できる小ささになると仮定したが, この二つの近似の結果得られる分岐構造は, 大域的なダイナミクスを射影して得られる局所ダイナミクスの分岐構造と定性的に一致した.

一方で観測データのダイナミクスは図 5 の赤矢印付近 ($\kappa \simeq 0.2$) のダイナミクス, すなわちランダム力学系で普遍的に存在する半カオス状態 (partially chaotic

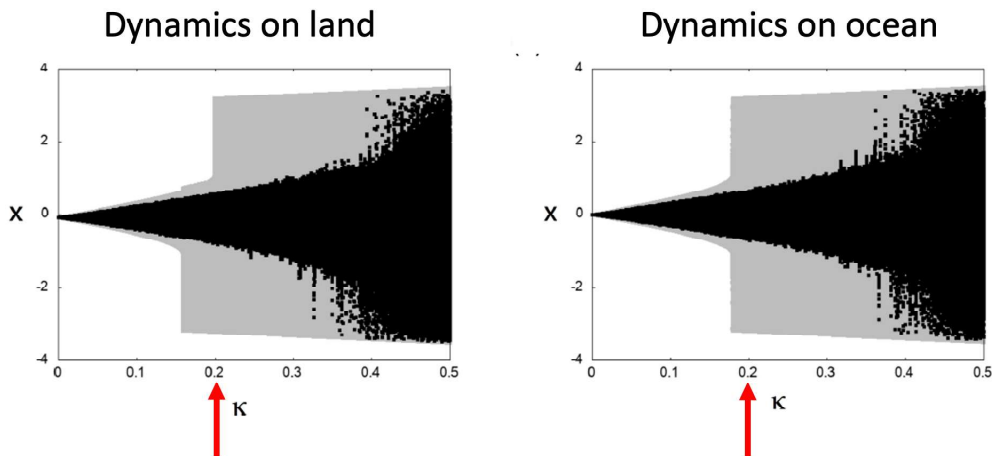


図 5:

state)[6], と同様の性質を示す. このパラメーター領域のダイナミクスは Lyapunov 指数が負で, 定常状態では決定論極限における安定固定点付近でゆらいでいるが, 大きな摂動を受けると左右の不安定カオス領域に遷移し, ある程度の期間そこに滞在する, という性質を持つ. 以上からブロッキング現象の出現は, ジェット気流のダイナミクスを局所非自励系近似した系の半カオス状態におけるカオス領域への escape と関連することが予想される. 一般にランダム力学系の確率分岐解析は流体・気象現象のような大自由度力学系の局所非自励系近似に有効であることが知られている [8]. こういった気象現象の解析においては, 局所非自励系近似が現実の問題の扱いに即した自然な枠組みになっている. 多くの問題において, 我々は例えば太平洋上で生じた気象現象にはそれほど興味がなく, 人口が密集した特定地域の気象現象に興味がある. このため興味のある現象を大域ダイナミクスから影響を受ける局所的な非自励系のダイナミクスとみなした解析が自然な方針となるのである.

3 結び

この論文では大自由度の時系列データから結合ランダム写像系を構成し, ランダム力学系解析を行った. 得られたモデルは現象論方程式と実観測データを入力する大規模計算モデルの間に位置する扱いやすい力学系モデルとなった. 局所非自励

系近似は気象現象の解析に即した枠組みとなっており、得られた非自励系の確率分岐解析も有効であった。

著者の経験に基づく私見であるが、ランダム力学系モデリングは決定論力学系モデリングよりも柔軟で使いやすい方法であるように思える。これも確率変数を力学系理論に導入した利点なのではないだろうか。数理解析が複雑化してしまう場合が多々あるが、モデリング自体の自由度は上がっており、この結果様々な非線形現象に適用できる手法になると思われる。

参考文献

- [1] Norman H Packard, James P Crutchfield, J Doyne Farmer, and Robert S Shaw. Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 45(9):712, 1980.
- [2] Davide Faranda, Yuzuru Sato, Gabriele Messori, Nicholas R Moloney, and Pascal Yiou. Minimal dynamical systems model of the northern hemisphere jet stream via embedding of climate data. *Earth System Dynamics*, 10(3):555–567, 2019.
- [3] Davide Faranda, Giacomo Masato, Nicholas Moloney, Yuzuru Sato, Francois Daviaud, Bérengère Dubrulle, and Pascal Yiou. The switching between zonal and blocked mid-latitude atmospheric circulation: a dynamical system perspective. *Climate Dynamics*, 47:1587–1599, 2016.
- [4] <https://www.meteociel.fr>.
- [5] Gottfried Mayer-Kress and Hermann Haken. The influence of noise on the logistic model. *Journal of Statistical Physics*, 26(1):149–171, 1981.
- [6] Yuzuru Sato, Thai Son Doan, Jeroen S.W. Lamb, and Martin Rasmussen. Dynamical characterization of stochastic bifurcations in a random logistic map. *arXiv:1811.03994v1*, 2018.
- [7] Mickaël D Chekroun, Eric Simonnet, and Michael Ghil. Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(21):1685–1700, 2011.

- [8] Davide Faranda, Yuzuru Sato, Brice Saint-Michel, Cecile Wiertel, Vincent Padilla, Bérengère Dubrulle, and François Daviaud. Stochastic chaos in a turbulent swirling flow. *Physical review letters*, 119(1):014502, 2017.