（ランダム）力学系における Pomeau–Manneville 型間欠性

東海大学 理学部数学科

中野雄史 *

概要

乱流発生の過程における間欠性（intermittency）の研究の中で，Pomeau と Manneville はその像が区間全体となる枝たちからなる 1 次元区分写像であって，区間の端で中立不動点を持ちその外では一様拡大的となっているもの（Pomeau–Manneville 写像）を考えた．間欠性を説明する力学系モデルは多々あるが（e.g. クライシス誘起，大自由度系，ヘテロクリニック・ネットワーク），この単純なモデルは多くの重要な数学的結果を産んだ．さらに，Pomeau–Manneville 写像は間欠性の文脈を超えて数学者の関心を引き，例えば非一様双曲力学系や無限エルゴード理論の研究において重要な役割を果たした．本稿ではまず Pomeau–Manneville 写像の数学的結果の発展をレビューし，特に他の間欠性モデルでは見られない極限定理（Darling–Kac 則，逆正弦則）を紹介する．次にこれらの Pomeau–Manneville 写像の特徴と，（決定論的な）中立不動点を持たない間欠型ランダム区分写像の性質の比較を試みる．最後に，これと関連した "コア" を持つランダム力学系のクラスの逆正弦則（中村文彦氏，豊川永喜氏，矢野孝次氏との共同研究）について報告する．

1　間欠性

間欠性は，層流状態（laminar phase; 擬似的な安定状態）の中に乱流状態（burst phase; カオス的な状態）が不規則に出現する現象である，と説明される（cf. [7, 25]）．これは現象的な説明であって，その原因となる力学系的なメカニズム，およびその統計的性質は一通りではないことが知られている．実際，間欠性が観測されている有名な（区間）力学系として次が知られている：

- $f(x) = x + x^3 \mod 1$（Pomeau–Manneville 型）
- $f(x) = x^2 - 1.749999$（クライシス誘起型）

両者は軌道としては類似の特徴を持つように見えるが（図 1），後で見るようにその統計には著しい違いがあり，例えば前者には絶対連続不変確率測度が存在せず，後者には存在する（と期待される）といった違いがある．本稿では特に Pomeau–Manneville 型間欠性に焦点を当てて解説するが，その他の間欠性については例えば，[13]（クライシス誘起型），[25]（大自由度系），[26]（ヘテロクリニック・ネットワーク）などを参照されたい．Pomeau–Manneville 型間欠性の（特に数理物理的な）背景・基本的性質については，Pomeau らによる教科書 [7] を参照されたい．

* Email: yushi.nakano@tsc.u-tokai.ac.jp

(a)

(b)

図 1　(a) Pomeau–Manneville 型（f: 例 2.11）; (b) クライシス誘起型（$f = g^3$, $g(x) = x^2 - 1.749999$）

1.1　Gharaei–Homburg の意味での間欠性

間欠性はその日常語としての側面から数学的定義が難しく，現時点では科学者間で完全に合意が得られた定義があるとは言いがたい．むしろ，数学的にきちんと定義しようとする試み自体がほとんど存在していないのではないかと（少なくとも報告者には）思われる[*1]．唯一の例外が次の Gharaei–Homburg [10] による間欠性の定義（の拡張）であり，本稿の内容といくつか重なりがあるので，これを紹介したい．

定義 1.1. 距離空間 X からなる確率空間 $(X, \mathcal{B}(X), m)$ について，その上の非特異写像 $f : X \to X$（つまり，m-零集合の逆像がつねに m-零集合となるような写像）が **Gharaei–Homburg の意味で間欠性を持つ**とは，有限集合 $L \subset X$ が存在して，m-a.e. $x \in X$ と任意の十分小さい L の近傍 U に対して

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{1 \le j \le n : f^n(x) \in U\}}{n} = 1$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \#\{1 \le j \le n : f^n(x) \notin U\} = \infty$

となることを言う．

注意 1.2. Gharaei と Homburg によれば，この定義は先述の Pomeau たちの教科書を参考にしているとのことであり，特に Pomeau–Manneville 型間欠性を意識した定義である（3.1 節参照）．その上で，彼らはこの定義を “オン・オフ間欠性” と呼んでいる．一方で，元々"オン・オフ間欠性"という用語は（結合写像格子系での間欠性のように）大自由度系における余次元の大きい不安定集合を原因とする間欠性を指すことが多いようで (cf. [25])，この用語法はあまり適切ではないように思われる．そのため，ここでは単に “Gharaei–Homburg の意味での間欠性” と呼ぶことにした．

注意 1.3. Gharaei と Homburg はランダム力学系の間欠性に関する論文の中でこの用語を定義しており，その中では次の意味でのみ間欠性が定義されていることを注意しておく：区間 $[0, 1]$ 上の同相写像 f_0, f_1 の

[*1] 情報をお持ちの方がいらっしゃたら，ぜひ中野までご連絡ください．

等確率選択からなるランダム力学系 $(n,\omega,x)\mapsto f^n_\omega(x):\mathbb{N}_0\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}\times[0,1]\to[0,1]$（3.1 節参照）が間欠性を持つとは，任意の $x\in(0,1)$, a.e. $\omega\in\{0,1\}^{\mathbb{N}_0}$ および任意の 0 の十分小さい近傍 U について，$\frac{\#\{1\le j\le n\,:\,f^n_\omega(x)\in U\}}{n}\to 1$ かつ $\#\{1\le j\le n\,:\,f^n_\omega(x)\notin U\}\to\infty\ (n\to\infty)$ となることを言う．

おそらく，Gharaei–Homburg の定義に対しては（少なくとも）次の 2 つの批判が考えられると思われる．

- (1) は強すぎる要求である：現象として観察されている間欠性においては，“$=1$” は成立しておらず，代わりに “$>p$ for some $p\in(0,1)$ close to 1” が成立してことが度々であるように思われる．実際，後に見るように，Pomeau–Manneville 写像ですら中立不動点の次数が小さいときは “$=1$” が満たされない．
- (1), (2) は弱すぎる要求である：**historic behavior** と呼ばれる，時間平均が振動するような軌道が豊富に存在していることが知られている（cf. [18]）．この軌道は例えば曲面上の微分同相写像 $f:X\to X$ であって，2 つのサドル p_0,p_1 とそれらを結ぶヘテロクリニック・コネクションがあるようなものについて見られる（Bowen の例と呼ばれる）が，この場合，実数 $\lambda_0>\lambda_1$, 開集合 V が存在して，任意の $x\in V$, 任意の p_0,p_1 の近傍 U_0, U_1 に対して， 自然数 N, 単調増加列 $\{n_k\}_{k\ge1}\subset\mathbb{N}_0$ が存在して， (i) $f^n(x)\in U_0$ iff $n\in[n_{2k}+N,n_{2k+1})$, $f^n(x)\in U_1$ iff $n\in[n_{2k+1}+N,n_{2k+2})$, (ii) $\lim_{k\to\infty}\frac{n_{2k+2}-n_{2k}}{\lambda_0^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{n_{2k+3}-n_{2k+1}}{\lambda_1^k}=1$ が成り立つ．(i) から，当然この力学系（を適当な領域に制限したもの）は Gharaei–Homburg の意味での間欠性を満たすと言えるのだが，(ii) の性質は「乱流状態の不規則な出現」の要求を満たしているとは言い難い．

1.2 無限エルゴード理論からの準備

$(X,\mathcal{G},\mu)$ を σ-有限な測度空間（つまり，X は可算分割 $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ を持ち，各 j について $\mu(X_j)<\infty$）とし，$f:X\to X$ をその上の可測写像とする．

定義 1.4.

(1) μ が不変（invariant）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $A\in\mathcal{G}$ について $\mu(f^{-1}A)=\mu(A)$

(2) μ がエルゴード的（ergodic）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $A\in\mathcal{G}$ について

$$f^{-1}A=A\quad\Rightarrow\quad\mu(A)=1\ \text{または}\ 0.$$

(3) μ が保存的（conservative）$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の $A\in\mathcal{G}$ について

$$A\text{: }\mu\text{-遊走的}\quad\Rightarrow\quad\mu(A)=0.$$

ただし A が m-遊走的であるとは，任意の $n_1,n_2\in\mathbb{N}$, $n_1\neq n_2$ について $\mu(f^{-n_1}A\cap f^{-n_2}A)=0$.

エルゴード的な不変確率測度については Poincaré の回帰定理と Birkhoff のエルゴード定理が有名だが，無限測度（つまり，$\mu(X)=\infty$）の場合であっても保存性の下では類似の結果が成り立つことが知られている．具体的には，以下が成り立つ（cf. [3]）．

定理 1.5 (Halmos の回帰定理)**.** μ が保存的な不変測度であるとき，$\mu(A)>0$ となる任意の可測集合 A, μ-*a.e.* $x\in X$ について，

$$\lim_{n\to\infty}\#\{1\le j\le n\,:\,f^j(x)\in A\}=\infty.$$

定理 1.6 (Hopf のエルゴード定理). μ をエルゴード的で不変な無限測度とする．このとき，$\mu(A) < \infty$ を満たす任意の可測集合 A, μ-*a.e.* $x \in X$ について，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{1 \le j \le n \,:\, f^j(x) \in A\}}{n} = 0.$$

これらからすぐに次の Gharaei–Homburg の意味での間欠性の十分条件が得られる．以下では，混乱のない限り，$[0,1]$ 区間上の Lebesgue 測度を Leb と書くことにする．

系 1.7. 可測写像 $f : [0,1] \to [0,1]$ が，Leb に絶対連続なエルゴード的で保存的な不変無限測度 μ を持つとする．さらに，μ は 0 でのみ無限の重みを持つとする（つまり，任意の開集合 U について，$\mu(U) = \infty$ *iff* $0 \in U$）．このとき，Leb-*a.e.* $x \in X$ と任意の十分小さな 0 の近傍 U について，定義 *1.1* の *(1), (2)* が成り立つ．

この意味で，間欠性と無限エルゴード性の間には密接な関係があることがわかる．

2 Pomeau–Manneville 型間欠性

2.1 背景

Pomeau と Manneville は，[24] の中で, 間欠性の背景として Lorenz 系

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X)\\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y\\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned}$$

を（数値計算により）考察した．ここでパラメータは $\sigma = 3, b = 1$ で固定され，r は $r = 166$ 付近で変化させる．この r のパラメータ付近で，典型的な解軌道は周期軌道からカオス軌道へ遷移するが，彼らは，これに並行して，解軌道のある直線への Poincaré 写像（区間力学系）が図 2 のようにサドル・ノード型分岐[*2]を起こすことを発見した．直感的には，分岐後直後 $r > r_0$, $r - r_0 \ll 1$ では軌道は中立不動点の"残骸"付近 U に長時間滞在し（層流状態），その後カオス領域 U^c に短い滞在をした後（乱流状態），また U に戻ってくるため，確かに間欠的な軌道が観測されると予想される．

どの程度 U に滞在するかは，回帰のタイミングで軌道がどの程度中立不動点の残骸に近いか，およびどの程度 r が分岐点から離れているかに依存すると予想されるが，これを詳しく研究するために，Pomeau と Manneville は，分岐点ちょうど $r = r_0$ での図 2 の写像の統計を調べることが重要だと考えたのだと思われる[*3]．

2.2 Pomeau–Manneville 写像

Pomeau と Manneville は，図 2 の写像を数学的に定義した訳ではなかったが，（2.1 節における）彼らの直感的な説明からすれば，かなり抽象的な形で定義された写像が研究の対象になるはずである．実際，Bonanno

[*2] 分岐の種類によって，Pomeau らは彼らの間欠性を type I, II, III と分類した（[7]）．彼らの分類に従うと，この間欠性は type I となる．

[*3] 彼らがこの方針を明記した文章を見つけることはできなかったので（ご存じの方がいらっしゃったら是非ご教授願います），あくまで報告者の予想である．後述の通り，$r = r_0$ の場合の図 2 の写像は無限エルゴード理論の別の文脈ですでにあらわれていたので，全くの的外れである可能性もある．

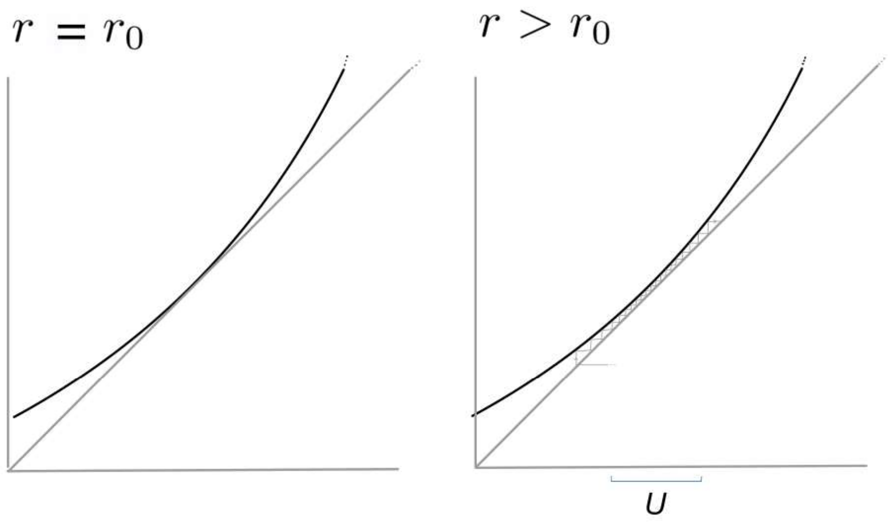

図 2　サドル・ノード分岐直後 $r > r_0$ with $r - r_0 \ll 1$ における軌道の間欠性

と Lenci [8] はこれを次のように説明した.

> Pomeau–Manneville 写像とは，2 つの単調増加で全射的な枝と中立不動点 0 からなる $[0,1]$ 上の区分拡大写像である.

例えば，Pomeau–Manneville 写像の例としてよく挙げられるのが次の写像たちである：

- $f(x) = x + x^{p+1} \mod 1, \quad p > 0$（標準 Pomeau–Manneville 写像）
- $f(x) = \begin{cases} x + 2^p x^{p+1} & (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & (\frac{1}{2} < x \le 1) \end{cases}, \quad p > 0$（Liverani–Saussol–Vaienti 写像; [21]）

これらと類似の写像は（間欠性とは別の，無限エルゴード理論の文脈で）Thaler [30] などによって考えられていたが，彼の議論を見ると，上の特徴付けだけでは無限エルゴード論的な考察を進めることが難しいことがわかる．この（[30] の中で本質的に使われていた）追加条件は Bonanno–Lenci [8] や Zweimüller [37] などによってまとめられているが，これをもって，本稿の Pomeau–Manneville 写像の定義としたい：

定義 2.1. 可測写像 $f : [0,1] \to [0,1]$ が **Pomeau–Manneville 写像**であるとは，$c \in (0,1)$ が存在して，$I_0 := (0,c)$, $I_1 := (c,1)$ に対して, 各 $j = 0,1$ について次が成り立つことを言う.

- $f(I_j) = (0,1)$;
- $f|_{I_j}$ は C^2 級，狭義単調増加な全単射であり，$\overline{I}_j$ へ C^0 拡張可能;
- 0 は中立不動点であり，任意の $\epsilon > 0$ について $\inf_{x>\epsilon} f'(x) > 1$;
- $\kappa > 0$, $p > 0$ が存在して，

$$f(x) = x + \kappa x^{p+1} + o(x^{p+1}) \quad \text{near } x = 0;$$

- $\frac{f''}{(f')^2}$ は $I_0 \cup I_1$ 上で有界 （Adler 条件）.

2.3　基本的性質

定義 2.1 の p は**次数**（ないし指数）と呼ばれ，大変重要な役割を果たす．実際，次の表と定理に見るように，p の値によって f の統計は大きく異なる．

$0 < p \leq \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < p < 1$	$p \geq 1$
期待値・分散 $< \infty$	期待値 $< \infty$, 分散 $= \infty$	期待値・分散 $= \infty$
中心極限定理	一般化中心極限定理	無限エルゴード理論

定理 2.2 ([30])**.** Leb に絶対連続なエルゴード的で保存的な不変測度 μ が存在して，定数倍を除いて一意である[*4]．さらにその密度関数 $h(x)$ は $h(x) \sim \frac{x-0}{x-f(x)} \sim x^{-p}$ を満たす．特に，

- $p \geq 1$ のとき，絶対連続な不変確率測度は存在せず，
- $p < 1$ のとき，絶対連続な不変確率測度が唯一つ存在する．

定理 2.3 ([11,12,27,36])**.** 任意の $p < 1$ と定理 *2.2* の μ に対して，任意の $\mathcal{C}^1$ 級関数 $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ に対して，その相関関数は $n^{\frac{1}{p}-1}$ 次の多項式の速度で 0 に収束する：定数 $C_{\varphi,\psi}$ が存在して，任意の n に対して

$$\left| \int \varphi \circ f^n \cdot \psi \, d\mu - \int \varphi \, d\mu \int \psi \, d\mu \right| \leq C_{\varphi,\psi} n^{\frac{1}{p}-1}$$

さらに，$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ を C^1 級関数として $S_n\varphi := \varphi + \varphi \circ f + \cdots + \varphi \circ f^{n-1}$ とすると，

- $p < \frac{1}{2}$ のとき，$\sigma^2 \geq 0$ が存在して $\frac{S_n\varphi - n\int \varphi \, d\mu}{\sqrt{n}}$ は正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ に分布収束し，
- $p = \frac{1}{2}$, $\varphi(0) \neq \int \varphi \, d\mu$ のとき，$\sigma^2 \geq 0$ が存在して $\frac{S_n\varphi - n\int \varphi \, d\mu}{\sqrt{n \log n}}$ は正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ に分布収束し，
- $p = \frac{1}{2}$, $\varphi(0) = \int \varphi \, d\mu$ のとき，$\sigma^2 \geq 0$ が存在して $\frac{S_n\varphi - n\int \varphi \, d\mu}{\sqrt{n}}$ は正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ に分布収束し，
- $p > \frac{1}{2}$, $\varphi(0) \neq \int \varphi \, d\mu$ のとき，指数 $\frac{1}{p}$ の安定分布 W が存在して，$\frac{S_n\varphi - n\int \varphi \, d\mu}{n^p}$ は W に分布収束し，
- $p > \frac{1}{2}$, $\varphi(0) = \int \varphi \, d\mu$ のとき，$\sigma^2 \geq 0$ が存在して $\frac{S_n\varphi - n\int \varphi \, d\mu}{\sqrt{n}}$ は正規分布 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ に分布収束する．

定理 2.2, 2.3 の証明のアイディア：（第一再帰時間を用いた）I_1 への**誘導変換** を用いる．

- $N(x) := \inf\{n \geq 1 \,:\, f^n(x) \in I_1\}$（第一再帰時間），$F(x) := f^{N(x)}(x)$（誘導変換）とすると，$F$ は（可算無限個の枝を持つものの）一様拡大写像になることがわかる．ゆえに，
  - F は唯一つの絶対連続な不変確率測度 ν を持ち，
  - その相関関数は指数的に減衰し，ゆえに，$\{\Phi \circ \tau^n\}_{n\geq 1}$ は確率空間 (I_1, ν) 上の独立同分布な確率変数列のように振る舞う．
- $\Phi_\varphi(x) := \sum_{j=0}^{N(x)} \varphi \circ f^j(x)$ と定めると，$\{\Phi_\varphi \circ F^n\}_{n\geq 1} \subset \{\varphi \circ f^n\}_{n\geq 1}$ であって一見すると良い性質を持ちそうに見えるが，) Φ_φ の特性関数は p の値によっては高次の漸近展開を持たない（例えば，$p < 1$ のときは $E_\nu[e^{it\Phi_\varphi}] = 1 + itE_\nu[\Phi_\varphi] + \kappa t^{\frac{1}{p}}(1 + o(1))$）．これが一様拡大写像の統計（e.g. 相関関数の指数的減衰，中心極限定理）と大きく異なる部分となる．

注意 2.4. 上で説明した誘導変換（ないしタワー）の方法は，Pomeau–Manneville 写像を超えて，**非一様双曲力学系**で非常に強力な道具として知られている（例えば，Collet–Eckmann 型パラメータに対する二次写像

[*4] δ_0 は任意の $p > 0$ に対してエルゴード的で保存的な不変確率測度である．

族 $f(x)=x^2+c$ のカオス性の証明）．誘導変換自体は Markov–吉田–角谷の時代から知られていたようだが，非一様双曲力学系の研究に有効であることがはっきり認識された背景としては，やはり（Young たちによる）Pomeau–Manneville 写像の研究が大きいように思われる．

2.4 無限エルゴード論的性質

以下では $p>1$（無限測度）の場合の Pomeau–Manneville 写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ を考える[*5]．系 1.7, 定理 2.2 より，f は定数倍を除いて一意的な絶対連続エルゴード的保存的な不変測度 μ が存在して，U が 0 の十分小さい近傍である場合は（$\mu(U^c)<\infty$ なので），Leb についてほとんどすべての x について $\lim_{n\to\infty}\#\{1\le j\le n : f^j(x)\notin U\}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\#\{1\le j\le n : f^j(x)\in U\}}{n}=1$ となる．そこで，自然と次のような疑問が出てくる：

1. n と異なるスケーリング a_n（e.g. $a_n=\sqrt{n}$）について $\frac{\#\{1\le j\le n : f^j(x)\in U\}}{a_n}$ はどのように振る舞うのか？（0 と ∞ 以外に収束するような a_n は存在するのか？）
2. f が 2 つの中立不動点 $0,1$ を持つ場合，$\frac{\#\{1\le j\le n : f^j(x)\in U\}}{n}$ はどのように振る舞うか?

2 については次節で答えることにして，ここでは 1 への Aaronson による回答を与える．

まず，概収束は 1 への回答として適切でないことが知られている．

定理 2.5 ([1])**.** 任意の単調増加列 $(a_n)_{n\ge1}\subset\mathbb{N}$ と任意の 0 の近傍 U について， 次のいずれかが成り立つ：

- $\displaystyle\liminf_{n\to\infty}\frac{\#\{1\le j\le n : f^j(x)\notin U\}}{a_n}=0\quad \mu\text{-a.e. } x$
- $\displaystyle\limsup_{n\to\infty}\frac{\#\{1\le j\le n : f^j(x)\notin U\}}{a_n}=\infty\quad \mu\text{-a.e. } x$

一方で，分布収束においては非自明な $\{a_n\}_{n\ge1}$ が存在し，それは $a_n=n^{\frac{1}{p}}$ であることが知られている．ここで，M_α を正規化された次数 $\alpha\in(0,1)$ の Mittag-Leffler 分布とする（特に， $E[M_\alpha^k]=\frac{k!\Gamma(1+\alpha)^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ であり，$M_{\frac12}=|N(0,1)|$）．

定理 2.6 (Aaronson–Thaler の Darling–Kac 則)**.** 定数 $C>0$ が存在して，任意の $\forall a>0$，任意の確率変数 X であってその分布が μ-絶対連続であるようなものについて，

$$\frac{\#\{1\le j\le n \mid f^j(X)\ge a\}}{n^{\frac{1}{p}}}\to\mu([a,1])\cdot CM_{\frac{1}{p}}\quad (n\to\infty,\ \textit{in distribution})$$

注意 2.7. Aaronson [2] は Darking–Kac [9] の Markov 過程での結果を元に，一般的な無限エルゴード系に対して Darking–Kac 則を証明し，Thaler [31] が Aaronson の定理における仮定を $p>1$ の場合の Pomeau–Manneville 写像が満たすことを確認した（cf. [35]）．

注意 2.8. 証明の鍵となっているのは，**wandering rate** と呼ばれる

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-j}[a_0,1]\right)\sim n^{1-\frac{1}{p}}\quad (\text{with some } 0<a_0<c)$$

*5 Pomeau たちは [7] の中で期待値が無限大になるような分布に従う確率変数列との対比で間欠性の統計を理解すべきであると語っており，その意味では $p>1$ こそが彼らが考えたかった対象となる．

の計算にあり，そのため，Gharaei–Homburg の意味での間欠性の証明（そこでは単に絶対連続エルゴード的保存的な無限不変測度の存在を示せばよかった）より真に追加の議論が必要になることがわかる．

2.5 Thaler 写像

決定論的力学系の無限エルゴード論的間欠性の最後に，Pomeau–Manneville 写像の中立不動点を 2 つにしたモデル（Thaler [33] によって導入された）の結果を述べる．これは $\mathbb{Z}$ 上の単純ランダム・ウォークにおける $+\infty$ と $-\infty$ に対応しており，その意味ではより自然なモデルとなる．

定義 2.9. 可測写像 $f : [0,1] \to [0,1]$ が **Thaler 写像**であるとは，$c \in (0,1)$ が存在して，$I_0 := (0,c)$, $I_1 := (c,1)$ に対して, 各 $j = 0,1$ について次が成り立つことを言う．

- $f(I_j) = (0,1)$;
- $f|_{I_j}$ は C^2 級，狭義単調増加な全単射であり，$\overline{I}_j$ へ C^0 拡張可能;
- $0,1$ は中立不動点であり，任意の $\epsilon > 0$ について $\inf_{\epsilon<x<1-\epsilon} f'(x) > 1$;
- $\kappa > 0$, $p > 0$ が存在して,
$$f(x) = x + \kappa(x-j)^{p+1} + o((x-j)^{p+1}) \quad \text{near } x = j;$$
- $\frac{f''}{(f')^2}$ は $I_0 \cup I_1$ 上で有界 （Adler 条件）．

$L_{\alpha,\beta}$ を次数 $\alpha, \beta \in (0,1)$ を持つ一般化逆正弦分布とする（つまり，$P(L_{\alpha,\beta} \le t) = \frac{1}{\pi\alpha}\mathrm{arccot}\big(\frac{((1-t)/t)^\alpha}{(1-\beta)/\beta} + \cot\pi\alpha\big)$ であり，$E[L_{\alpha,\beta}] = \beta$)．

定理 2.10 (Thaler の Lamperti 型逆正弦則)**.** *定数 β が存在し, 任意の $a > 0$, 任意の確率変数 X であってその分布が絶対連続なものについて*
$$\frac{\#\{1 \le j \le n \mid f^j(X) < a\}}{n} \to L_{\frac{1}{p},\frac{1}{2}} \quad (n \to \infty,\ \mathit{in\ distribution})$$

Thaler [32] は，やはり Lamperti の Markov 過程の文脈での逆正弦則 [19] を下敷きに上の定理を示した．

例 2.11. Liverani–Saussol–Vaienti 写像と類似の構成による Thaler 写像
$$f(x) = \begin{cases} x + 4x^3 & (0 \le x \le \frac{1}{2}) \\ x - 4(1-x)^3 & (\frac{1}{2} < x \le 1) \end{cases}$$
を考える．このとき，定理 2.10 より，任意の絶対連続確率測度 ν, 任意の $a \in (0,1)$, $t \in [0,1]$ について，
$$\nu\left(x \in [0,1] : \frac{\#\{1 \le j \le n \mid f^j(x) < a\}}{n} \le t\right) \to \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}$$

Thaler の結果の後も，力学系の Darling–Kac 則，逆正弦則には（矢野氏，世良氏による貢献 [4,28,29] を含む）様々な発展があった．これらについては，[3,28,35] などを参考にされたい．

3 ランダム力学系における Pomeau–Manneville 型間欠性

本節では，次の意味でのランダム区間力学系を考える．f_0, f_1 を区間 $[0,1]$ 上の可測写像とし，$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ に対して
$$f_\omega^n := f_{\omega_n} \circ f_{\omega_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{\omega_1}$$

と定める．さらに，$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上に $(1-p,p)$-Bernoulli 測度の無限直積測度 $\mathbb{P}$ を考え（$p\in(0,1)$），そのランダム軌道の統計，例えば滞在率 $\frac{\#\{1\le j\le n\,:\,f_\omega^j(x)\in U\}}{n}$ がほとんど確実に $\alpha\in(0,1)$ に収束するかなどを考える．（より一般の）ランダム力学系の基本的性質については，Arnold の教科書 [5] などがある．

3.1 先行研究

ランダム力学系における Pomeau–Manneville 型間欠性の研究は，すでにかなりの数が存在しているが（[6, 16, 17, 20, 34]），どれもランダム合成される写像 f_ω 自体が Pomeau–Manneville 写像（ないし少なくとも中立不動点を持つ）という方向性は共通している．

一方で，f_ω 自体は中立不動点を持たないものの，ランダム軌道としては間欠性を示すような力学系の研究がいくつかある．以下では，簡単のため $p=\frac{1}{2}$ の場合だけを考え，混乱のない限り ω を明記しないこととする (e.g. $P(f=f_0)=P(f=f_1)=\frac{1}{2}$)．

- Hata–Yano 写像 [15]:

$$f_0(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & (x\in[0,\frac{1}{2}))\\ 2x-1 & (x\in[\frac{1}{2},1])\end{cases},\quad f_1(x)=\begin{cases}2x & (x\in[0,\frac{1}{2}))\\ \frac{x+1}{2} & (x\in[\frac{1}{2},1])\end{cases}.$$

- Gharaei–Homburg 写像 [10]: f_0, f_1 は狭義単調増加，微分同相写像（特に $0,1$ が両者の共通不動点）であり，任意の $x\in(0,1)$ について $f_0(x)<x$, $f_1(x)>x$. さらに，

$$f_0'(0)\cdot f_1'(0)=f_0'(1)\cdot f_1'(1)=1 \tag{3.1}$$

図 3 参照.

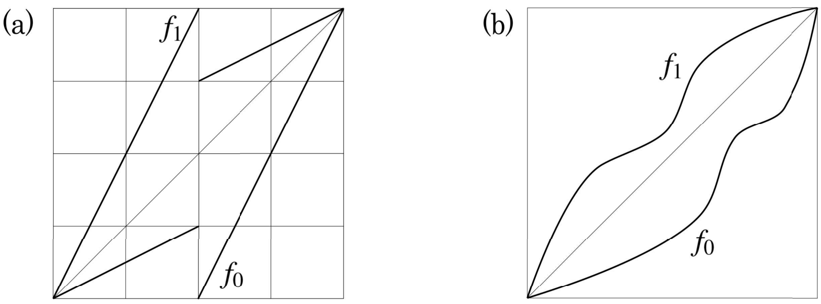

図 3 (a) Hata–Yano 写像; (b) Gharaei–Homburg 写像

(3.1) は平均中立性とでも言うべき性質であり，Hata–Yano 写像はこれを自動的に満たしていることに注意されたい[*6]．秦氏と矢野氏は，上記の彼らの写像についてある種の一般化逆正弦則と Darling–Kac 則を示し（詳しくは次節参照），Gharaei と Homburg は，上記の彼らの写像について注意 1.3 の意味での間欠性を示した．前節で説明した通り，前者の結論は後者の結論より（かなり）強いと考えられるが，一方で後者の写像は前者の写像よりずっと抽象的な定義となっている．実際，[15] の証明の中では f_0, f_1 が共通の Markov 分割を持つことが本質的な役割を果たしているが，多くの Gharaei–Homburg 写像については当然その性質は成り立

[*6] これらは異なる文脈から，独立に導入されたランダム力学系である．

たない．そのため自然な問いとして，[15] をどの程度一般化できるか，特に Gharaei–Homburg 写像にどのような条件を課せば逆正弦則と Darling–Kac 則が成り立つか，が考えられる．

注意 3.1. Hata–Yano 写像・Gharaei–Homburg 写像では，Pomeau–Manneville 写像・Thaler 写像の解析で使われた最も重要な道具である誘導変換が一般には（平均的にですら）一様拡大的でないという著しい違いがあり，これが Hata–Yano 写像・Gharaei–Homburg 写像の解析を非常に困難なものとしている．実際，[10] では Gharaei–Homburg 写像に対して絶対連続で保存的な無限定常測度を見つけ無限エルゴード理論に帰着して間欠性を示している訳ではなく（大雑把に言えばランダム・ウォークへの繊細な近似の議論を用いている），むしろそのような測度がいつ存在するか，という自然かつ基本的な問いについてはほとんど何もわかっていない状態にある．

3.2 コアを持つランダム写像

前節に引き続き，f_0, f_1 の等確率選択 f（i.e. $P(f = f_0) = P(f = f_1) = \frac{1}{2}$）によるランダム力学系を考える．ここで，$f_0, f_1$ は $[0,1]$ 上の可測写像であって，

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in [0,c) \\ g_0(x) & x \in [c, 1-\frac{c}{2}) \\ 2x-1 & x \in [1-\frac{c}{2}, 1] \end{cases}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0,\frac{c}{2}) \\ g_1(x) & x \in [\frac{c}{2}, 1-c) \\ \frac{x+1}{2} & x \in [1-c, 1] \end{cases}$$

となるような可測写像 g_0, g_1 が存在するようなものとする（図 4 参照）．また，このようなランダム力学系を**コアを持つランダム力学系**と呼ぶこととする．

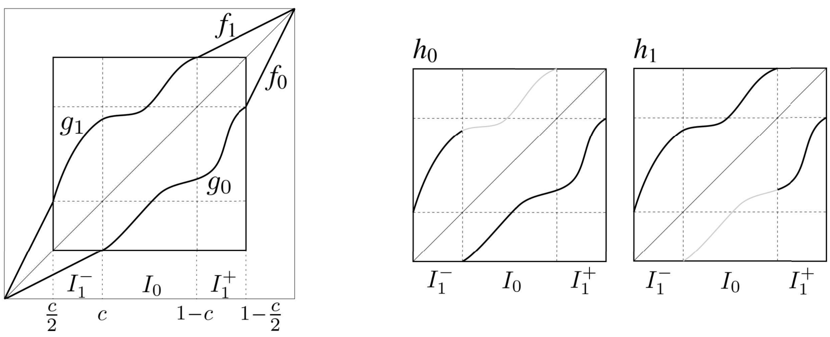

図 4　コアを持つランダム力学系

ここで，$I_1^- \cup I_0 \cup I_1^+$ 上の写像 h_0, h_1 を

$$h_0(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \in I_1^- \\ g_0(x) & x \in I_0 \cup I_1^+ \end{cases}, \quad h_1(x) = \begin{cases} g_1(x) & x \in I_1^- \cup I_0 \\ g_0(x) & x \in I_1^+ \end{cases}$$

によって定め，f_{core} をそれらの等確率選択とする．つまり，$P(f_{\mathrm{core}} = h_0) = P(f_{\mathrm{core}} = h_1) = \frac{1}{2}$. $h_0 = h_1$ のとき，**決定論的コアを持つ**と言うこととする（$c = \frac{1}{2}$ のとき自動的に決定論的コアを持つことに注意）．

例 3.2 (一般化 Hata–Yano 写像). $0 \le \delta \le \frac{1}{6}$ に対して

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & (x \in [0, \frac{1}{2}+\delta)) \\ 2x-1 & (x \in [\frac{1}{2}+\delta, 1]) \end{cases}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 2x & (x \in [0, \frac{1}{2}-\delta)) \\ \frac{x+1}{2} & (x \in [\frac{1}{2}-\delta, 1]) \end{cases}.$$

と定める（図 5 参照）．このとき，任意の δ について f はコアを持つランダム力学系になることがすぐにわかる．実際，$\delta \le \frac{1}{8}$ のときは $c = 4\delta$, $\delta \ge \frac{1}{8}$ のときは $c = \frac{1}{2}$（決定論的コア）と取ればいい（図 6 参照）．一般には共通する Markov 分割を持たないことに注意されたい．

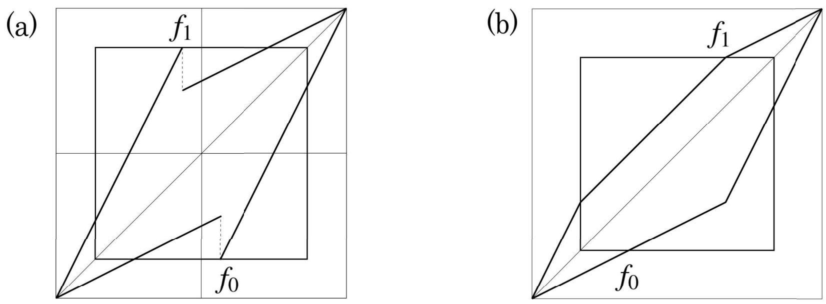

図 5　(a) 一般化 Hata–Yano 写像; (b) 区分線形 Gharaei–Homburg 型写像

例 3.3 (区分線形 Gharaei–Homburg 型写像). Gharaei–Homburg 写像の定義における "f_0, f_1 は微分同相写像" を

- f_0, f_1 は同相写像であって，整数 $N_j \ge 2$, 実数 $c_0^{(j)} = 0 < c_1^{(j)} < \cdots < c_{N_0}^{(j)} = 1$ for $j = 0, 1$ が存在して，任意の $j = 0, 1$, $I = 1, \ldots, N_j$ に対して f_j の $[c_{i-1}^{(j)}, c_i^{(j)}]$ への制限は定数の傾きを持つ

に置き換えたものを考える（図 5 参照）．このとき，f はコアを持つランダム力学系になることがすぐにわかる（$c = \min\{c_1^{(0)}, 1 - c_{N_1-1}^{(1)}$ とおけばいい）．一般には共通する Markov 分割を持たないことに注意されたい．

次が [23] の主定理となる．測度 ν が**定常**であるとは，任意の Borel 集合 A について $E[\nu(f_{\mathrm{core}}^{-1}(A))] = \nu(A)$ となることをいい，**測度論的に推移的**であるとは，$\nu(A)\nu(B) > 0 \Rightarrow \exists n,\ E[\nu(f_{\mathrm{core}}^{(-n)}(A) \cap B)] > 0$ となることを言う．

定理 3.4. f_{core} が測度論的に推移的な定常確率測度 ν であって，$\nu(I_1^-)\nu(I_1^+) > 0$ を満たすものを持つとする．このとき，任意の $a \in (0, 1)$, 任意の確率変数 X であって $\{f^n\}_{n\ge1}$ と独立かつその分布が ν-絶対連続であるようなものについて，

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 1_{\{f^n(X)\ge a\}} \to L_{\frac{1}{2},\beta} \quad (N \to \infty,\ \textit{in distribution}).$$

ただし，

$$\beta = \frac{\nu(I_1^-)}{\nu(I_1^-) + \nu(I_1^+)}.$$

注意 3.5. ランダム・ウォーク（のスケーリング）における逆正弦則と違い，一般には $\beta \ne \frac{1}{2}$ となる．また，Darling–Kac 則も逆正弦則と同様に成り立つ．（これらについては，詳しくは [23] 参照）．

3.3 応用

決定論的コア

定理 3.4 の仮定が成り立つかはエルゴード理論における典型的な問題，つまり絶対連続なエルゴード的不変確率測度の存在，となる．f_0, f_1 が連続であっても，h_0, h_1 は一般には連続ではないため，不変確率測度の存在自体が自明ではないことに注意されたい．例えば，h_0 が位相推移的な C^2 級区分拡大写像の場合は絶対連続なエルゴード的不変確率測度が存在する．

一般化 Hata–Yano 写像

例えば $\delta = \frac{1}{8}$（図 6 左）については定理 3.4 の仮定が成り立つ．実際，前節で述べたようにこれはコアが決定論的な場合であり，$h_0^2(I) = I$ for $I := [\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$, $h_0^2(x) = x$ on I となる．したがって，任意の $y \in I \cup h_0(I)$ について[*7]，$\nu := \frac{\delta_y + \delta_{h_0(y)}}{2}$ が探していた確率測度となる．（この議論は任意の $\delta \geq \frac{1}{8}$ についても成り立つ．）

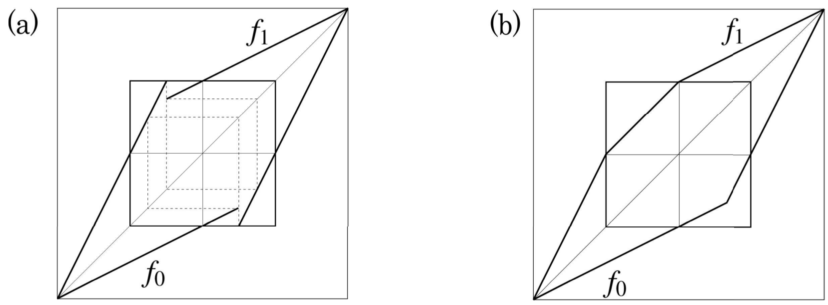

図 6　(a) $\nu = \frac{\delta_y + \delta_{h_0(y)}}{2}$ for all $y \in [\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$; (b) $\nu = \frac{\delta_{\frac{1}{4}} + \delta_{\frac{1}{2}}}{2}$

区分線形 Gharaei–Homburg 型写像

$N_0 = N_1 = 2$ の場合は，$\delta = \frac{1}{6}$ の一般化 Hata–Yano 写像になるため，前段の議論からこのランダム力学系は定理 3.4 の仮定を満たす．そのため，最も簡単な非自明な例は $N_0 = 2$, $N_1 = 3$，例えば

$$f_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & (x \in [0, \frac{2}{3})) \\ 2x - 1 & (x \in [\frac{2}{3}, 1]) \end{cases}, \quad f_1(x) = \begin{cases} 2x & (x \in [0, \frac{\delta}{2})) \\ x + \frac{\delta}{2} & (x \in [\frac{\delta}{2}, 1 - \delta]) \\ \frac{x+1}{2} & (x \in [1 - \delta, 1]) \end{cases}.$$

$(0 < \delta \leq \frac{2}{3})$ となる．$\delta = \frac{1}{2}$ の場合（図 6 右），定理 3.4 の仮定を満たし，さらに各点一般化逆正弦則が成り立つ．実際，h_0 は I_1^- と I_1^+ を交換し，h_0^2 の I_1^- への制限はちょうど 1 つだけの吸引不動点を端点 $\frac{1}{4}$ に持ち，吸引領域は I_1^- 全体となる．ゆえに，$\nu := \frac{\delta_{\frac{1}{4}} + \delta_{\frac{1}{2}}}{2}$ が定理 3.4 の仮定を満たす唯一の確率測度となる．この測

[*7] この特徴により，このランダム力学系については定理 3.4 の結論より強く，各点一般化逆正弦則が成り立つ：任意の $a \in (0, 1)$, 任意の $x \in (0, 1)$ について，

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1_{\{f^n(x) \geq a\}} \to L_{\frac{1}{2}, \beta} \quad (N \to \infty, \text{ in distribution})$$

[23, Remark 1.5] 参照.

度の欠点は，ν の台が有限集合 $\{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$ であり Leb-測度 0 集合であることから，各点一般化逆正弦則が直接的にはしたがわないことにある．この問題の解決等については [23, §1.2.3] を参照されたい．

謝辞

今回のレビュー講演は講演者にとっても大変勉強になる機会であった．この場をお借りして世話人の方々（特に間欠性に関する連続講演を企画してくださった佐藤譲氏）に厚く御礼申し上げたい．また，矢野孝次氏，世良透氏，中村文彦氏，豊川永喜氏には（ランダム）力学系の間欠性に関する議論に長い間付き合っていただいた（特に世良氏には [7] を教えていただいた）．心より御礼申し上げたい．さらに，齊木吉隆氏，荒井迅氏には大自由度系における間欠性について文献紹介をしていただいた．感謝申し上げたい．

参考文献

[1] J. Aaronson, *On the Pointwise Ergodic Behaviour of Transformations Preserving Infinite Measures*, Publications mathématiques et informatique de Rennes **41** (1977) 1–22.

[2] J. Aaronson, *The asymptotic distributional behaviour of transformations preserving infinite measures*, Journal d' analyse mathématique **39** (1981) 203–234.

[3] J. Aaronson, An introduction to infinite ergodic theory, American Mathematical Soc., 1997.

[4] J. Aaronson, T. Sera, *Functional limits for" tied down" occupation time processes of infinite ergodic transformations*, arXiv preprint arXiv:2104.12006 (2021).

[5] L. Arnold, Random dynamical systems, Springer, 1995.

[6] W. Bahsoun, C. Bose, Y. Duan, *Decay of correlation for random intermittent maps*, Nonlinearity **27** (2014).

[7] ピエール・ベルジェ, イヴェ・ポモウ, クリスチャン・ビダル, カオスの中の秩序, 産業図書, 1992.

[8] C. Bonanno, M. Lenci, *Pomeau–Manneville maps are global-local mixing*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **41** (2021).

[9] D. Darling, M. Kac, *On occupation times for Markoff processes*, Transactions of the American Mathematical Society **84** (1957), 444–458.

[10] M. Gharaei, A. Homburg, *Random interval diffeomorphisms*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-S **10** (2017), 241–272.

[11] S. Gouëzel, *Central limit theorem and stable laws for intermittent maps*, Probability theory and related fields **128** (2004), 82–122.

[12] S. Gouëzel, *Sharp polynomial estimates for the decay of correlations*, Israel Journal of Mathematics **139** (2004), 29–65.

[13] C. Grebogi, E. Ott, J. Yorke, *Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos*, Physica D: Nonlinear Phenomena **5** (1983), 181–200.

[14] C. Grebogi, E. Ott, J. Yorke, *Super persistent chaotic transients*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **7** (1985), 341–372.

[15] G. Hata, K. Yano, *Arcsine and Darling–Kac laws for piecewise linear random interval maps*, Stochastics and Dynamics (2022), 2350006.

[16] T. Inoue, *First return maps of random maps and invariant measures*, Nonlinearity **33** (2019), 249.

[17] T. Inoue, H. Toyokawa, *Invariant measures for random piecewise convex maps*, arXiv preprint arXiv:2303.10873 (2023).

[18] S. Kiriki, Y. Nakano, T. Soma, *Emergence via non-existence of averages*, Advances in Mathematics **400** (2022), 108254.

[19] J. Lamperti, *An occupation time theorem for a class of stochastic processes*, Transactions of the American Mathematical Society **88** (1958).

[20] J. Leppänen, *Intermittent quasistatic dynamical systems: weak convergence of fluctuations*, Nonautonomous Dynamical Systems **5** (2018).

[21] C. Liverani, B. Saussol, S. Vaienti, *A probabilistic approach to intermittency*, Ergodic theory and dynamical systems **19** (1999).

[22] F. Nakamura, Y. Nakano, H. Toyokawa, *Lyapunov exponents for random maps*, Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B **27** (2022).

[23] F. Nakamura, Y. Nakano, H. Toyokawa, K. Yano, *Arcsine law for random dynamics with a core*, Nonlinearity **36** (2023).

[24] Y. Pomeau, P. Manneville, *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical system*, Communications in Mathematical Physics **74** (1980), 189–197.

[25] N. Platt, E. Spiegel, C. Tresser, *On-off intermittency: A mechanism for bursting*, Physical Review Letters **70** (1993), 279.

[26] A. Rodrigues, *Persistent switching near a heteroclinic model for the geodynamo problem*, Chaos, Solitons & Fractals **47** (2013), 73–86.

[27] O. Sarig, *Subexponential decay of correlations*, Inventiones mathematicae **150** (2002), 629–653.

[28] T. Sera, *Functional limit theorem for occupation time processes of intermittent maps*, Nonlinearity **33** (2020), 1183.

[29] T. Sera, K. Yano, *Multiray generalization of the arcsine laws for occupation times of infinite ergodic transformations*, Transactions of the American Mathematical Society **372** (2019), 3191–3209.

[30] M. Thaler, *Estimates of the invariant densities of endomorphisms with indifferent fixed points*, Israel Journal of Mathematics **37** (1980), 303–314.

[31] M. Thaler, *Transformations on [0, 1] with infinite invariant measures*, Israel Journal of Mathematics **46** (1983), 67–96.

[32] M. Thaler, *The Dynkin-Lamperti arc-sine laws for measure preserving transformations*, Transactions of the American Mathematical Society **350** (1998), 4593–4607.

[33] M. Thaler, *A limit theorem for sojourns near indifferent fixed points of one-dimensional maps*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **22** (2002), 1289–1312.

[34] H. Toyokawa, *σ-finite invariant densities for eventually conservative Markov operators*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **40** (2020), 2641–2669.

[35] M. Thaler, R. Zweimüller, *Distributional limit theorems in infinite ergodic theory*, Probability theory and related fields **135** (2006), 15–52.

[36] L. Young, *Recurrence times and rates of mixing*, Israel Journal of Mathematics **110** (1999), 153–188.

[37] R. Zweimüller, *Ergodic properties of infinite measure-preserving interval maps with indifferent fixed points*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **20** (2000), 1519–1549.