粗凸空間の自由積と粗バウム・コンヌ予想

東京都立大学大学院　理学研究科　数理科学専攻　松家　拓稔
Takumi Matsuka
Department of Mathematical Sciences, Faculty and Graduate School of Science,
Tokyo Metropolitan University

概要

群の自由積と同様に距離空間に対しても自由積とみなせるものが定義できる. 特に, 群 G および H が距離空間 X および Y にそれぞれ幾何学的に作用するとき, 距離空間の自由積に対し群の自由積 $G * H$ は幾何学的に作用する. 我々は距離空間の自由積と粗凸空間との関係を調べ, 距離空間 X および Y が測地的粗凸であるならば, 距離空間の自由積 $X * Y$ もまた測地的粗凸であるという結果を得た. このとき $X * Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成立する. 本稿の内容は深谷友宏氏 (東京都立大学) との共同研究 (arXiv:2303.13701) に基づきます.

1　導入

粗幾何学とは多様体とは限らない空間を扱う幾何学の一種である. **粗同値**と呼ばれる, 等長同型を大きく弱めた同値関係により距離空間を同一視する. 粗幾何学は**幾何学的群論**という分野に動機付けされ発達した. 幾何学的群論とは群という代数的な対象を, その群が作用する距離空間を通して幾何学的に考察する分野である. その嚆矢はデーンによる「語の問題」の研究にある. すなわち有限生成群 G に対して, その生成元による語として書かれた任意の 2 つの元が等しいかどうかを決定するアルゴリズムを与えよという問題である. デーンは曲面の基本群に対し「語の問題」を肯定的に解決した. その際に曲面の基本群が双曲平面に「良い」作用をすることに注目し, 「語の問題」を双曲平面の幾何学的な性質を調べることに帰着させた. このように群という代数的な対象をそれが作用する距離空間から幾何学的に考察するという視点は大変有用である. **このような視点においては, 群と空間を同一視し考察するが, この同一視の適切な基準を与えるのが粗幾何学である.**

幾何学的群論の隆盛のきっかけとなったのはグロモフによる「負曲率をもつ」群, **双曲群**の導入である. この双曲群は活発に研究され, 様々な結果が存在する. さらに「非正曲率をもつ」距離空間や群を定義しようという研究も行われている. 深谷友宏氏および尾國新一氏により定義された**粗凸空間**はその 1 つである [5]. 粗凸空間は**非正曲率をもつ単連結完備リーマン多様体の粗幾何学における対応物**とみなせるものである. 測地的グロモフ双曲空間はもちろん, 様々な重要な例がある. また粗バウム・コンヌ予想とは「良い」固有距離空間の位相幾何的情報と解析的情報が一致するとのべる, 非可換幾何学において重要な予想である. 深谷友宏氏と尾國新一氏は距離が固有である粗凸空間において粗バウム・コンヌ予想が成り立つことを示した [5, Theorem 1.3].

群の自由積と同様に距離空間に自由積とみなせるものが定義できる. 特に, 群 G および H が距

離空間 X および Y にそれぞれ幾何学的に作用するとき, この距離空間の自由積に対し群の自由積 $G * H$ は幾何学的に作用する. 我々はこの距離空間の自由積と粗凸空間との関係を調べ, 距離空間 X および Y が測地的粗凸であるならば, 距離空間の自由積 $X * Y$ もまた測地的粗凸であるという結果を得た. このとき $X * Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成り立つ. 粗幾何学全般および粗凸空間のすぐれた解説として, 深谷友宏氏のモノグラフ [10] をあげる. また洋書としては [7] をあげる.

2 粗同値とシュバルツ, ミルナーの定理

粗同値の定義を述べる. また群とその群が作用する距離空間を同一視する上で粗同値が適切であることをしめす定理を紹介する. 以降, (X, d_X) および (Y, d_Y) を距離空間とする.

Definition 1 (粗同値)**.** (X, d_X) および (Y, d_Y) を距離空間とする. 次の 2 条件を満たす写像 $f : X \to Y$ が存在するとき X と Y は**粗同値**であるという.

(1) 発散する非減少関数 $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在し, 任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\rho_-(d_X(x, x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x'))$$

を満たす. 写像 f を**粗埋め込み写像**という. 距離空間 X から Y に粗埋め込み写像 $f : X \to Y$ が存在するとき, X は Y に**粗埋め込み可能**であるという.

(2) 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $y \in Y$ に対して $x \in X$ が存在して $d_Y(y, f(x)) \leq C$ を満たす.

この 2 条件を満たす写像 $f : X \to Y$ を粗同値写像という.

条件 (1) において定義中の関数 $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が恒等関数としてとれるならば, 写像 $f : X \to Y$ は等長写像である. 続いてシュバルツ, ミルナーの定理を述べるための準備をする. まず「良い」作用を定義する.

Definition 2 (幾何学的な作用)**.** (X, d_X) を距離空間とし, G は X に等長に作用する群とする.

(1) 任意のコンパクト集合 $B \subset X$ に対し, 集合 $\{g \in G \mid g(B) \cap B \neq \emptyset\}$ が有限集合となるとき, 作用は**固有**であるという.

(2) あるコンパクト集合 $K \subset X$ で, $G(K) = X$ なるものが存在するとき, 作用は**余コンパクト**であるという.

(3) 作用が固有かつ余コンパクトであるとき, 作用は**幾何学的**であるという.

Definition 3 (擬測地線および擬測地空間)**.** (X, d_X) を距離空間とする. 定数 $\lambda \geq 1$ および $k \geq 0$ が存在し, 任意の 2 点 $x, x' \in X$ に対して次の 2 条件を満たす写像 $\gamma : [a, b] \to X$ が存在する.

(1) $\gamma(a) = x$ および $\gamma(b) = x'$ が成り立つ.

(2) 任意の $t, t' \in [a, b]$ に対して,

$$\lambda^{-1}|t - t'| - k \leq d_X(\gamma(t), \gamma(t')) \leq \lambda|t - t'| + k$$

が成り立つ.

このとき, 距離空間 (X, d_X) を**擬測地空間**といい, 写像 $\gamma : [a, b] \to X$ を (λ, k)-**擬測地線分**とよぶ.

Definition 4 (固有距離空間)**.** X を距離空間とする. X の任意の有界閉集合がコンパクトであるとき, X の距離は固有であるという. 固有な距離をもつ距離空間を**固有距離空間**という.

シュバルツ, ミルナーの定理は群とその群が作用する距離空間を同一視する上で粗同値が適切な同値関係であることをしめす定理であり, 粗幾何学において重要である.

Theorem 1 (シュバルツ, ミルナーの定理)**.** X を固有な距離をもつ擬測地空間とし, X に群 G が幾何学的に作用しているとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) G は有限生成である.
(2) 任意の点 $x_O \in X$ の軌道 $G \to X : g \mapsto g(x_O)$ は粗同値写像である. すなわち, G と X は粗同値である. ただし, G にはある有限生成系に関する語距離[*1] を入れる.

3 距離空間の自由積

群 G および H が距離空間 X および Y にそれぞれ幾何学的に作用しているとする. このとき, Bridson–Haefliger は群の自由積 $G * H$ が幾何学的に作用する距離空間を構成した ([1, Theorem II.11.18]). 我々はこの構成を一般化し, 群作用を仮定しない状況で距離空間の自由積を定義した. まず, その構成のためネットとよばれる概念を定義する.

Definition 5 (ネット)**.** (X, d_X) を距離空間とする. また X_0 を集合とする. 写像 $i_X : X_0 \to X$ を任意のコンパクト集合 $K \subseteq X$ に対し, $\# i_X^{-1}(K) < \infty$ を満たすものとする. また $e_X \in i_X(X_0)$ とする. この三つ組み (X_0, i_X, e_X) を距離空間 X の**ネット**という.

Example 1. 群 G が距離空間 X に幾何学的に作用しているとする. 基点 e_X をとり, その軌道写像 $o(e_X) : G \to X, g \mapsto g(e_X)$ をとる. このとき, 三つ組み $(G, o(e_X), e_X)$ は X のネットである. 特にこのネットを G-**ネット**とよぶ.

距離空間の自由積を定義するために必要な記号をまとめる.

Notation 1. (X_0, i_X, e_X) および (Y_0, i_Y, e_Y) を距離空間 X および Y のネットとする.

- $e_X = i_X(x_0)$ を満たす $x_0 \in X_0$ を 1 つとり, ϵ_X と定める. 同様にして, $e_Y = i_Y(y_0)$ を満たす $y_0 \in Y_0$ を 1 つとり, ϵ_Y と定める.
- $X_0^* \coloneqq X_0 \setminus \{\epsilon_X\}$ および $Y_0^* \coloneqq Y_0 \setminus \{\epsilon_Y\}$ とする.
- $X_0^* \sqcup Y_0^*$ 上の語とは有限列 $w_0 w_1 \cdots w_n \quad (n \geq 0, w_i \in X_0^* \sqcup Y_0^*)$ であって, 任煮の i について

$$w_i \in X_0^* \Rightarrow w_{i+1} \in Y_0^*,$$
$$w_i \in Y_0^* \Rightarrow w_{i+1} \in X_0^*$$

[*1] 語距離とは有限生成群に対し純粋に代数的な操作のみで定まる距離である.

を満たすものとする．

- $X_0^* \sqcup Y_0^*$ 上の語全体と空語 $\{\epsilon\}$ の和集合を W とする．またその部分集合として，

$$W_X \coloneqq \{w_0 w_1 \cdots w_n \in W \mid w_n \notin X_0^*\} \bigsqcup \{\epsilon\},$$
$$W_Y \coloneqq \{w_0 w_1 \cdots w_n \in W \mid w_n \notin Y_0^*\} \bigsqcup \{\epsilon\}$$

とする．

Definition 6 (距離空間の自由積)**.** 距離空間の自由積 $X * Y$ は以下の**面**と**垂直辺**からなる距離空間である．図 1 を参照されたい．

- (面): $\{\omega\} \times X$ および $\{\tau\} \times Y$ からなる，ただし $\omega \in W_X$ および $\tau \in W_Y$ とする．簡単のため $\{\omega\} \times X$ および $\{\tau\} \times Y$ をそれぞれ ωX および τY とあらわす．
- (垂直辺): 以下の 3 タイプよりなる．
  - $(\epsilon, e_X) \in \{\epsilon\} \times X$ と $(\epsilon, e_Y) \in \{\epsilon\} \times Y$ を結ぶ辺．
  - 任意の $\omega \in W_X$ および $x_0 \in X_0^*$ に対して，$(\omega, i_X(x_0)) \in \{\omega\} \times X$ と $(\omega x_0, e_Y) \in \{\omega x_0\} \times Y$ を結ぶ辺．
  - 任意の $\tau \in W_Y$ および $y_0 \in Y_0^*$ に対して，$(\tau, i_Y(y_0)) \in \{\tau\} \times Y$ と $(\tau y_0, e_X) \in \{\tau y_0\} \times X$ を結ぶ辺．

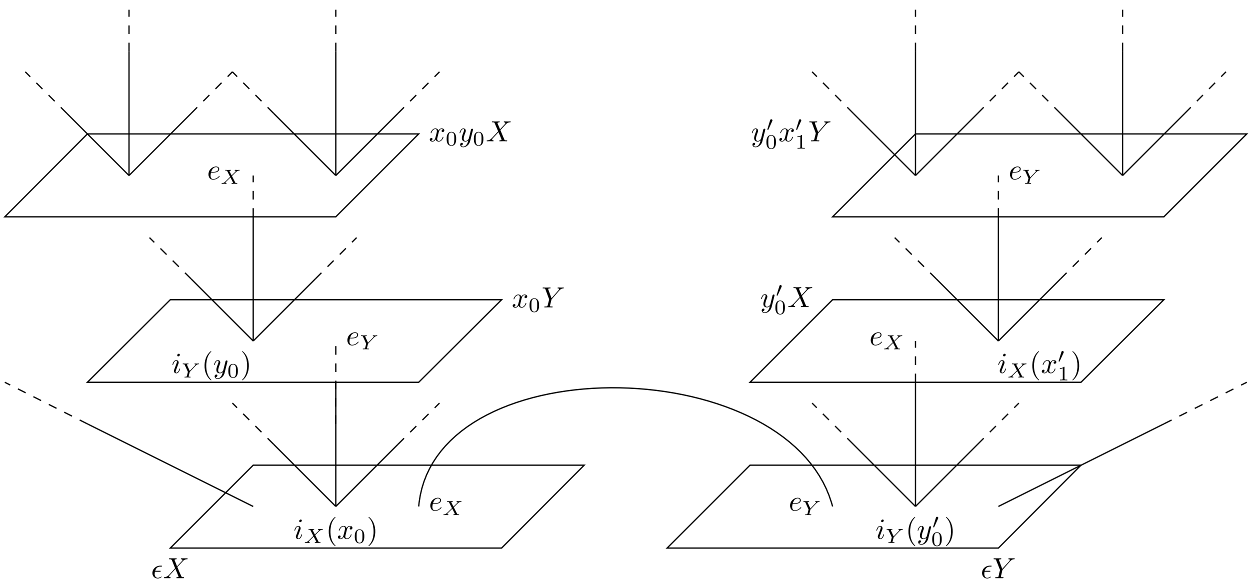

図 1　距離空間の自由積 $X * Y$．ただし $x_0, x_1' \in X_0^*$ および $y_0, y_0' \in Y_0^*$ とする．

図 1 のように，距離空間の自由積は木の分岐する点たちに距離空間 X および Y を交互に貼り合わせていくように構成される．その構造から距離 d_* が自然に定まり自由積 $X * Y$ は距離空間である．

Remark 1. 群 G および H が固有な擬測地空間 X および Y にそれぞれ幾何学的に作用しているとする．このとき，Example 1 にて言及した G-ネットおよび H-ネットについて自由積を構成できる．これは Bridson–Haefliger ([1, Theorem II.11.18]) によって構成された $G * H$ が幾何学的に作用す

る距離空間に一致する．よってシュバルツ，ミルナーの定理より群の自由積 $G*H$ は G-ネットおよび H-ネットに関する距離空間の自由積 $X*Y$ に粗同値である．

4　粗凸空間

本節の詳細な解説として [10, 第 6 章, 第 8 章] を参考にされたい．深谷友宏氏と尾國新一氏は粗凸空間とよばれる距離空間のクラスを導入した [5]. これは非正曲率をもつ単連結完備リーマン多様体の粗幾何学における対応物とみなせるものである．以下のような重要な例がある．

(1) 測地的グロモフ双曲空間
(2) ブーゼマン非正曲率空間.
(3) 有限次元シストーリック複体 [8].
(4) Hierarchically hyperbolic spaces [6].
(5) Proper injective metric spaces [3], 特に, 局所有限な coarsely Helly graph の injective hulls [2].

さらに, **粗凸空間の成す距離空間のクラスは粗同値に関して閉じている．** すなわち, 擬測地空間 X および Y が粗同値であり, X が粗凸空間ならば Y も粗凸空間である．また**直積に関しても閉じている．** 粗凸空間は距離空間に対して, 性質の良い擬測地線の族の存在を仮定し定義される．

Definition 7 (粗凸空間)**.** (X, d_X) を距離空間とする．$\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1$ および $C \geq 0$ を定数とする．また, $\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を非減少関数とする．そして $\mathcal{L}$ を (λ, k)-擬測地線分の族とする．以下の条件が成り立つとき, X は $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$**-粗凸**であるという．

(CC1) 2 点 $v, w \in X$ に対し, 閉区間 $[0, a]$ 上で定義された擬測地線分 $\gamma \in \mathcal{L}$ で $\gamma(0) = v$ および $\gamma(a) = w$ を満たすものが存在する．

(CC2) 2 つの擬測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば, 任意の $t \in [0, a], s \in [0, b]$, および $c \in [0, 1]$ に対し, 次の不等式が成り立つ．

$$d_X(\gamma(ct), \eta(cs)) \leq (1-c)Ed_X(\gamma(0), \eta(0)) + cEd_X(\gamma(t), \eta(s)) + C.$$

この不等式を**粗凸不等式**という．

(CC3) 2 つの擬測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば, 任意の $t \in [0, a], s \in [0, b]$ に対し, 次の不等式が成り立つ．

$$|t - s| \leq \theta(d_X(\gamma(0), \eta(0)) + d_X(\gamma(t), \eta(s))).$$

条件 (CC1), (CC2) および (CC3) を満たす族 $\mathcal{L}$ を**良い擬測地線分の族**といい, 元 $\gamma \in \mathcal{L}$ を**良い擬測地線分**という．特に族 $\mathcal{L}$ が測地線分から成るとき, X を**測地的粗凸**であるという．

5　主結果とその証明の概略

我々は各因子が測地的粗凸空間であるような自由積を考察し, 次の結果を得た．

Theorem 2. [4, Theorem 3.1] 距離空間 X および Y が測地的粗凸空間[*2] であるとする．このとき，ネットのとり方によらず，距離空間の自由積 $X * Y$ もまた測地的粗凸空間である．

この主結果の証明の概略を述べる．距離空間の自由積 $X * Y$ が測地的粗凸空間であると示すためには，まず $X * Y$ において測地線分族を構成する必要がある．いま自由積の各面は測地的粗凸空間であると仮定している．各面における良い測地線分を 1 つとり，それらをつなぎ合わせることで $X * Y$ の測地線分族の元を構成する．その構成を説明する．

(X_0, i_X, e_X) を X のネットととし，(Y_0, i_Y, e_Y) を Y のネットとする．また自由積 $X * Y$ の面をすべて集めた集合を $\mathcal{S}$ とする．さらに垂直辺をすべて集めた集合を E とする．自由積の各面は測地的粗凸空間である．各 $S \in \mathcal{S}$ および $x, y \in S$ に対して，x を始点とし y を終点とする S 上の良い測地線分を 1 つとる．これを $\gamma_S(x, y)$ とする．また，各 $e \in E$ および $v, w \in e$ に対して，$\gamma_e(v, w)$ を，始点が v であり終点が w である e 上の測地線分とする．ここで $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} \coloneqq \{\gamma_S(x, y) \mid S \in \mathcal{S},\ x, y \in S\} \bigsqcup \{\gamma_e(v, w) \mid e \in E, v, w \in e\}$$

と定義する．点 $a, b \in X * Y$ に対して，a を始点とし b を終点とする $X * Y$ 上の測地線分 $\Gamma(a, b)$ を $\mathcal{L}$ の各元をつなぎ合わせることで定義する．その具体例を図示する．

$a = (ux_0y_0, x)$ および $b = (ux'_0, y)$ とする． ここで $u \in W_X$ は最大の共通語である． また $x_0, x'_0 \in X_0^*$, $y_0 \in Y_0^*$, $x \in X$, および $y \in Y$ である．測地線分 $\Gamma(a, b) : [0, d_*(a, b)] \to X * Y$ は次のように定義される (図 2 参照): $\overline{x_0} = i_X(x_0)$ および $\overline{y_0} = i_Y(y_0)$ とする．その他の点も同様である．

$$\Gamma(a,b)(t) = \begin{cases} \gamma_{ux_0y_0X}(x, e_X)(t) & 0 \le t \le d_X(e_X, x), \\ \gamma_{e_1}(e_X, \overline{y_0})(t - t_1) & t_1 \le t \le t_1 + 1, \\ \gamma_{ux_0Y}(\overline{y_0}, e_Y)(t - (t_1 + 1)) & t_1 + 1 \le t \le t_1 + d_Y(e_Y, \overline{y_0}) + 1, \\ \gamma_{e_2}(e_Y, \overline{x_0})(t - t_2) & t_2 \le t \le t_2 + 1, \\ \gamma_{uX}(\overline{x_0}, \overline{x'_0})(t - (t_2 + 1)) & t_2 + 1 \le t \le t_2 + d_X(\overline{x_0}, \overline{x'_0}) + 1, \\ \gamma_{e_3}(\overline{x'_0}, e_Y)(t - t_3) & t_3 \le t \le t_3 + 1, \\ \gamma_{ux'_0Y}(e_Y, y)(t - (t_3 + 1)) & t_3 + 1 \le t \le t_3 + d_Y(e_Y, y) + 1. \end{cases}$$

ただし $t_1 = d_X(e_X, x)$, $t_2 = t_1 + d_Y(e_Y, \overline{y_0}) + 1$, および $t_3 = t_2 + d_X(\overline{x_0}, \overline{x'_0}) + 1$ とする．また e_1, e_2, および e_3 は垂直辺である．

ここで $\mathcal{L}_* = \{\Gamma(a, b) : a, b \in X * Y\}$ とする．$\mathcal{L}_*$ が良い測地線分族であることを示す．証明に際し，次の測地的粗凸空間の特徴付けを用いる．

Proposition 1. (X, d_X) を距離空間とする．$E \ge 1$ および $C \ge 0$ を定数とする．$\mathcal{L}$ を X の測地線分族とする．$\mathcal{L}$ が次の (gCC1), (gCC2) および (gCC3) を満たすとする．

(gCC1) 2 点 $v, w \in X$ に対し，閉区間 $[0, a]$ 上で定義された測地線分 $\gamma \in \mathcal{L}$ で $\gamma(0) = v$ および $\gamma(a) = w$ を満たすものが存在する．

(gCC2) 2 つの測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たすとする．さらに $\gamma(0) = \eta(0)$ を満たす．このとき，任意の $t \in [0, a], s \in [0, b]$, および $c \in [0, 1]$ に対し，次の不

[*2] [4, Theorem 3.1] においては "symmetric" という条件を仮定しているが，arXiv に投稿後この仮定は除けることがわかった．

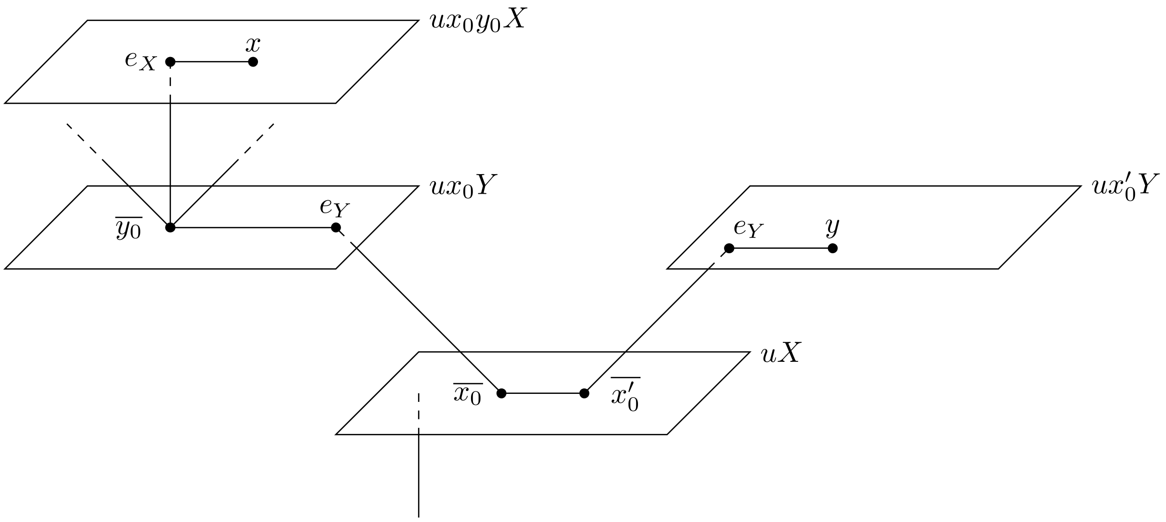

図 2　$a = (ux_0y_0, x)$ および $b = (ux'_0, y)$ に対する $\Gamma(a, b)$

等式が成り立つ.

$$d_X(\gamma(ct), \eta(cs)) \leq cEd_X(\gamma(t), \eta(s)) + C.$$

(gCC3) 2 つの測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たすとする. $t \in [0, a]$ に対し $\eta(0)$ を始点とし $\gamma(t)$ を終点とする, $\mathcal{L}$ に属する測地線分 $\gamma' : [0, d] \to X$ をとる. このとき, 任意の $c \in [0, 1]$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$d_X(\gamma(ct), \gamma'(cd)) \leq (1 - c)Ed_X(\gamma(0), \eta(0)) + C.$$

このとき, X は $(1, 0, E, 2C, \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}, \mathcal{L})$-粗凸である. すなわち X は測地的粗凸空間である.

Proposition 1 により, $\mathcal{L}_*$ の元が成す測地三角形において粗凸不等式が成り立つことを示せばよいとわかる. 距離空間 X および Y は測地的粗凸空間であるため, X を $(1, 0, E_X, C_X, \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}, \mathcal{L}_X)$-粗凸, Y を $(1, 0, E_Y, C_Y, \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geq 0}}, \mathcal{L}_Y)$-粗凸であるとみなせる. ここで,

$$E \coloneqq \max\{E_X, E_Y\},$$
$$C \coloneqq \max\{C_X, C_Y\}$$

とする.

ここでは $\mathcal{L}_*$ の元が成す測地三角形において (gCC2) が成り立つことを示す. そのため, $\mathcal{L}_*$ の元が成す測地三角形の形状を観察する. $\Gamma_1 \in \mathcal{L}_*$ を $\Gamma_1 : [0, t] \to X * Y$ なるものとする. また $\Gamma_2 \in \mathcal{L}_*$ を $\Gamma_2 : [0, s] \to X * Y$ なるものとする. $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0)$ と仮定する. Γ_1 および Γ_2 の成す測地三角形 $\Delta(\Gamma_1(0), \Gamma_1(t), \Gamma_2(s))$ は次のような形状をとる (図 3 参照): 面 $S \in \mathcal{S}$ および $p, a, b \in S$ が存在し,

$$[\Gamma_1(0), \Gamma_1(t)] = [\Gamma_1(0), p] \cup [p, a] \cup [a, \Gamma_1(t)],$$
$$[\Gamma_1(0), \Gamma_2(s)] = [\Gamma_1(0), p] \cup [p, b] \cup [b, \Gamma_2(s)],$$
$$d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) = d_*(\Gamma_1(t), a) + d_*(a, b) + d_*(b, \Gamma_2(s))$$

を満たす．ただし，$[\Gamma_1(0), \Gamma_1(t)]$ は Γ_1 の像，$[\Gamma_1(0), \Gamma_2(s)]$ は Γ_2 の像とする．ここで，ある $c_0, c_1, c'_0, c'_1 \in [0,1]$ によって，

$$\begin{aligned} p &= \Gamma_1(c_0 t) = \Gamma_2(c'_0 s), \\ a &= \Gamma_1(c_1 t), \\ b &= \Gamma_2(c'_1 s) \end{aligned}$$

とおける．Γ_1 および Γ_2 は測地線分であるから，$c_0 t = c'_0 s$ を得る．ここで $c_1 \leq c'_1$ と仮定する．三角

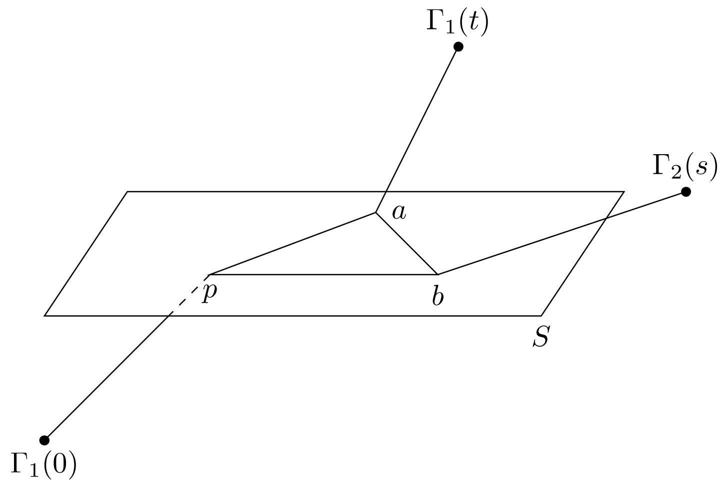

図 3　Γ_1 および Γ_2 の成す $X * Y$ 上の測地三角形.

不等式により，

$$d_*(a,b) \leq c'_1 \cdot d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) \tag{1}$$

が成り立つ．この不等式は証明において重要である．

いま定数 $E_* \geq 1$ および $C_* \geq 0$ が存在して，任意の $c \in [0,1]$ に対し，

$$d_*(\Gamma_1(ct), \Gamma_2(cs)) \leq cE_* d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C_* \tag{2}$$

が成り立つことを示す．証明は次の 4 つの場合に分けられる．

I). $\Gamma_1(ct) \in [\Gamma_2(0), \Gamma_2(cs)]$ もしくは $\Gamma_2(cs) \in [\Gamma_1(0), \Gamma_1(ct)]$.
II). $\Gamma_1(ct) \in [p,a]$ かつ $\Gamma_2(cs) \in [p,b]$ (図 4 参照).
III). $\Gamma_1(ct) \in [p,a]$ かつ $\Gamma_2(cs) \in [b, \Gamma_2(s)]$.
IV). $\Gamma_1(ct) \in [a, \Gamma_1(t)]$ かつ $\Gamma_2(cs) \in [b, \Gamma_2(s)]$.

I) および II) の場合において，(2) が成り立つことを示す．I) の場合を考える．このとき $\Gamma_1(0)$, $\Gamma_1(ct)$, および $\Gamma_2(cs)$ は同一測地線上に存在する．よって，

$$\begin{aligned} d_*(\Gamma_1(ct), \Gamma_2(cs)) &= c|t-s| \\ &\leq c d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) \end{aligned}$$

が成り立つ．

II) の場合を考える．このとき, 次のようにおける．

$$\Gamma_1(ct) = \gamma_S(p,a)(ct - c_0 t),$$
$$\Gamma_2(cs) = \gamma_S(p,b)(cs - c_0' s).$$

$T \coloneqq (c_1 - c_0)t$ および $S \coloneqq (c_1' - c_0')s$ とすると,

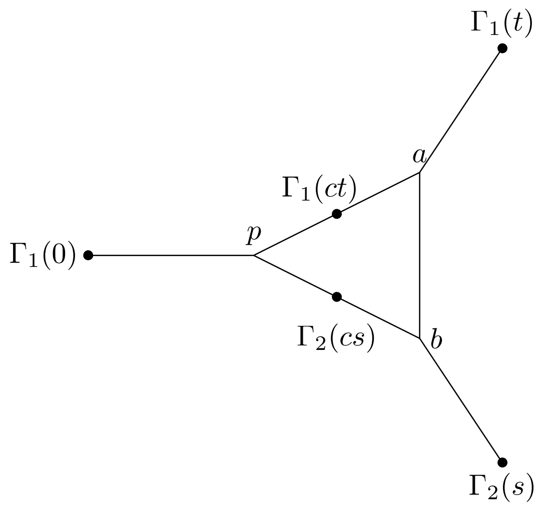

図 4　II) の場合.

$$\begin{aligned} p &= \gamma_S(p,a)\,(0) = \gamma_S(p,b)\,(0)\,, \\ \Gamma_1(ct) &= \gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0}{c_1-c_0}T\right), & a &= \gamma_S(p,a)\,(T)\,, \\ \Gamma_2(cs) &= \gamma_S(p,b)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}S\right), & b &= \gamma_S(p,b)\,(S) \end{aligned}$$

とおける．$a' \in [p,a]$ を

$$a' \coloneqq \gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T\right)$$

と定義する．まず, S における粗凸不等式と式 (1) から,

$$\begin{aligned} d_*(a', \Gamma_2(cs)) &= d_*\left(\gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T\right), \gamma_S(p,b)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}S\right)\right) \\ &\le \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'} \cdot Ed_*(\gamma_S(p,a)(T), \gamma_S(p,b)(S)) + C \\ &= \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'} \cdot Ed_*(a,b) + C \\ &\le \frac{cc_1' - c_0'c_1'}{c_1'-c_0'} \cdot Ed_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C \\ &\le c \cdot Ed_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C \end{aligned} \tag{3}$$

を得る．式 (3) は $c_0' \le c \le c_1'$ より従う．

続いて a' と $\Gamma_1(ct)$ の距離を評価する.

$$\begin{aligned}
d_*(a', \Gamma_1(ct)) &= d_*\left(\gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T\right), \gamma_S(p,a)\left(\frac{c-c_0}{c_1-c_0}T\right)\right) \\
&= \left|\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T - \frac{c-c_0}{c_1-c_0}T\right|
\end{aligned}$$

三角不等式 $(c_1-c_0)t \leq (c_1'-c_0')s + d_*(a,b)$ および式 (1) より,

$$\begin{aligned}
\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T - \frac{c-c_0}{c_1-c_0}T &= \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}(c_1-c_0)t - \frac{c-c_0}{c_1-c_0}(c_1-c_0)t \\
&\leq \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}\{(c_1'-c_0')s + d_*(a,b)\} - (c-c_0)t \\
&\leq (c-c_0')s - (c-c_0)t + \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}d_*(a,b) \\
&\leq c(s-t) + cd_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) \\
&\leq c \cdot \{2d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s))\}
\end{aligned}$$

を得る. 同様にして, 三角不等式 $(c_1'-c_0')s - d_*(a,b) \leq (c_1-c_0)t$ および式 (1) から,

$$\begin{aligned}
\frac{c-c_0}{c_1-c_0}T - \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T &= \frac{c-c_0}{c_1-c_0}(c_1-c_0)t - \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}(c_1-c_0)t \\
&\leq (c-c_0)t - \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}\{(c_1'-c_0')s - d_*(a,b)\} \\
&= (c-c_0)t - (c-c_0')s + \frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}d_*(a,b) \\
&\leq c(t-s) + cd_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) \\
&\leq c \cdot \{2d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s))\}
\end{aligned}$$

を得る. 以上より,

$$\begin{aligned}
d_*(a', \Gamma_1(ct)) &= \left|\frac{c-c_0'}{c_1'-c_0'}T - \frac{c-c_0}{c_1-c_0}T\right| \\
&\leq c \cdot \{2d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s))\} \qquad (4)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 式 (3) および式 (4) を組み合わせることで,

$$\begin{aligned}
d_*(\Gamma_1(ct), \Gamma_2(cs)) &\leq d_*(\Gamma_1(ct), a') + d_*(a', \Gamma_2(cs)) \\
&\leq c \cdot \{2d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s))\} + c \cdot Ed_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C \\
&= c(2+E)d_*(\Gamma_1(t), \Gamma_2(s)) + C
\end{aligned}$$

を得る. [*3]

他の場合も同様に証明される. さらに (gCC3) も同様の方針で証明される. Proposition 1 により, 自由積 $X * Y$ は測地的粗凸空間であるとわかる.

[*3] 正確には, 任意の $t' \in [0,t]$ および $s' \in [0,s]$ に対して同様の不等式を示すことで, (gCC2) を満たすことをいう.

6 主結果の粗バウム・コンヌ予想への応用

粗バウム・コンヌ予想とは性質の良い固有距離空間においてはその粗 K ホモロジーとロー代数の K 群が一致すると主張するものである．この予想は「良い」固有距離空間においてはその位相幾何的情報と解析的情報が一致するとのべる, 非可換幾何学において重要な予想である．深谷友宏氏と尾國新一氏は距離が固有である粗凸空間において粗バウム・コンヌ予想が成り立つことを示した [5, Theorem 1.3]. この結果 [5, Theorem 1.3] により Theorem 2 の系として, 次を得る．

Theorem 3. [4, Theorem 5.4] 固有距離空間 X および Y が測地的粗凸空間であるとする．このとき, ネットのとり方によらず, 距離空間の自由積 $X * Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成り立つ．

また, 群 G および H が固有な測地的粗凸空間に幾何学的に作用しているとする． このとき, Theorem 3, シュバルツ, ミルナーの定理, および Bridson–Haefliger の結果 ([1, Theorem II.11.18]) から, 群の自由積 $G * H$ において粗バウム・コンヌ予想が成り立つとわかる．

粗バウム・コンヌ予想を肯定する結果として, 現時点で最も強力な定理は以下のユーの定理である．

Theorem 4. [9, Theorem 1.1] X を固有距離空間とする．X が有界幾何学をもち, ヒルベルト空間に粗埋め込み可能であるならば, X に対して粗バウム・コンヌ予想が成り立つ．

論文 [4] に挙げられている Example 5.8 および Example 5.9 はユーの定理の仮定を満たさない．一方, Theorem 3 により, これらの例は粗バウム・コンヌ予想が成り立つとわかる．

参考文献

[1] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, Vol. 319 of *Grundlehren Math. Wiss.* Berlin: Springer, 1999.

[2] Jérémie Chalopin, Victor Chepoi, Anthony Genevois, Hirai Hiroshi, and Damian Osajda. Helly groups. arXiv:2002.06895, 2022.

[3] Dominic Descombes and Urs Lang. Convex geodesic bicombings and hyperbolicity. *Geom. Dedicata*, Vol. 177, pp. 367–384, 2015.

[4] Tomohiro Fukaya and Takumi Matsuka. Free products of coarsely convex spaces and the coarse Baum-Connes conjecture, arXiv:2303.13701, 2023.

[5] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, Vol. 12, No. 3, pp. 857–895, 2020.

[6] Thomas Haettel, Nima Hoda, and Harry Petyt. Coarse injectivity, hierarchical hyperbolicity and semihyperbolicity. *Geom. Topol.*, Vol. 27, No. 4, pp. 1587–1633, 2023.

[7] Piotr W. Nowak and Guoliang Yu. *Large scale geometry.* EMS Textb. Math. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2012.

[8] Damian Osajda and Piotr Przytycki. Boundaries of systolic groups. *Geom. Topol.*, Vol. 13,

No. 5, pp. 2807–2880, 2009.

[9] Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. *Invent. Math.*, Vol. 139, No. 1, pp. 201–240, 2000.

[10] 深谷友宏. 粗幾何学入門, SGC ライブラリ 152. サイエンス社, 2019.