# 測度距離空間全体の空間の位相的性質

愛媛大学大学院理工学研究科 中島 啓貴
Hiroki Nakajima
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

## 1 序

本稿は，数川大輔氏，塩谷隆氏との共同研究 [4, 5] に基づく．

空間の大域的な幾何学を調べようとするとき，空間ひとつひとつを調べるのではなく，空間の空間を扱うことで各空間の性質を調べる方法がある．空間の空間を扱う有名な例は，Gromov-Hausdorff 距離 $d_{\mathrm{GH}}$ である．これは，コンパクト距離空間全体の空間[1]上に定まる距離である．一方，Gromov は測度距離空間全体の空間[2]に Box 距離 $\square$ と呼ばれる距離を定義し，豊かな理論を展開した [2]．本稿では，測度距離空間全体の空間 $\mathcal{X}$ の位相的性質について説明する．特に,「$\mathcal{X}$ から一点空間を除いたものをスケーリング作用で割った商空間」$\Sigma$ の錐は，$\mathcal{X}$ とは同相にならないという意外な結果 (定理 10) について説明する．この結果は，$\Sigma$ が Urysohn の分離公理を満たさないということから従う．

## 2 準備

### 2.1 測度距離空間の定義

完備可分距離空間 $(X, d_X)$ がボレル確率測度 $m_X$ を備えているとき，三つ組 $(X, d_X, m_X)$ を**測度距離空間**あるいは略して **mm 空間**という．ここ

[1] コンパクト距離空間全体のクラスは集合ではないが，すべての可分な距離空間は Urysohn universal space に等長に埋め込めるので,「Urysohn universal space のコンパクト部分距離空間全体を等長同型で割った商集合」をコンパクト距離空間全体の空間だと思うことで集合とみなせる．

[2] 測度距離空間全体の空間も集合とみなせる．詳細については後述の定義 4 の直後にて説明する．

で，$X$ 上の測度 $m_X$ が**確率測度**であるというのは $m_X(X) = 1$ を満たすことをいう．紛れのないときには，距離と測度を省略して単に $X$ が測度距離空間であると述べることもある．測度距離空間の典型例は以下で挙げる閉リーマン多様体である．別の言い方をすると，測度距離空間の理論は閉リーマン多様体を含むような広いクラスを対象としている．

**例 1** (閉リーマン多様体)**.** $(M, g)$ を閉リーマン多様体とする．$d_g$ をリーマン距離，$\mathrm{vol}_g$ をリーマン体積測度としたとき，三つ組 $(M, d_g, \frac{1}{\mathrm{vol}_g(M)}\mathrm{vol}_g)$ は mm 空間である．

また，最も簡単な測度距離空間は以下に述べるディラック測度の例である．

**例 2** (ディラック測度)**.** 完備可分距離空間 $(X, d_X)$ において一点 $p \in X$ を固定する．このとき，各ボレル集合 $A \subset X$ に対して

$$\delta_p(A) := \begin{cases} 1 & \text{if } p \in A, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定めると，$\delta_p$ は確率測度であり，$(X, d_X, \delta_p)$ は mm 空間である．$\delta_p$ を (点 $p$ を中心とする) ディラック測度と呼ぶ．

測度距離空間の幾何学において，次の「押し出し測度」は最も基本的な道具の 1 つである．これは，写像 $f\colon X \to Y$ によって $X$ 上の測度を $Y$ に押し出すことによって $Y$ 上の測度を得るものである．

**定義 3** (押し出し測度)**.** $X$ と $Y$ を位相空間とする．ボレル可測写像 $f\colon X \to Y$ による $X$ 上のボレル確率測度 $m_X$ の**押し出し測度** $f_* m_X$ は，各ボレル集合 $A \subset Y$ に対して

$$f_* m_X(A) := m_X(f^{-1}(A))$$

と定めることによって定義される．$f_* m_X$ は $Y$ 上のボレル確率測度である．

なお確率論の文脈においては，$f$ は ($Y$ 値の) 確率変数と呼ばれ，押し出し測度 $f_* m_X$ は確率変数 $f$ の分布と呼ばれる．

2 つの距離空間を同じものとみなすには等長同型を利用するが，測度距離空間の場合には以下に述べる mm 同型を用いる．

**定義 4** (mm 同型)**.** 測度距離空間 $X$ と $Y$ が **mm 同型**であるとは，ある等長写像 $f\colon \operatorname{supp} m_X \to \operatorname{supp} m_Y$ が存在して $f_* m_X = m_Y$ を満たすことを言う．ここで，$\operatorname{supp} m_X$ は測度 $m_X$ の台であり

$$\operatorname{supp} m_X := \{x \in X \mid x \text{ の任意の開近傍 } U \text{ に対して } m_X(U) > 0\}$$

によって定義される．

測度距離空間全体の集合を mm 同型で割った商集合を $\mathcal{X}$ と書く[3]．序文で述べた Box 距離 $\square$ は $\mathcal{X}$ 上の距離関数であり，次節で定義する．

mm 同型の最も基本的な例を挙げる．

**例 5.** $(X, d_X)$ と $(Y, d_Y)$ を完備可分距離空間とする．$x \in X$，$y \in Y$ としたとき，mm 空間 $(X, d_X, \delta_x)$ と $(Y, d_Y, \delta_y)$ は mm 同型である．実際，$\operatorname{supp} \delta_x = \{x\}$ かつ $\operatorname{supp} \delta_y = \{y\}$ であるから，写像 $f\colon \{x\} \to \{y\}$ が唯ひとつだけ存在し，これが mm 同型の条件を満たす $f$ となる．この，測度の台が 1 点のみからなる測度距離空間の同型類を一点空間と呼び $* \in \mathcal{X}$ で表す．

## 2.2 Gromov - Hausdorff 距離と Box 距離

Box 距離は，測度距離空間版の Gromov - Hausdorff 距離というような概念である．したがって，Gromov - Hausdorff 距離について少し説明する．

**定義 6** (Gromov - Hausdorff 距離 (cf. [1]))**.** 2 つのコンパクト距離空間 $X$ と $Y$ に対して，**Gromov - Hausdorff 距離** $d_{\mathrm{GH}}$ は以下で定義される．

$$d_{\mathrm{GH}}(X, Y) := \frac{1}{2} \inf_{S \subset X \times Y} \operatorname{dis} S.$$

ただし $\mathrm{pr}_i$ を第 $i$ 成分への射影としたとき，$S \subset X \times Y$ は $\mathrm{pr}_1(S) = X$ かつ $\mathrm{pr}_2(S) = Y$ を満たすものとする．また，空でない $S \subset X \times Y$ に対して

$$\operatorname{dis} S := \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| \mid (x, y), (x', y') \in S\}$$

と定義する．また $\operatorname{dis} \emptyset := 0$ と定義する．

[3] 厳密には，Urysohn universal space 上の確率測度全体の集合を mm 同型で割った商集合を $\mathcal{X}$ とする．

dis は distortion(ゆがみ) の略で，$S$ が等長写像のグラフからどれくらいずれているのかを表している．Gromov - Hausdorff 距離はコンパクト距離空間の等長類全体 $\mathcal{H}$ 上の距離になっている．

いよいよ Box 距離の定義を行う．Box 距離は同時分布を用いて定義することができる．

**定義 7** (同時分布)**.** $X \times Y$ 上のボレル確率測度 $\pi$ が測度距離空間 $X$ と $Y$ の**同時分布**であるとは,

$$(\mathrm{pr}_1)_*\pi = m_X, \quad (\mathrm{pr}_2)_*\pi = m_Y$$

を満たすことである.

同時分布は，確率論の分野では二変数の確率変数の分布として現れる．また，最適輸送理論の文脈では輸送を表す．$X$ と $Y$ の同時分布全体の集合を $\Pi(X,Y)$ で表す.

**定義 8** (Box 距離)**.** 測度距離空間 $X$ と $Y$ に対して，Box 距離 $\square(X,Y)$ を

$$\square(X,Y) := \inf_{\pi\in\Pi(X,Y)} \inf_{S\subset X\times Y} \max\{\operatorname{dis} S, 1-\pi(S)\}$$

によって定義する．ただし，$S$ は $X \times Y$ の Borel 集合全体を走る.

上記の定義は Gromov によるオリジナルの定義ではない．オリジナルの定義は [2] の Chapter $3\frac{1}{2}_+$ を参照．上記の表示については [6] によって得られている．Box 距離は $\mathcal{X}$ 上の距離関数である．Gromov - Hausdorff 距離と Box 距離の上記の定義を見比べることで，これらの距離がとてもよく似ていることや，Box 距離の定義の自然さについて納得できると思う.

# 3　主結果

測度距離空間 $X$ と実数 $r > 0$ に対して，$X$ の $r$ 倍が

$$r \cdot (X, d_X, m_X) := (X, r \cdot d_X, m_X)$$

によって定まる．これを略して $rX$ と書くことにする．これは，群 $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ の $\mathcal{X}$ への作用を定める.

## 3.1 極座標分解

まず，$\mathbb{R}^n$ の極座標分解について考える．$n-1$ 次元球面を $S^{n-1}$ と書くと，

$$\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \overset{homeo}{\simeq} S^{n-1} \times \mathbb{R}_+$$

が成立している．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して，$\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ を，ある $r > 0$ が存在して $\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{y}$ であることとして定義する．このとき，商空間 $(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})/\sim$ は $n-1$ 次元球面 $S^n$ と同相になっている．

このことから類推して，同様に $\mathcal{X}$ も極座標分解できるのではないかと考えられる．例 5 で挙げた 1 点空間 $*$ は $\mathbb{R}_+$ 作用に関して $\mathcal{X}$ における唯一の固定点になっているので，1 点空間 $* \in \mathcal{X}$ は $\mathbb{R}^n$ における原点に対応していると考えられる．$X, Y \in \mathcal{X}$ に対して $X \sim Y$ を，ある $r > 0$ が存在して $X = rY$ を満たすことと定義する．このとき $\mathcal{X}$ が極座標分解できるかという問題は，商空間 $\Sigma := (\mathcal{X} \setminus \{*\})/\sim$ を用いて「$\mathcal{X} \setminus \{*\}$ と $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ は同相か？」という問題に定式化される．ただし，$\mathcal{X}$ は Box 距離 $\square$ から定まる位相を備えているものとする．

先行研究としては，以下の Gromov - Hausdorff 空間 $(\mathcal{H}, d_{\mathrm{GH}})$ における極座標分解が挙げられる．

**定理 9** (cf.[3])**.** Gromov - Hausdorff 空間 $(\mathcal{H}, d_{\mathrm{GH}})$ において

$$\mathcal{H} \setminus \{*\} \overset{homeo}{\simeq} \Sigma \times \mathbb{R}_+$$

が成り立つ．

Box 距離 $\square$ は Gromov - Hausdorff 距離と定義が非常に似ているため，測度距離空間全体の空間 $(\mathcal{X}, \square)$ も同様に極座標分解ができることが期待される．しかしながら，意外なことに測度距離空間全体の空間 $(\mathcal{X}, \square)$ は極座標分解できないのである．これが本研究の主結果である．

**定理 10** ([4])**.** $(\mathcal{X}, \square)$ において

$$\mathcal{X} \setminus \{*\} \overset{homeo}{\not\simeq} \Sigma \times \mathbb{R}_{>0}$$

が成り立つ．また，$\mathcal{X}$ は $\Sigma$ の錐と同相でない．

この定理を証明するにあたって，鍵となるのは以下の補題である．

**補題 11.** $\Sigma$ は Urysohn でない，すなわち閉近傍で分離できない相異なる 2 点が存在する．

ちなみに，$\Sigma$ は Hausdorff にはなっている (後述の系 15)．これについては後ほど証明する．

補題 11 から定理 10 を示すには，位相空間 $X$ と空でない位相空間 $Y$ に対して，$X \times Y$ が Urysohn ならば，$X$ が Urysohn であることを用いれば良い．

**「補題 *11* $\Rightarrow$ 定理 *10*」の証明**. $\Sigma$ は Urysohn でないので $\Sigma \times \mathbb{R}_{>0}$ も Urysohn でない．一方，$\mathcal{X} \setminus \{*\}$ は距離空間なので Urysohn である．錐についても同様. $\square$

## 3.2 主結果 (定理 10) の証明

まず，補題 11 を示すために，以下の補題 12 を証明する．すなわち，論理の流れとしては,「補題 12 $\Rightarrow$ 補題 11 $\Rightarrow$ 定理 10」となる．

以下では，$p \colon \mathcal{X} \setminus \{*\} \to \Sigma$ を商空間 $\Sigma = (\mathcal{X} \setminus \{*\}) / \sim$ への標準射影とする．また，

$$Y_\varepsilon := (\{0,1\}, \|\cdot\|, (1-\varepsilon)\delta_0 + \varepsilon\delta_1)$$

とおく．

**補題 12.** $V \subset \Sigma$ を $V^\circ \neq \emptyset$ をみたす閉集合とする．このとき，ある $r(V) > 0$ が存在して，任意の $\varepsilon \in (0, r(V))$ に対して $p(Y_\varepsilon) \in V$ をみたす.

**補題 *12* の証明**. 任意に閉集合 $V \subset \Sigma$ で $V^\circ \neq \emptyset$ をみたすものをとる．$V^\circ \neq \emptyset$ より，ある $X \in p^{-1}(V^\circ)$ が存在する．mm 空間は常に有限点空間で近似できるため，$\operatorname{diam} X < \infty$ としても一般性を失わない．$p^{-1}(V^\circ)$ は開集合より，ある $r(V) > 0$ が存在して $U_{r(V)}(X) \subset p^{-1}(V^\circ)$ が成り立つ．ここで，$U_{r(V)}(X) := \{A \in \mathcal{X} \setminus \{*\} \mid \square(A, X) < r(V)\}$ は $X$ の $r(V)$-近傍である．

任意に $\varepsilon \in (0, r(V))$ をとる．$Z_{n,\varepsilon} := (Z, d_n, m_\varepsilon)$ を以下で定義する．

$$Z := X \sqcup \{w\}, \quad d_n|_{X \times X} := d_X, \quad d_n(x, w) := n, \quad m_\varepsilon := (1-\varepsilon)m_X + \varepsilon\delta_w.$$

$d_n$ は $n \geq \operatorname{diam} X/2$ のとき距離関数になる．任意に $n \geq \operatorname{diam} X/2$ をとると，$\square(X, Z_{n,\varepsilon}) \leq \varepsilon < r(V)$ より $Z_{n,\varepsilon} \in p^{-1}(V^\circ)$ が成り立つ．$Z_{n,\varepsilon} \sim \frac{1}{n} Z_{n,\varepsilon}$ であるから，$\frac{1}{n} Z_{n,\varepsilon} \in p^{-1}(V^\circ)$ が成り立つ．いま，

$$\square\left(Y_\varepsilon, \frac{1}{n} Z_{n,\varepsilon}\right) \leq \frac{\operatorname{diam} X}{n} \to 0$$

かつ $p^{-1}(V)$ が閉集合であることより，$Y_\varepsilon \in p^{-1}(V)$ が成り立つ． $\square$

**「補題 *12* ⇒ 補題 *11*」の証明**. 任意に $p(X), p(Y) \in \Sigma$ と，それらの閉近傍 $V, W \subset \Sigma$ をとる．補題 12 より，ある $r(V) > 0$ が存在して任意の $\varepsilon \in (0, r(V))$ に対して $p(Y_\varepsilon) \in V$ が成り立つ．同様に，ある $r(W) > 0$ が存在して任意の $\varepsilon \in (0, r(W))$ に対して $p(Y_\varepsilon) \in W$ が成り立つ．$\varepsilon := \min\{r(V), r(W)\}/2$ とおくと，$p(Y_\varepsilon) \in V \cap W$ が成り立つ．よって $V \cap W \neq \emptyset$ である． □

## 3.3 $(\mathcal{X} \setminus \{*\}, \square)$ の主束構造

$(\mathcal{X} \setminus \{*\}, \square)$ は極座標分解できなかったが，$p\colon \mathcal{X} \setminus \{*\} \to \Sigma$ は主 $\mathbb{R}_+$ 束になっており，以下の定理が成り立つ．

**定理 13** ([4])**.** 束 $p\colon \mathcal{X} \setminus \{*\} \to \Sigma$ は非自明かつ局所自明である．

**定理 *13* の証明のスケッチ**. 定理 10 は束が非自明であることを意味している．以下，局所自明性について簡単に説明する．$\Delta \in (0, 1)$ として

$$\mathcal{X}_\Delta := \{X \in \mathcal{X} \mid \text{任意の } x \in X \text{ に対して } m_X(\{x\}) < \Delta\}$$

とおく．$\mathcal{X}_\Delta$ は開集合であり，

$$\mathcal{X} \setminus \{*\} = \bigcup_{0<\Delta<1} \mathcal{X}_\Delta$$

が成り立つ．このとき，同相写像

$$\Phi\colon \mathcal{X}_\Delta \to (\mathcal{X}_\Delta/\sim) \times \mathbb{R}_+$$

が具体的に構成できる． □

**補足 14.** 一般に，パラコンパクトな Hausdorff 空間上の可縮なファイバーを持つ局所自明な主束は自明束になるが，$\Sigma$ は (Urysohn でないので特に) パラコンパクトでない．

**系 15** (定理 13 の系)**.** $\Sigma$ は Hausdorff である．

*Proof.* 任意に $X, Y \in \mathcal{X}$ で $p(X) \neq p(Y)$ を満たすものをとる．ある $\Delta \in (0, 1)$ が存在して $p(X), p(Y) \in \mathcal{X}_\Delta/\sim$．$(\mathcal{X}_\Delta/\sim) \times \mathbb{R}_+$ は $\mathcal{X}_\Delta$ と同相なので，$\mathcal{X}_\Delta/\sim$ は Hausdorff．いま $p^{-1}(\mathcal{X}_\Delta/\sim) = \mathcal{X}_\Delta$ は開集合であるから，$\mathcal{X}_\Delta/\sim$ は $\Sigma$ の中で開集合．よって $p(X)$ と $p(Y)$ は $\Sigma$ の開集合で分離できる． □

## 3.4 $(\mathcal{X}, \square)$ のその他の性質

$(\mathcal{X}, \square)$ の位相的な性質について分かっていること，今回分かったことについて以下の表にまとめておく．Gromov は $\mathcal{X}$ 上にオブザーバブル距離 $d_{\mathrm{conc}}$ という距離も定義している．その性質についても載せておく．

† が [5] において今回新しく分かった結果である．

| 性質 | $(\mathcal{H}, d_{\mathrm{GH}})$ | $(\mathcal{X}, \square)$ | $(\mathcal{X}, d_{\mathrm{conc}})$ |
|---|---|---|---|
| コンパクト | No | No | No |
| 完備 | Yes | Yes | No |
| 可分 | Yes | Yes | Yes |
| 局所コンパクト | No | No$^\dagger$ | No$^\dagger$ |
| σ コンパクト | No | No$^\dagger$ | ? |
| Baire | Yes | Yes | No$^\dagger$ |
| Polish | Yes | Yes | No$^\dagger$ |
| 可縮 | Yes | Yes$^\dagger$ | Yes$^\dagger$ |
| 局所弧状連結 | Yes | Yes$^\dagger$ | Yes$^\dagger$ |
| 測地空間 | Yes | Yes$^\dagger$ | ? |


[1] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR1835418

[2] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[3] A. O. Ivanov and A. A. Tuzhilin, *Isometry group of Gromov-Hausdorff space*, Mat. Vesnik **71** (2019), no. 1-2, 123–154.

[4] D. Kazukawa, H. Nakajima, and T. Shioya, *Principal bundle structure of the space of metric measure spaces.* preprint.

[5] ———, *Topological aspects of the space of metric measure spaces.* preprint.

[6] H. Nakajima, *Box distance and observable distance via optimal transport.* preprint.