順序数の積の部分空間の C^*-embedding 性と P-embedding 性について
-C^*-embedding and P-embedding in subspaces of products of ordinals-

(*) 大分大学・教育マネジメント機構　家本 宣幸
Nobuyuki Kemoto
Institute for Educational Management,
Oita University
(**) 早稲田大学・基幹理工学部　薄葉 季路
Toshimichi Usuba
Faculty of Science and Engineering,
Waseda Univertisy

概要

A と B を順序数の部分空間とするとき, その積空間 $X = A \times B$ の任意の閉集合が X で C^*-embedded であることと P-embedded であることは同値であることが平田・矢島によって示されている [12]。その中で次の問題が提起された [12, Question 2]。

- 順序数の二乗の部分空間 X について, その閉集合が X で C^*-embedded であることと P-embedded であることは同値か？

ZFC と無矛盾な否定解が [25] で得られたので, その概要と未解決問題について述べる。

1 序

空間は Tychonoff とする, つまり, cozero 集合全体を開基に持つ位相空間とする (cozero 集合の定義は後述)。位相空間が normal とは, 互いに素な二つの閉集合が, 互いに素な開集合で分離できることを言う。ω と ω_1 はそれぞれ最小の無限順序数と最小の非可算順序数を表す。$\omega + 1$ は ω の直後の順序数 $(= \omega \cup \{\omega\})$ を表す。

$\langle X, \leq \rangle$ を全順序集合としたとき, X 上に (x, y) の形の開区間を開集合と宣言する順序位相と呼ばれる位相を自然に入れることができる。順序位相は normal, collectionwise normal, countably paracompact, shrinking, monotonically normal などの非常に強い性質を持っていることが知られている。ここで, collectionwise normal は normal の定義で,「二つの」の部分を「任意個数の」と, 一般化したものと思えばよい。また, 空間 X が countably paracompact とは, 任意の X の可算開被覆 $\mathcal{U}$ に対して局所有限開被覆 $\mathcal{V}$ が取れて, 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して $V \subset U$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在することを言う (局所有限の定義は後述)。

一方, 二つの位相空間 X, Y が与えられれば, Tyconoff 積位相 (あるいは単に直積位相) と呼ばれる普通の位相を直積 $X \times Y$ 上に与えることができる, つまり, X の開集合 U と Y の開集合 V に対して, $U \times V$ のタイプの集合を $X \times Y$ の開集合と宣言する $X \times Y$ 上の位相である。この位相が入った直積 $X \times Y$ を単に積空間あるいは直積 (位相) 空間と言う。

順序数は全順序集合であるから, この先, 順序数と言えば順序位相が入った位相空間と考える。私たちの興味の対象は, 二つの順序数 α, β について, その直積位相空間 $\alpha \times \beta$ やその部分空間の位相的性質である。これらの理論は近年では「順序数の積空間の理論」と呼ばれ, 現在進行で発展しつつある。上で述べたいくつかの順序位相が持つ強い性質は, 直積を取ると突然崩れてしまうことはよく知られている。例えば, 直積 $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$ において, 二つの互いに素な閉集合 $\omega_1 \times \{\omega_1\}$ と対角線 (閉) 集合 $\{\langle \alpha, \alpha \rangle : \alpha < \omega_1\}$ は互いに素な開集合で分離できない, つまり, normal でないことは古典的な結果としてよく知られている。順序数の積空間の理論に更なるメスを入れた最初の結果が [19] である。たとえば次が示されている。

- ω_1 の部分空間 A, B についてその積空間 $A \times B$ が normal であることの必要十分条件は, A または B が non-stationary か, $A \cap B$ が stationary (stationary set の定義は後述) である。

この論文では, normal 以外にも collectionwise normal, shrinking, countably paracompact, expandable 等の位相的性質が normal と同じあるいは微妙に違うことが示されている。この結果を皮切りに順序数の積空間の理論がさらに発展している。たとえば, normal 性 や countably paracompact 性周辺 [6, 7, 8, 9, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 28, 11], orthocompact 性 [15, 26, 27], 無限積 [21, 23], 次元 [5], 2 つの積では成立するが 3 つの積では成立しない位相的性質 [7] などが研究されている。順序数の積空間の理論で, 話題の中心は, normal, countably paracompact, collectionwise normal であったと言っても過言ではない。更に近年では, 順序数の積空間の理論として, 部分空間上の連続関数の拡張可能性 (特に C^*-embedding 性と P-embedding 性) の議論がさかんになっている。

2 C^*-embedding 性と P-embedding 性

空間 X の部分空間 F は, F から 実数の単位閉区間 $\mathbb{I}$ (バナッハ空間 B) への任意の連続関数が, X から $\mathbb{I}$ (B) への連続関数に拡張できるとき, X で C^*-embedded (P-embedded) と呼ばれる。F が X で P-embedded ならば C^*-embedded である。次はよく知られている。

- 空間 X が normal であることの必要十分条件は, 任意の閉集合が X で C^*-embedded となることである [4, Theorem 2.1.8]。
- 空間 X が collectionwie normal であることの必要十分条件は, 任意の閉集合が X で P-embedded となることである [2]。

こうして見ると, C^*-embedding や P-embedding も normal や collectionwise normal の変形と言ってもよいだろう。実際に, C^*-embedding や P-embedding を議論するときは, 定義を直接使うよりも, 次の補題 2.1 の同値条件の方が扱いやすい。ここで空間 X の部分集合 U が cozero とは, X から $\mathbb{I} = [0, 1]$ への連続関数 h を用いて, $U = h^{-1}[(0, 1]]$ とあらわされることである。cozero 集合は開集合であることに注意しよう。また, 空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ が cozero 被覆とは, 各要素 $U \in \mathcal{U}$ が cozero の時を言う。更に, 空間 X の開被覆 $\mathcal{U}$ が局所有限とは, 各 $x \in X$ に対して, x の近傍 V が存在して $\{U \in \mathcal{U} : V \cap U \neq \emptyset\}$ が有限にできることである。

補題 2.1 (特徴付け補題)**.** F を空間 X の部分空間とする。次が成立する。

- *F が X で C^*-embedded である必要十分条件は, F の任意の有限 cozero 被覆 $\mathcal{U}$*

に対して, X の局所有限 *cozero* 被覆 $\mathcal{V}$ が存在して, 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して, $V \cap F \subset U$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在する [29],

- F が X で *P-embedded* である必要十分条件は, F の任意の局所有限 *cozero* 被覆 $\mathcal{U}$ に対して, X の局所有限 *cozero* 被覆 $\mathcal{V}$ が存在して, 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して, $V \cap F \subset U$ をみたす $U \in \mathcal{U}$ が存在する [1]。

最近, 平田・矢島によって次が示されている [12]。

- A と B を順序数の部分空間とするとき, その積空間 $X = A \times B$ の閉集合が X で C^*-embedded であることと P-embedded であることは同値である。なお, この結果における「閉集合」は単に「部分集合」に置き換えられる事が, つい最近 [10] で示されている。

その中で次の問題が提起された。

問題 2.2. [12, Question 2]
順序数の二乗の任意の部分空間 X について, その閉集合が X で C^*-embedded であることと P-embedded であることは同値であるか？

ここでは, ZFC と無矛盾なこの問題の否定解が [25] で得られたので, その概要と未解決問題について述べる。特に次の二つの性質は共に ZFC と無矛盾であることが示せたので, その発想に至った $(\omega+1)\times\omega_1$ の特殊な部分空間の構成及びその性質について述べたい。

- $(\omega+1)\times\omega_1$ の部分空間 X で, その閉集合 $X \cap (\{\omega\}\times\omega_1)$ が X で C^*-embedded であるが P-embedded ないようなものが存在する。
- $(\omega+1)\times\omega_1$ の任意の部分空間 X について, その閉集合 $X \cap (\{\omega\}\times\omega_1)$ が X で C^*-embedded ならば P-embedded である。

ω_1 の閉集合は非有界の時, club (= closed and unbounded) set と呼ばれる。また, ω_1 の部分集合 S は, すべての club set と交わる時に stationary と呼ばれる。ω_1 の極限順序数の全体を Lim であらわし, $\mathrm{Succ} = \omega_1 \setminus \mathrm{Lim}$ とおく。club set が stationary set であるは簡単に示せる。さらに Lim は club set であるが, Succ は stationary set ではないことも簡単に示せる。

証明の中で, 多用するのは次の集合論的補題 Pressing Down Lemma (PDL) である。

補題 2.3. (PDL) X を ω_1 の *stationary set* とする。もし, 関数 $f : X \to \omega_1$ が *regressive* (= 任意の $\alpha \in X$ について $f(\alpha) < \alpha$) ならば *stationary set* $X' \subset X$ と $\gamma < \omega_1$ が存在して, 任意の $\alpha \in X'$ について $f(\alpha) = \gamma$ が成立する。

上述の $(\omega+1)\times\omega_1$ の部分空間 X を議論するため, [22] で与えられた次の記法を利用する。μ と ν を順序数とし, $X \subset (\mu+1)\times(\nu+1)$ とする。この時, 部分集合 $C \subset \mu+1$ と $D \subset \nu+1$ に対して,

$$X_C = X \cap C \times (\nu+1), X^D = X \cap (\mu+1) \times D, X_C^D = X_C \cap X^D$$

と定義する。また, 順序数 $\alpha \le \mu$ と $\beta \le \nu$ について, $V_\alpha(X)$ は X の垂直方向の切り口 (vertical slice) $\{\delta \le \nu : \langle \alpha, \delta \rangle \in X\}$, $H_\beta(X)$ は X の水平方向の切り口 (horizontal slice) $\{\gamma \le \mu : \langle \gamma, \beta \rangle \in X\}$ を表す。

ここで目的の $(\omega+1)\times\omega_1$ の部分空間を考える。

定義 2.4. $[\omega]^\omega$ の長さ ω_1 の列 $\mathcal{N}$ が与えられたとする。それを $\mathcal{N} = \{N(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ と表そう。ここで $[\omega]^\omega$ は ω の無限部分集合の全体を表す。

$(\omega+1)\times\omega_1$ の部分空間 $X_\mathcal{N}$ を次のように定義する。

$$X_\mathcal{N} = \omega \times \mathrm{Lim} \cup (\bigcup_{\alpha<\omega_1} (N(\alpha) \cup \{\omega\}) \times \{\alpha+1\})。$$

このタイプの空間 $X_\mathcal{N}$ は最初に [16] で与えられている。各 $n \in \omega$ について, $V_n(X)(\supset \mathrm{Lim})$ は stationary であるが, $V_\omega(X)(= \mathrm{Succ})$ は stationary にならないことに注意しよう。ここが議論のポイントである。$X = X_\mathcal{N}$ とおくと, 次の二つは PDL を利用することで簡単にわかる。

- X は normal でない, なぜなら X^{Lim} と $X_{\{\omega\}}$ は互いに素な開集合で分離できない互いに素な閉集合である。
- $X_{\{\omega\}}(= X \cap \{\omega\} \times \omega_1 = \{\omega\} \times \mathrm{Succ})$ は X で P-embedded でない, なぜなら $\mathcal{U} = \{\{\langle \omega, \alpha \rangle\} : \alpha \in \mathrm{Succ}\}$ が補題 2.1 の P-embedded の性質をみたさない $X_{\{\omega\}}$ の局所有限 cozero 被覆である。

問題は $X_{\{\omega\}}$ が X で C^*-embedded であるかどうかに集約されてきたことがわかる。では, $X_{\{\omega\}}$ が X で C^*-embedded であるための必要十分条件は何であろうか? 次がその一つの答えである。

補題 2.5. $\mathcal{N} = \{N(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ を $[\omega]^\omega$ の長さ ω_1 の列とし, $X = X_\mathcal{N}$ を上の定義

2.4 で与えられた $(\omega+1)\times\omega_1$ の部分空間とする。この時, 次は同値である。ここで $2=\{0,1\}$ である。

(1) $X_{\{\omega\}}$ は X で *C^*-embedded* である,
(2) 任意の関数 $h:\omega_1\to 2$ に対し点列 $\{r_n:n\in\omega\}\subset\mathbb{I}$ が存在して, 各 $i\in 2$ について, 可算個の $\alpha\in h^{-1}[\{i\}]$ を除いて $\{r_n:n\in N(\alpha)\}$ は i に収束する, つまり, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $m\in\omega$ が存在して, 任意の $n\in N(\alpha)\cap(m,\omega)$ について, $|r_n-i|<\varepsilon$ が成立する,
(3) 任意の関数 $h:\omega_1\to 2$ に対し関数 $k:\omega\to 2$ が存在して, 任意の $i\in 2$ に対し, 可算個の $\alpha\in h^{-1}[\{i\}]$ を除いて, $N(\alpha)\subset^* k^{-1}[\{i\}]$ が成立する, つまり, $N(\alpha)\setminus k^{-1}[\{i\}]$ が有限。

次の性質 Property (A) を考えよう。

定義 2.6. Property (A) とは次の性質 $(3)'$ をみたす列 $\mathcal{N}=\{N(\alpha):\alpha<\omega_1\}\subset[\omega]^\omega$ が存在することを意味する。

$(3)'$ 任意の $H\subset\omega_1$ に対して次の性質をみたす $K\subset\omega$ が存在する。

(a) 可算個の $\alpha\in H$ を除いて, $N(\alpha)\subset^* K$ が成立する,
(b) 可算個の $\alpha\in\omega_1\setminus H$ を除いて, $N(\alpha)\subset^*\omega\setminus K$ が成立する。

この定義において, $H=h^{-1}[\{1\}]$, $K=k^{-1}[\{1\}]$ と考えれば $(3)'$ は上の補題の (3) と同値であることはすぐわかる。一方, Property (A) については, Dow と Shelah によってその変形版が議論されていて, それを言い直すと次のことがわかっている。ここで 2^ω や 2^{ω_1} は ω や ω_1 の部分集合全体 (= 巾集合) の濃度である。また, ω_2 は ω_1 の次の基数である。

定理 2.7. [3] *Martin's axiom,* $2^\omega=\omega_2$ と Property (A) は *ZFC* と無矛盾である。

従って, 次がわかる。

系 2.8. $X_{\{\omega\}}$ が X で *C^*-embedded* であるが *P-embedded* でないような $(\omega+1)\times\omega_1$ の部分空間 X が存在するという命題は *ZFC* と無矛盾である。

Martin's axiom と $2^\omega=\omega_2$ から $2^\omega=2^{\omega_1}$ が導かれることに注意しておこう。一方, Property (A) の否定も ZFC と無矛盾であることがわかる。

定理 2.9. $2^{\omega} < 2^{\omega_1}$ が成立すれば, Property (A) の否定が成立する。

従って:

系 2.10. 定義 *2.4* で定義された $(\omega+1)\times\omega_1$ の $X = X_{\mathcal{N}}$ のタイプの部分空間について, $X_{\{\omega\}}$ は X で C^**-embedded* ではないという命題は *ZFC* と無矛盾である。

定理 2.9 は, もう少し一般化することができて, 次を導き出すことができる。

定理 2.11. $2^{\omega} < 2^{\omega_1}$ が成立すれば, $(\omega+1)\times\omega_1$ の任意の部分空間 X について, $X_{\{\omega\}}$ が X で C^**-embedded* ならば, P*-embedded* になる。

3 問題

定理 2.11 において, $X_{\{\omega\}}$ は X の特殊な閉集合である。これに関して, 我々は次を問いたい。

問題 3.1. 「$(\omega+1)\times\omega_1$ の任意の部分空間 X について, その任意の閉集合が X で C^*-embedded ならば, P-embedded になる」という命題は ZFC と無矛盾か?

空間 X の部分空間 F は, F から 実数 $\mathbb{R}$ への任意の連続関数が, X から $\mathbb{R}$ への連続関数に拡張できるとき, X で C-embedded と呼ばれる。F が X で P-embedded ならば C-embedded で, また C-embedded ならば C^*-embedded である, つまり, C-embedded は P-embedded と C^*-embedded との中間に位置する概念である。

平田・矢島の結果 [11] から, A と B を順序数の部分空間とするとき, その積空間 $X = A\times B$ の閉集合が X で C^*-embedded であることと P-embedded であることは同値であるから, $X = A\times B$ のタイプの空間では, C^*-embedded, C-embedded と P-embedded の 3 つの違いは出てこないことがわかるが, 順序数の二乗の部分空間のタイプではこれら 3 つの概念の違いの研究は始まったばかりである。研究の発展が期待される。

参考文献

[1] R. A. Alo and H. L. Shapiro, *Normal Topological Space*, Cambridge University Press, London, 1974.

[2] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Acta. Mat. 2 (1952), 303–313.

[3] A. Dow and S. Shelah, *Martin's axiom and separated mad families*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **61** (2012), no. 1, 107–115.

[4] R. Engelking, *General Topology-Revised and completed ed.*. Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[5] W. G. Fleissner, N. Kemoto and J. Terasawa, *Strong zero-dimensionality of Products of Ordinals*, Top. Appl., 132 (2003), 109–127.

[6] R. Frič and N. Kemoto, *Sequential completeness of products of ordinals*, Czec. Math. 49 (1999) 119–125.

[7] Y. Hirata and N. Kemoto, *Separating by G_δ-sets in finite powers of ω_1*, Fund. Math., 177 (2003) 83–94

[8] Y. Hirata and N. Kemoto, *The hereditarily collectionwise Hausdorff property in products of ω_1*, Top. Proc., 29 (2005) 167–173.

[9] Y. Hirata and N. Kemoto, *Mild normality of finite products of subspaces of ω_1*, Top. Appl., 153 (2006) 1203–1213.

[10] Y. Hirata, N. Kemoto and Haruto Ohta, *C^*-embedded dense subsets of z-neighborhood-sublinear spaces are P-embedded*, Top. Proc., 62 (2023) 99-116.

[11] Y. Hirata and N. Kemoto, *Countable metacompactness of products of LOTS'*, Top. Appl., 178 (2014) 1-16.

[12] Y. Hirata and Y. Yajima, *C^*-embedding implies P-embedding in products of ordinals*, Top. Appl., 231 (2017), 251–265.

[13] L. Kalantan and N. Kemoto, *Mild normality in products of ordinals*, Houston J. Math., 29 (2003) 937–947.

[14] N. Kemoto, *Normality of products of GO-spaces and cardinals*, Top. Proc. 18 (1993) 133–142.

[15] N. Kemoto, *Orthocompact subspaces in products of two ordinals*, Top. Proc. 22 (1997) 247–264.

[16] N. Kemoto and T. Nogura, *Normality and paranormality in product spaces*, Top. Appl., 121 (2002) 319–331.

[17] N. Kemoto, T. Nogura and Y. Yajima, *Normality and closed projections of products with a cardinal factor*, Fund. Math. 151 (1996) 279–297.

[18] N. Kemoto, T. Nogura, K. D. Smith and Y. Yajima, *Normal subspaces in products of two ordinals*, Top. Appl. 69 (1996) 217–226.

[19] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Top. Appl., 45 (1992) 245–260.

[20] N. Kemoto and K. D. Smith, *The product of two ordinals is hereditarily countably metacompact*, Top. Appl. 74 (1996) 91–96.

[21] N. Kemoto and K. D. Smith, *Hereditarily countable metacompactness in finite and infinite product spaces of ordinals*, Top. Appl.77 (1997) 57–63.

[22] N. Kemoto, K. D. Smith and P. J. Szeptycki, *Countable paracompactness versus normality in* ω_1^2, Top. Appl., 104 (2000) 141–154.

[23] N. Kemoto and P. J. Szeptycki, *Topological properties of products of ordinals*, Top. Appl., 143 (2004), 257–277.

[24] N. Kemoto, K. Tamano and Y. Yajima, *Generalized paracompactness of subspaces in products of two ordinals*, Top. Appl., 104 (2000) 155–168.

[25] N. Kemoto and T.Usuba, C^**-embedding and* P*-embedding in subspaces of products of ordinals*, Top. Appl., **284** (2020), Paper No. 107357, 13 pp.

[26] N. Kemoto and Y. Yajima, *Orthocompactness in products*, Tsukuba J. Math, 16 (1992), 407–422.

[27] N. Kemoto and Y. Yajima, *Orthocompactness and normality of products with a cardinal factor*, Top. Appl., 49 (1993), 141–148.

[28] N. Kemoto and Y. Yajima, *Rectangular products with ordinal factors*, Top. Appl., 1545 (2007), 758–770.

[29] K. Morita and T. Hoshina, C*-embedding and the homotopy extension property*, Gene. Topo. Appl., 5 (1975), 69–81.

(*)Institute for Educational Management, Oita University,
Oita, 870-1192 Japan
nkemoto@oita-u.ac.jp

(**)Faculty of Science and Engineering, Waseda University,
3-4-1 Okubo, Shinjuku, Tokyo 169-8555, Japan
usuba@waseda.jp