順序数の積空間の同じ定理から再三出発して

神奈川大学・工学部　平田　康史[*1]
Yasushi Hirata
Faculty of Engineering, Kanagawa University

神奈川大学　矢島　幸信
Yukinobu Yajima
Kanagawa University

1　はじめに

本稿でのすべての位相空間は regular $T_1(=T_3)$ であり，基数はすべて無限とする。

順序数 λ を位相空間とみなすとき，通常の順序位相が導入されているとする。つまり，任意の $\alpha \in \lambda$ に対して，$\{(\beta, \alpha] : \beta < \alpha\}$ が点 α の neighborhood base となる位相が導入されている。このとき，次の関係が成り立つ：

$$\text{順序数の空間} \Longrightarrow \text{線形順序位相空間} \Rightarrow \text{GO-空間} \Longrightarrow \text{monotonically normal}$$

（今後，関係図における短い矢印は，その関係性が比較的近いことを表すとする）

順序数の 2 つの部分空間による積空間に関する研究は，同じ論文における次の 2 つの定理を皮切りに，現在まで 30 年以上も続いてきた。その積空間の特殊性から考えて，これは予想外のこととも言える。

定理 1.1 (家本-大田-玉野 [20], 1992). A, B は順序数 λ の部分空間とする。このとき，次は同値。

(1) $A \times B$ は normal である．

(2) $A \times B$ は collectionwise normal である．

(3) 任意の $\mu, \nu \leq \lambda$ が $\kappa = \mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\nu) > \omega$ となるとき，次のどれかが成り立つ；

 (i) もし $\mu \notin A$ かつ $\nu \notin B$ ならば，$A \cap \mu$ は μ で stationary でないか $B \cap \nu$ は ν で stationary でないかまたは $c^{-1}(A \cap \mu) \cap d^{-1}(B \cap \nu)$ が κ で stationary となる（ここで c, d はそれぞれ μ, ν に対する normal function），

*1 本研究は科研費 (課題番号:23K03206) の助成を受けたものである．

(ii) もし $\mu \notin A$ かつ $\nu \in B$ ならば，$A \cap \mu$ は μ で stationary でないかまたは $B \cap \nu$ は ν で bounded となる，

(iii) もし $\mu \in A$ かつ $\nu \notin B$ ならば，$A \cap \mu$ は μ で bounded であるかまたは $B \cap \nu$ は ν で stationary でない．

定理 1.2 (家本-大田-玉野 [20], 1992)**.** A, B は順序数 λ の部分空間とする。このとき，次は同値。

(1) $A \times B$ は countably paracompact である．

(2) $A \times B$ は expandable である．

(3) 任意の $\mu, \nu \leq \lambda$ に対して，$\kappa = \mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\nu) > \omega$ かつ $c^{-1}(A \cap \mu) \cap d^{-1}(B \cap \nu)$ が κ で stationary でないとき（ここで c, d はそれぞれ μ, ν に対する normal function），次のどれかが成り立つ；

(i) もし $\mu \notin A$ かつ $\nu \notin B$ ならば，$A \cap \mu$ は μ で stationary でないかまたは $B \cap \nu$ は ν で stationary でない，

(ii) もし $\mu \notin A$ かつ $\nu \in B$ ならば，$A \cap \mu$ は μ で stationary でないかまたは $B \cap \nu$ は ν で bounded となる，

(iii) もし $\mu \in A$ かつ $\nu \notin B$ ならば，$A \cap \mu$ は μ で bounded であるかまたは $B \cap \nu$ は ν で stationary でない．

定理 1.1 と 1.2 における集合論的条件 (3) は，長く複雑で定理の形として不細工ではあるが，それぞれの状況での積空間 $A \times B$ の構造をよく表わしている。しかし，本稿ではこの条件 (3) を使って証明を試みるわけではないので，単に複雑な集合論的条件という程度の理解でよいだろう。

2 C^*-embedding と P-embedding

2016 年 1 月，それまでの 2 年間は我々の共同研究は中断していたが，ある雑誌の特別号への投稿依頼を契機として再開されることになった。ただ，投稿締切までの期間が極めて短かったため，結果がすぐ出そうな課題として定理 1.1 と 1.2 の周辺を考えることにした。なぜなら，上記定理の条件 (3) の状況を理解しさえすれば，後はもう一つアイデアがあれば結果が出ると感じたからである。そこで，countably paracompact 積空間 $A \times B$ のもとで，normality の一般化を考えるのは自然な発想である。normality の一般化として，すぐに思いつくのは C^*-embedding や C-embedding の概念である。

位相空間 X に対して，$S \subset X$ が C^***-embedded** (C**-embedded,** P**-embedded**) であるとは，S から閉区間 [0,1] (実数直線 $\mathbb{R}$, バナッハ空間 B) への任意の連続関数が，X 全体にまで連続関数として拡張できるとき。次の関係は明らか。

$$P\text{-embedding} \Longrightarrow C\text{-embedding} \Rightarrow C^*\text{-embedding}$$

また，次の事実はよく知られている。

事実 2.1. 位相空間 X が (collectionwise) normal であるための必要十分条件は，X の任意の閉集合が C^*-embedded または C-embedded (P-embedded) であることである。

位相空間 X の開集合 U が **cozero** であるとは，ある連続関数 $f : X \to [0, 1]$ が存在して $U = \{x \in X : f(x) > 0\}$ と表せるとき。

さらに突っ込んだ結果として，次もよく知られている。

事実 2.2. 位相空間 X の部分集合 S が C^*-embedded (C-embedded, P-embedded) であるための必要十分条件は，任意の有限 (可算，局所有限) な cozero 集合による S の被覆 $\mathcal{U}$ に対して，ある有限 (可算，局所有限) な cozero 集合による X の被覆 $\mathcal{V}$ が存在して，$\mathcal{V} \upharpoonright S$ $(= \{V \cap S : V \in \mathcal{V}\})$ が $\mathcal{U}$ を細分することである。

事実 2.2 を使って定理 1.2 の条件 (3) によって場合分けして，それぞれ議論すれば，「順序数の積空間 $A \times B$ が countably paracompact のとき，$A \times B$ の任意の C^*-embedded 閉集合が P-embedded である」ことは比較的容易に示せる。さらに考察を加えることにより，countably paracompact の条件も削除出来て，定理 1.1 の (1) と (2) の同値性に対する一般化として，次の結果を得た。

定理 2.3 ([12], 2017)**.** A, B を順序数の部分集合とする。このとき，$A \times B$ の任意の C^*-embedded 閉集合は P-embedded となる。

注意 2.4. ごく最近になって，定理 2.3 における「閉」の条件も削除可能であることが，[8] により証明された。

3　非可算積空間へ進んで

上記のように「順序数の積空間において，C^*-embedded = P-embedded」が証明された。次は「一般の位相積空間 $X \times Y$ において，C^*-embedded = P-embedded がいつ成り立つか？」の議論に移行するのは自然である。ところが，そのような議論には次の顕著な研究結果が既にある。

定理 3.1 ([5], 2000)**.** X を位相空間，A をその部分空間とする。M を discrete ではない距離空間とする。もし $A \times M$ が ($X \times M$ で) C^*-embedded ならば，それは P-embedded となる。

これは長い間未解決だった Przymunsinski の問題 (1983) の肯定的解決である。従って，位相積空間 $X \times Y$ において，この種の問題を考察しても，然したる結果は期待でき

ないと判断した。となると，考えるべき次の課題は，

「無限位相積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ において，
『C^*-embedded = C-embedded』または『C-embedded = P-embedded』
がいつ成り立つか？」である。

これに関しては，paracompact 一般距離空間（M-空間，Σ-空間, semi-stratifiable 空間など）による無限位相積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に対して，ある程度の結果はいくつか証明できるが，決定的といえるほどの結果ではない。その理由は，無限位相積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の最も簡単な場合について，よく分かっていないからだと考えた。

自然数の集合 $\{0,1,2,\cdots\}$ に discrete 位相を導入した位相空間を $\mathbb{N}$ で表す。基数 κ に対して，κ 個の $\mathbb{N}$ のコピーからなる位相積空間を $\mathbb{N}^\kappa$ で表す。

距離空間でもコンパクトでもない最も単純な無限位相積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ というと，それは積空間 $\mathbb{N}^{\omega_1}$ であろう，ここで ω_1 は最小の非可算基数である。次の問題が必然的に提起される。

問題 3.2 (2016)**.** $\mathbb{N}^{\omega_1}$ において，任意の C^*-embedded 閉集合は C-embedded となるか？

いま，$\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|\ (= 2^\omega)$ とする。この問題については，次の結果が既に発表されていた。

例 3.3 (E.Pol-R.Pol [24], 2014)**.** $\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において，ある discrete 可算閉集合で C^*-embedded であるが，C-embedded でないものが存在する。

連続体仮説 $\mathfrak{c} = \omega_1$ を仮定すると，例 3.3 は問題 3.2 を既に否定的に解決している。それだけでなく，$\mathbb{N}^{\mathfrak{c}}$ において C^*-embedded $\neq$ C-embedded が，discrete 可算閉集合というかなり強い条件でもよいことを示している。この事実を問題 3.2 を提起した時点では知らなかった。しかし，それはむしろ幸運で，次の結果を証明できたからである。

定理 3.4 ([15], 2020)**.** [Martin Axiom + 連続体仮説の否定] のもとで，$\mathbb{N}^{\omega_1}$ における任意の C^*-embedded 部分集合は，C-embedded となる。

例 3.3 と定理 3.4 によって，問題 3.2 は ZFC 公理系内では肯定も否定も決定できないことが判明した。一方，集合論的公理を仮定しない ZFC 公理系内で，次を証明できた。

定理 3.5 ([15], 2020)**.** $\mathbb{N}^{\omega_1}$ における任意の C-embedded 部分集合は，P-embedded となる。

$\mathbb{N}^{\omega_1}$ に限らず一般距離空間による無限位相積空間では，前の関係図とは印象が異なり，次のような関係図が適切であるように思える：

$$P\text{-embedding} \Rightarrow C\text{-embedding} \Longrightarrow C^*\text{-embedding}$$

4　$\mathbb{N}^\kappa$ の部分集合の基数の決定不可能性

先ずは，次の定理を思い出したい。

定理 4.1 (Baturov [1], 1990)**.** 2 点以上をもつ可分距離空間 M と基数 τ に対して，$2^\tau \le \mathfrak{c}$ であるための必要十分条件は，$M^\mathfrak{c}$ におけるある (hereditalily) normal dense 部分空間 X で，基数 τ の discrete 閉集合を含むものが存在することである。

ここで，例 3.3 と定理 3.4 を見ながら，上の定理において次のような対応を考えてみる：

$M \mapsto \mathbb{N}, \quad \mathfrak{c} \mapsto \kappa, \quad \text{normal} \mapsto C^*\text{-embedded}$

そうすると，次の問題が生じてくる。

問題 4.2. 不等式 $2^\tau \le \kappa$ を $\mathbb{N}^\kappa$ における cardinality τ をもつ C^*-embedded 閉集合で特徴づけできるか？

この問題に対して，次のような結果を得た。

定理 4.3 ([13], 2020)**.** κ を基数で $\kappa^\omega = \kappa$ となるものとする。任意の基数 τ に対して，不等式 $2^\tau \le \kappa$ が成り立つための必要条件は，$\mathbb{N}^\kappa$ において cardinality τ をもつある C^*-embedded discrete 部分集合が存在することである。

この証明は定理 4.1 のそれほど複雑ではない。定理 4.3 から，$\mathbb{N}^\mathfrak{c}$ における C^*-embedded discrete 部分集合の基数は，連続体仮説が成り立つ場合はすべて可算となり，$2^{\omega_1} = \mathfrak{c}$ の場合は非可算のものが存在することになる。つまり，

系 4.4 ([13], 2020)**.** $\mathbb{N}^\mathfrak{c}$ における非可算な C^*-embedded discrete 部分集合の有無は，ZFC 公理系内では決定できない。

これをもって $\mathbb{N}^{\omega_1}$ における C^*-embedded 部分集合の研究は一段落したように思える。

5　順序数の積空間における extent の等式

位相空間 X の **extent** とよばれる cardinal function $e(X)$ を次のように定義する：

$$e(X) = \omega \cdot \sup\{|D| : D \text{ は } X \text{ の discrete 閉集合 }\}.$$

事実 5.1. Sorgenfrey 直線 S は hereditarily Lindelöf 空間であり，$e(S \times S) = \mathfrak{c} > \omega = e(S) \cdot e(S)$ となる。

この事実から次の問題が Shelah によって提起された。

問題 5.2 (Shelah, 1978 頃)**.** 2 つの Lindelöf 空間 X, Y で，$e(X \times Y) > \mathfrak{c}$ となるものが存在するか？

この問題は，[25, 6, 4, 26] などの論文によって，無矛盾的に肯定されることが判明している。この問題を知って，我々は次の問題を考えた。

問題 5.3. どのような位相積空間 $X \times Y$ に対して，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？

しかし，このような問題設定は余りに漠然としすぎている。先ずはその研究価値があるかを判定するため，考える世界を限定して，次のような問題設定を試みた。

問題 5.4. 順序数の部分空間 A, B に対して，積空間 $A \times B$ が countably paracompact のとき，等式 $e(A \times B) = e(A) \cdot e(B)$ が成り立つか？

この問題は定理 1.2 の条件 (3) を使えば，場合分けをして比較的容易に肯定される。

位相積空間 $X \times Y$ の部分集合 R が **rectangle** (閉 **rectangle**) とは，$R = P \times Q$ の形（かつ P と Q はそれぞれ X と Y で閉集合）と表されるとき。

基数 κ が **weakly inaccessible** であるとは，κ が regular limit であるとき。この weakly inaccessible 基数の存在は，ZFC 公理系内では証明できない。

問題 5.4 について意外だったことは，weakly inaccessible cardinal の非存在の仮定が必要とはいえ，次のようにその逆も成り立つことである。

定理 5.5 ([14], 2020)**.** Weakly inaccessible cardinal が存在しないと仮定する。A, B をある順序数の部分空間とする。このとき，$A \times B$ が countably paracompact であるための必要十分条件は，$A \times B$ の任意の閉 rectangle $A' \times B'$ に対して，等式 $e(A' \times B') = e(A') \cdot e(B')$ が成り立つことである。

順序数による積空間 $A \times B$ が countably paracompact であるかどうかを，定理 1.2 の (3) によって判定するのはかなり面倒である。一方，定理 5.5 の必要十分条件によって，それを判定するのは極めて容易である。ほとんどの場合，$A \times B$ の対角線の discrete 閉集合の状況を調べれば済むからである。

注意 5.6. Weakly inaccessible cardinal の存在を仮定した場合，定理 5.5 が成り立たない例は容易に作れる。従って，この集合論的仮定を定理 5.5 から排除できない。

6 Extent の等式と不等式

位相積空間 $X \times Y$ の部分集合 R が **cozero rectangle** とは，P と Q はそれぞれ X と Y で cozero set で, $R = P \times Q$ の形で表されるとき。位相積空間 $X \times Y$ が **rectangular** [23] であるとは，$X \times Y$ の任意の有限 cozero 被覆が cozero rectangle からなるある σ-局所有限細分をもつとき。これは次元論の積定理から生まれた概念である。

問題 6.1. 位相積空間 $X \times Y$ が normal かつ rectangular であるとき，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？

問題 6.1 の否定的な部分解として，いろいろな例が論文 [16] に述べられている。しかし，この問題自体の解決には未だ至っていない。一方，この問題の肯定的な面としては，σ-空間という一般距離系ファクター X と $\mathbb{DC}$-like 空間という一般コンパクト系ファクター X をもつそれぞれの位相積空間 $X \times Y$ に対して，次のことが証明されている。

定理 6.2 ([16], 2022)**.** 位相空間 X が σ-空間とする。もし位相積空間 $X \times Y$ が normal ならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

定理 6.3 ([16], 2022)**.** 位相空間 X が $\mathbb{DC}$-like 空間とする。もし位相積空間 $X \times Y$ が normal かつ rectangular ならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つ。

位相空間 X が **monotonically normal** であるとは，X の交わらない閉集合の組 E, F に対して，ある開集合 $M(E, F)$ が対応して次の条件を満たすことである。

(i) $E \subset M(E, F) \subset \overline{M(E, F)} \subset X \setminus F$,

(ii) もし $E \subset E'$ かつ $F \supset F'$ ならば，$M(E, F) \subset M(E', F')$.

位相空間 Y が **almost discrete** とは，非孤立点を高々 1 つしかもたないとき。

上記の monotonically normal 空間 X と almost discrete 空間 Y による位相積空間 $X \times Y$ が予想外の振る舞いをすることは，長い論文 [9] の 6 章において議論された。このペアーによる位相積空間 $X \times Y$ について，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立たない場合でも，その差は最小に近いものであることが，次の 2 つの結果で判明した。

定理 6.4 ([16], 2022)**.** もし X が monotonically normal 空間であり Y が almost discrete 空間であるならば，不等式 $e(X \times Y) \leq e(X) \cdot (e(Y))^{+}$ が成り立つ。

定理 6.5 ([17], 2022)**.** もし X が monotonically normal 空間であり Y が almost discrete 空間であり，$X \times Y$ が normal ならば，不等式 $e(X \times Y) \leq (e(X))^{+} \cdot e(Y)$ が成り立つ。

定理 6.5 から次の問題が自然に生じる。

問題 6.6 ([16])**.** もし X が monotonically normal 空間であり Y が almost discrete 空間であり，$X \times Y$ が normal ならば，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ が成り立つか？特に $e(X) \cdot e(Y) = \omega$ の場合はどうか?

この問題に対しては，次のような解答を得た。

定理 6.7 ([17], 2022)**.** 任意の基数 κ に対して，次は同値。

(a) ある monotonically normal 空間 X と almost discrete 空間 Y で，$X \times Y$ が normal かつ $e(X \times Y) > e(X) \cdot e(Y) = \kappa$ となるようなものが存在する。

(b) $\kappa^+ \to (\kappa^+; fin\ \kappa^+)^2_2$ が成り立たない。

注意 6.8. 上の条件 (b) における $\kappa^+ \to (\kappa^+; fin\ \kappa^+)^2_2$ は，その定義まではここでは言及しないが，ある集合論的公理と考えてほしい。しかも，それは ZFC 公理系と独立な公理である。従って，定理 6.7 から問題 6.6 は ZFC 公理系内では，否定も肯定も決定できない問題ということになる。

定理 6.7 によって，等式 $e(X \times Y) = e(X) \cdot e(Y)$ の問題は，細かい問題は色々と残っているけれども，大きなところでは一段落したように思える。

7　非可算積空間上の extent の等式

基数関数 extent に関する位相積空間 $X \times Y$ 上の等式を前の章で扱った。次に無限積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の上で extent の等式が成り立つかを考えるのは自然の成り行きである。

この章では，θ を最小の weakly inaccessible 基数とする（定理 5.5 参照)。まずは，次の結果が大きく関係してくる。

定理 7.1 (Mycielski [21], 1964)**.** 任意の基数 $\kappa < \theta$ に対して, $\mathbb{N}^\kappa$ において, ある discrete 閉集合で基数 κ のものが存在する. それゆえ，$e(\mathbb{N}^\kappa) = \kappa$ となる.

各ファクター X_λ が compact のとき，$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ も compact となってしまうので，このような場合は排除して，次のような問題を設定できる。

問題 7.2. 無限積空間 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の各ファクター X_λ は compact でないとする，ここで $|\Lambda| < \theta$ とする。各ファクター X_λ がどのような一般距離空間ならば，等式 $e(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) = |\Lambda| \cdot \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ が成り立つか？

注意 7.3. 上の問題において，各ファクター X_λ は compact でない（正確には，可算 compact でない）から, 定理 7.1 より不等式 $e(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \geq |\Lambda|$ は常に成り立つ。従って，この問題の等式右辺から $|\Lambda|$ を取り除くことはできない。

位相空間 X が **strict p-空間** [2] であるとは，X の開被覆の列 $\{\mathcal{U}_n\}$ で，次の条件を満たすものが存在するとき，

(i) 任意の $x \in X$ に対して，$\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n)$ が compact である，

(ii) 開集合 U が $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n)$ を含むとき，ある $m \in \omega$ が存在して $\mathrm{St}(x,\mathcal{U}_m) \subset U$ となる，ここで $\mathrm{St}(x,\mathcal{U}_n) = \bigcup\{U \in \mathcal{U}_n : x \in U\}$ とする。

位相空間 X が **strong Σ-空間** [22] であるとは，X の局所有限な閉被覆の列 $\{\mathcal{F}_n\}$ と compact 集合からなる X の被覆 $\mathcal{K}$ が存在して，「開集合 U が $K \in \mathcal{K}$ を含むならば，ある $F \in \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ が存在して $K \subset F \subset U$ となる」を満たすとき。

これらを含む一般距離空間の関係図は次の通り:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{距離空間} & \rightarrow & \text{Moore 空間} & \rightarrow & \text{strict } p\text{-空間} \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
M_3\text{-空間} & \rightarrow & \sigma\text{-空間} & \rightarrow & \text{strong } \Sigma\text{-空間}
\end{array}$$

この strict p-空間と strong Σ-空間を使って，問題 7.2 に対して次の結果を得た。

定理 7.4 ([11], 2022)**.** 無限積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の各ファクター X_λ は compact でないとし，$|\Lambda| < \theta$ とする。もし各ファクター X_λ が strict p-空間または strong Σ-空間ならば，等式 $e(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda) = |\Lambda| \cdot \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ が成り立つ。

注意 7.3 から，この定理の等式に $|\Lambda|$ の存在は不可欠ではあるが，煩わしい気もする。そこで，次の問題が提起される。

問題 7.5. 無限積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の部分空間 S で等式 $e(S) = \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ が成り立つようなものが存在するか？

無限積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ から 1 点 $s = \langle s_\lambda \rangle$ をとる。このとき，

$$\Sigma = \{x = \langle x_\lambda \rangle \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\} : |\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq s_\lambda\}| \leq \omega\}$$

と定義される $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の部分空間を，$\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ による **Σ-product** [3] という。

問題 7.5 に対して，なぜ Σ-product の概念がすぐに思い浮かぶかというと，1978 年に Kombarov [18] が主定理の下に注意として，次のことを述べているからである：

「Σ を p-空間からなる族 $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ による Σ-product とする。このとき，等式 $t(\Sigma) = \sup\{t(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ が成り立つ，ここで $t(X)$ は X の tightness を表す」

上の定理 7.4 と同様にして，次の結果を得た。

定理 7.6 ([11], 2022)**.** Σ を strict p-空間または strong Σ-空間からなる族 $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ による Σ-product とする。このとき，$e(\Sigma) = \sup\{e(X_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ が成り立つ

注意 7.7. 定理 7.6 における「strict p-空間」を「locally compact 空間 （従って，p-空間)」に置き換えることができないことは，無矛盾的に判明している。

8 同一定理に再三戻って

位相空間 X が **(strongly) collectiowise Hausdorff** であるとは，X の任意の discrete 閉集合 D に対して，ある disjoint (discrete) な開集合族 $\{U_d : d \in D\}$ で，任意の $d \in D$ に対して $d \in U_d$ となるものが存在するとき。

normal 空間が collectionwise Hausdorff ならば，strongly collectionwise Hausdorff となることは容易に分かる。ここでは，次の結果が今後の方向を示唆している。

定理 8.1 ([7], 2009)**.** 順序数の部分空間 A, B に対して，その積空間 $A \times B$ は collectionwise Hausdorff である.

これまでの研究で重要な役割を演じてきた概念は，「C^*-embedded」と「discrete 閉集合」である。次に考えることは，その 2 つを組合わせた結果を位相積空間のなかで実現できないかと考えるのも自然であろう。それが意味あるかどうかをチェックするためには，また順序数の積空間の世界で最初は考えてみる。そうすると，次の結果が判明した。

定理 8.2 (平田-家本-矢島, [10])**.** 順序数の部分空間 A, B に対して，次は同値。

(1) $A \times B$ は countably paracompact である.
(2) $A \times B$ は strongly collectionwise Hausdorff である.
(3) $A \times B$ の任意の discrete 閉部分集合が C^*-embedded である。

これを発展させるには，[19] における議論のように定理 8.2 の結果が，順序数の積空間の任意の countably paracompact 部分空間 X に対して，どこまで同値条件が言えるかであろう。すなわち，次の問題が提起される。

問題 8.3. 順序数 μ, ν による積空間 $\mu \times \nu$ の部分空間 X に対して，次のどれが同値となるか？

(1) X は countably paracompact である.
(2) X は strongly collectionwise Hausdorff である.
(3) X の任意の discrete 閉部分集合が C^*-embedded である。
(4) X は expandable である.

この問題は目下研究中である。その途中経過の発表として [10] を参照されたい。

本稿では順序数の積空間の同一定理から始まり，一般の位相積空間の議論に移行していくという思考パターンがある。その観点から見て，次のような問題が考えられる。

問題 8.4. 定理 8.2 の条件 (3) が，積空間 $\mathbb{N}^{\omega_1}$ や compact 空間 K 上の関数空間 $C_p(K)$ において意味をもつか？

研究を継続していくには，ひとつの思考パターンをもちえることが有効と思われる。なぜなら，ごく限られた数学者を除けば，新しいアイデアが湯水のごとく湧いてくることはないからである。しかし，その思考パターンがいつまでも続かないことも確かである。その意味では，問題 8.4 のように新しい世界にこの議論が発展していくことを期待したい。

参考文献

[1] D. P. Baturov, *Normality in dense subspaces of products*, Topology and Appl. **36** (1990), 111–116.

[2] D. K. Burke and R. A. Stoltenberg, *A note on p-spaces and Moore spaces*, Pacific J. Math. **30** (1969), 601–608.

[3] H. H. Corson, *Normailty in subsets of product spaces*, Amer. J. Math. **81** (1959), 785–796.

[4] I. Gorelic, *On powers of Lindelöf spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae **35** (1994), 383–401.

[5] V. Gutev and H. Ohta, *Does C^*-embedding imply C-embedding in the realm of products with a non-discrete metric factor?*, Fund. Math. **163** (2000), 241–265.

[6] A. Hajnal and I. Juhaśz, *Lindelöf spaces à la Shelar*, Collq. Math. Soc. Bolyai. **23** North-Holland 1978, 555-567.

[7] Y. Hirata, *The collectionwise Hausdorff property of products of two or three subspaces of ordinals*, Houston. J. Math. **35** (2009), 891–901.

[8] Y. Hirata, N. Kemoto and H. Ohta, *C^*-embedded dense subsets of z-neighborhood-sublinear spaces are P-embedded*, Topology Proc. **62** (2023), 99–116.

[9] Y. Hirata, N. Kemoto and Y. Yajima, *Products of monotonically normal spaces with various special factors*, Topology and Appl. **164** (2014), 45–86.

[10] 平田-家本-矢島，順序数の積の部分空間における可算パラコンパクト性と閉離散部分集合の C^*-埋め込み，日本数学会秋季総合分科会アブストラクト，東北大学，2023 年.

[11] Y. Hirata, T. Usuba and Y. Yajima, *Equality for the extent of infinite products and Σ-products*, Topology and Appl. **307** (2022), 107946, 12 pp.

[12] Y. Hirata and Y. Yajima, *C^*-embedding implies P-embedding in products of ordinals*, Topology Appl. **231** (2017), 251-265.

[13] Y. Hirata and Y. Yajima, *Undecidability of the cardinality of C^*-embedded discrete subsets in products of natural numbers*, Topology Proc. **56** (2020), 85–95. .

[14] Y. Hirata and Y. Yajima, *A characterization of the countable paracompactness for products of ordinals*, Topology and Appl. **282** (2020), 107325, 10 pp.

[15] Y. Hirata and Y. Yajima, *C^*-, C- and P-embedded subsets in products and the undecidability of a certain property on $\mathbb{N}^{\omega_1}$*, Topology and Appl. **283** (2020), 107350, 16 pp.

[16] Y. Hirata and Y. Yajima, *Inequality and equality for the extent of products with a special factor*, Topology Proc. **59** (2022), 223–241.

[17] Y. Hirata and Y. Yajima, *Undecidability for the extent of products of a monotonically normal space and a special factor*, Topology and Appl. **315** (2022), 108157, 22 pp.

[18] A. P. Kombarov, *On tightness and normality of Σ-products*, Soviet Math. Dokl. **19** (1978), 403–407.
[19] N. Kemoto, T. Nogura, K. D. Smith and Y. Yajima, *Normal subspaces in products of two ordinals*, Fund. Math. **151** (1996), 279–297.
[20] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Topology Appl. **45** (1992), 245–260.
[21] J. Mycielski, *α-incompactness of N^α*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Math. **12** (1964), 437–438.
[22] K. Nagami, *Σ-spaces*, Fund. Math. **65** (1969), 169–192.
[23] B. A. Pasynkov, *On the dimension of rectangular products*, Soviet Math. Dokl. **16** (1975), 344–347.
[24] E. Pol and R. Pol, *Note on countable closed discrete sets in products of natural numbers*, Topology and Appl. **175** (2014), 65–71.
[25] S. Shelah, On some problems in general topology, Contempt. Math. **192**, (1996), 91–101.
[26] T. Usuba, *Products of Lindelöf space with points G_δ*, Topology and Appl. **252** (2019), 90–96.

Faculty of Engineering, Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: hirata-y@kanagawa-u.ac.jp

Kanagawa University
Yokohama 221-8686, JAPAN
E-mail address: yajimy01@kanagawa-u.ac.jp