Boltyanskii-Kodamaの例と関連する話題について

小山　晃（早稲田大学）

Akira Koyama (Waseda University)

概 要

定理 (Menger, 1928).　任意のコンパクト距離空間 X, Y について, $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ である. したがって, 特に, $\dim X^2 = \dim(X \times X) \leq 2n$ である.

　ここで, $\dim X^2 = \dim(X \times X) = 2n$ であるコンパクト距離空間を (dimensionally) **standard**, standard ではないコンパクト距離空間を **exceptional** とよぶことにする.

は「次元論の積定理」としてよく知られている. ここで示されているのは不等式であって等式ではない. 実際, 最初の不等式で等号が成り立たないことは, Pontryagin (1930) が素数 $p \neq q$ に対して 2 次元コンパクト距離空間 Π_p,Π_q, $\dim(\Pi_p \times \Pi_q) = 3$ を構成し, 示された.

　一方, 多面体や位相多様体のみならず, すべてのコンパクト ANR が standard であり, 上記の Pontryagin の例 Π_p も standard である. exceptional なコンパクト距離空間の存在は, Boltyanskii (1949) と児玉 (1958) が独立に, 今日「Boltyanskii-Kodama の例」と呼ばれる 2 次元コンパクト距離空間 X, $\dim X^2 = 3$ を構成し, 証明された. しかし, 彼らの原論文は難解である. ここではその例を

　K. Nagami, *Dimension Theory*, Pure and Applied Mathematics vol. 37, Academic Press, New York, 1970.

の児玉による Appendix, Cohomological Dimension Theory をもとに再構成し, その本質的な箇所を明確化する.

　なお, コホモロジー次元の定義および必要な定理を Appendix にまとめておく.

1　(a, b)-Modifications

　二つの連続写像 : $X \xleftarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ の **double mapping cylinder** を, 商空間

$$M(f,g) = \left(X \bigsqcup Y \times [0,1] \bigsqcup Z\right) / \sim, \quad \text{ただし, } f(y) \sim (y,0),\ \ g(y) \sim (y,1) \ \text{ for } y \in Y$$

と定義する. 例えば, $X = Y$, $f = \mathrm{id}_X$ ならば, $M(f,g)$ は g の **mapping cylinder**, Z が一点空間ならば, $M(f,g)$ は f の **mapping cone** $Cone(f)$ である. ここで, X, Z は自然に $M(f,g)$ の閉部分集合と同一視する.

　連続写像 $Y \ni y \longmapsto (y, 1/2) \in M(f,g)$

は自然な埋め込みとなる. また, Y を自然に同一視することで, $M(f,g) = M(f) \cup M(g)$ と見なせる. X を $M(f,g)$ の**境界**と呼ぶことにして, $\partial M(f,g)$ と書くことにする.

　X, Y, Z が多面体, f, g が PL 写像ならば, $M(f,g)$ が X, Z を部分多面体として含む多面体である. さらに, f が X の単体分割 τ_K, Y の単体分割 τ_L について単体的 ならば, $\tau_K \cup \tau_L \subset \tau$ である $M(f,g)$ の単体分割 τ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "h_X"] & Y \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h_Y"] & Z \arrow[d, "h_Z"] \\
X' & Y' \arrow[l, "f'"'] \arrow[r, "g'"] & Z'
\end{tikzcd}
\qquad (D)
$$

命題 1.1. (1) 図式 (D) がホモトピー可換ならば, 連続写像 $h : M(f,g) \longrightarrow M(f',g')$,

$$
\begin{aligned}
&h(x) = h_X(x) \quad \textit{for all } x \in X \textit{ and } \quad h(z) = h_Z(z) \quad \textit{for all } z \in Z, \\
&h([y,1/2]) = [h_Y(y), 1/2] \quad \textit{for all } y \in Y
\end{aligned}
$$

が存在する.

(2) 図式 (D) が可換ならば, 連続写像 $h : M(f,g) \longrightarrow M(f',g')$ はさらに,

$$h([y,t]) = [h_Y(y), t] \quad \textit{for all } (y,t) \in Y \times [0,\ 1]$$

であるようにとれる.

(1), (2) いずれの場合も h は $M(f,g)$ の境界 X 上で h_X と一致するので, h を h_X の**拡張**と呼ぶ.

命題1.1 は次の補題から直ちにわかる.

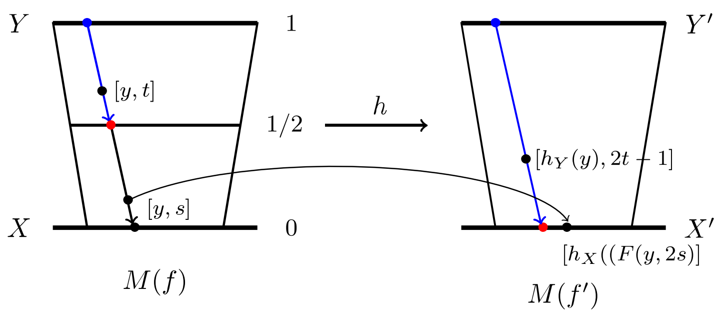
補題 1.2. 図式 (D) の左四角がホモトピー可換 ならば, 連続写像 $h : M(f) \longrightarrow M(f')$,

$$h(x) = h_X(x) \quad \textit{for all } x \in X \textit{ and } \quad h(y) = h_Y(y) \quad \textit{for all } y \in Y$$

が存在する.

証明. ホモトピー $F : Y \times [0,\ 1] \longrightarrow X'$, $F_0 = h_X \circ f$, $F_1 = f' \circ h_Y$ をとり, 連続写像 $h : M(f) \longrightarrow M(f')$ を次のように定義すればよい.

$$
\begin{aligned}
h([y,t]) &= \begin{cases} [h_Y(y), 2t-1] & \text{for } t \in [0,\ 1/2], \\ [F(y,2t)] & \text{for } t \in [1/2, 1], \end{cases} \\
h([x]) &= [h_X(x)] \qquad\qquad\qquad \text{for } x \in X.
\end{aligned}
$$



$\square$

"$X = Y = Z = \mathbb{S}^{n-1}$, ただし, $n \geq 2$" である場合を考えよう．任意の整数 $a \neq 0$ に対して, 次数 a の連続写像 $\mu_a : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ とする．ただし, $a = 0$ のとき, $\mu_0 =$ the constant map とする．$n = 2$ のとき, $M(2,1)$ は Möbius band なので, 任意の整数 a, b に対して, $M(\mu_a, \mu_b)$ を, タイプ $(a,\, b)$ の n **次元 Möbius band** と呼び, $M(a,b)$ と書く．特に, $M(a,0)$ は μ_a の mapping cone である．

n 次元 polyhedron $|K|$, $n \geq 2$, 整数 $a \neq 0$, b とする．任意の n-単体 Δ に対して, $(M_\Delta, \partial M_\Delta)$ を n-dimensional Möbius band $M(a,b)$ のコピーと subpolyhderon の組として, ∂M_Δ は M_Δ の triangulation T_Δ によって ∂M_Δ と $\partial \Delta$ は単体同型であるようにとる．このとき, 単体同型写像 $h_\Delta : \partial M_\Delta \xrightarrow{\cong} \partial \Delta$ として, M_Δ を $K^{(n-1)}$ に貼り付ける．このようにして得られる n 次元 polyhedron

$$Y = |K^{(n-1}| \cup \bigcup_{\dim \Delta = n} M_\Delta,$$

として, 連続写像 $f : Y \longrightarrow |K|$,

$$f|_{|K^{(n-1)}|} = \mathrm{id}_{|K^{(n-1)}|}, \quad \text{and} \quad f(M_\Delta \setminus \partial M_\Delta) \subset \Delta \setminus \partial \Delta \quad \text{for each } n\text{-simplex } \Delta$$

と定義する．この n 次元 polyhedron Y と連続写像 $f : Y \longrightarrow |K|$ の組を K の (a,b)**-modification** と呼ぶ.

定義 1.3. 単体的複体 K, L とする．連続写像 $f : |K| \longrightarrow |L|$ が**組合せ的** (*combinatorial*) であるとは, L の任意の部分複体 L_0 について, $f^{-1}(L_0)$ が K の部分複体であることをいう.

K の (a,b)-modification Y の単体分割 τ_Y は, $|\tau_Y^{(n-1)}| \supset |K^{(n-1)}|$ であるようにとると, $f : (Y, \tau_Y) \longrightarrow (|K|, K)$ は組合せ的である.

射影的極限のコホモロジー次元を評価するために連続写像のコホモロジー次元の概念と次の補題を用いる.

定義 1.4. 多面体 K, L として, L の単体分割を T_L とする．連続写像 $f : K \longrightarrow L$ について, $\dim_G(f, T) \leq n$ であるとは, T に関する任意の部分多面体 $L_0 \subset L$ と任意の連続写像 $\alpha : L_0 \longrightarrow K(G,n)$ に対して, 連続写像 $\beta : K \longrightarrow K(G,n)$,

$$\beta|_{f^{-1}(L_0)} = \alpha \circ f|_{f^{-1}(L_0)}$$

が存在することをいう.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[rrd, dashed, bend left, "\beta"] & L & \\
f^{-1}(L_0) \arrow[u, "\cup"] \arrow[r, "f|_{f^{-1}(L_0)}"] & L_0 \arrow[u, "\cup"] \arrow[r, "\alpha"] & K(G,n)
\end{tikzcd}$$

命題 1.5. $n > 1$, $\mathbb{S}^{n-1} \xleftarrow{\mu_a} \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\mu_b} \mathbb{S}^{n-1}$ とする.

(1) a は *p-divisible* ならば, 任意の連続写像 $f : \partial M(a,b) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ が連続写像 $\widetilde{f} : M(a,b) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ へ拡張できる.

(2) G が *p-divisible* な可換群, $b = p^j$, $j > 0$ ならば, 任意の連続写像 $f : \partial M(a,b) \longrightarrow K(G, n-1)$ が連続写像 $\widetilde{f} : M(a,b) \longrightarrow K(G, n-1)$ へ拡張できる

証明. (1) $\deg \mu_a$ は p-divisible だから, $\deg(f \circ \mu_a)$ も p-divisible. よって, $f \circ \mu_a \simeq 0$. したがって, 次の図式はホモトピー可換であり, 命題1.1 から, f は $\overline{f} : M(a,b) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n) \times \mathbb{I}$ へ拡張できる. $\widetilde{f} = \pi \circ \overline{f} : M(a,b) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ へ拡張できる.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \arrow[d, "f"] & \mathbb{S}^{n-1} \arrow[l, "\mu_a"'] \arrow[r, "\mu_b"] \arrow[d, "0"] & \mathbb{S}^{n-1} \arrow[d, "0"] \\
K(\mathbb{Z}_p, n-1) & K(\mathbb{Z}_p, n-1) \arrow[l, "1"'] \arrow[r, "1"] & K(\mathbb{Z}_p, n-1)
\end{tikzcd}$$

(2) $[f \circ \mu_a] \in G = \pi_{n-1}(K(G, n-1))$ は p-divisible だから, 連続写像 $g : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow K(G, n-1)$, $\deg(g \circ \mu_b) = \deg(f \circ \mu_a)$ が存在する. したがって, 次の図式はホモトピー可換であり, (1) と同様に, f は $\widetilde{f} : M(a,b) \longrightarrow K(G, n-1)$ へ拡張できる.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^{n-1} \arrow[d, "f"] & \mathbb{S}^{n-1} \arrow[l, "\mu_a"'] \arrow[r, "\mu_b"] \arrow[d, "f \circ \mu_a"] & \mathbb{S}^{n-1} \arrow[d, "g"] \\
K(G, n-1) & K(G, n-1) \arrow[l, "1"'] \arrow[r, "1"] & K(G, n-1)
\end{tikzcd}$$

□

補題 1.6. n 次元多面体 K ($n \geq 2$) とその単体分割 τ, 整数 $a \neq 0$, b とする. K の (a,b)-*modification* $f_K : Y \longrightarrow K$ について,

(1) a は *p-divisible* ならば, $\dim_{\mathbb{Z}_p}(f_K, \tau) \leq n-1$.

(2) G が *p-divisible* な可換群, $b = p^j$, $j > 0$ ならば, $\dim_G(f_K, \tau) \leq n-1$.

証明. (1) K の任意の部分多面体 $K_0 \subset K$ と連続写像 $\varphi : K_0 \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ をとる. このとき, $K_0 \supset |\tau^{(n-1)}|$ であると仮定してよい. よって, 任意の n 単体 $\Delta \in \tau$, $\Delta \not\subset K_0$ に対して $\varphi \circ f_K|_{f^{-1}(\partial\Delta)} : f_K^{-1}(\partial\Delta) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ が, $f_K^{-1}(\Delta)$ へ拡張できることを示せばよい.

$f_K^{-1}(\Delta) = M(a,b) \subset \partial M(a,b) = \partial\Delta = f_K^{-1}(\partial\Delta)$, $f_K|_{f_K^{-1}(\partial\Delta)} = \mathrm{id}_{f_K^{-1}(\partial\Delta)}$ だから, $\varphi|_{\partial M(a,b)} : \partial M(a,b) \longrightarrow K(\mathbb{Z}_p, n-1)$ が $M(a,b)$ へ拡張できればよい. 実際, a は p-divisible だから, 命題1.5 (1) から, $\varphi|_{\partial M(a,b)}$ は $M(a,b)$ へ拡張できる. したがって, $\dim_{\mathbb{Z}_p}(f_K, \tau) \leq n-1$ である.

同様に, 命題1.5 (2) が, (2) を導く. □

2 Boltyanskii-Kodama's examples

この節では, 整数 $n \geq 2$, 素数 p を固定して考えている. 補題1.6 の整数の組 (a,b) で意味をもつ最小の組はそれぞれ $(p,0)$, $(1,p)$ であり, 次のように書き下せる.

命題 2.1. n 次元多面体 K $(n \geq 2)$ とその単体分割 τ とする.

(1) K の $(p,0)$*-modification* $\psi_K : K_{(p,0)} \longrightarrow K$ について, $\dim_{\mathbb{Z}_p}(\psi_K, \tau) \leq n-1$.

(2) K の $(1,p)$*-modification* $\varphi_K : K_{(1,p)} \longrightarrow K$ について, $\dim_G(\varphi_K, \tau) \leq n-1$ *for any* p*-divisible abelian group* G.

n 次元コンパクト多面体と組合せ的連続写像からなる射影列 $\{X_i, f_{i-1,i}\}$ を次のように帰納的に定義する.

$X_0 =$ (the Moore space $\mathbb{S}^{n-1} \cup_{\mu_p} \mathbb{D}^n$) とその単体分割 τ_0, mesh $[\tau_0] \leq 1$, $\mathbb{S}^{n-1} \subset |\tau_0^{(n-1)}|$ をとる.

$i > 0$ について, n 次元コンパクト多面体 X_{i-1} と単体分割 τ_{i-1}, mesh $[\tau_{i-1}] \leq 1/2^{i-1}$ が得られていると仮定する.

Case 1°. $i \geq 1$ が奇数のとき, (X_{i-1}, τ_{i-1}) の $(1,p)$-modification:

$$f_{i-1,i} = \varphi_{X_{i-1}} : X_i = (X_{i-1})_{(1,p)} \longrightarrow X_{i-1}$$

をとり, X_i の単体分割 τ_i, mesh $[\tau_i] \leq 1/2^i$ をとる.

Case 2°. $i > 1$ が偶数のとき, (X_{i-1}, τ_{i-1}) の $(p,0)$-modification:

$$f_{i-1,i} = \psi_{X_{i-1}} : X_i = (X_{i-1})_{(p,0)} \longrightarrow X_{i-1}$$

をとり, X_i の単体分割 τ_i, mesh $[\tau_i] \leq 1/2^i$ をとる.

コンパクト距離空間

$$X(p) = \varprojlim \{X_i, f_{i-1,i}\}$$

を定義して, $X(p)$ が exceptional な n 次元コンパクト距離空間であることを示していく.

今, $\dim X_i = n$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ だから,

$$\dim Z(p) \leq n.$$

$\mathbb{S}^{n-1} \subset |\tau_0^{(n-1)}| \subset |\tau_1^{(n-1)}| \subset \dots$ だから, $\mathbb{S}^{n-1} \subset X(p)$. よって, 任意の可換群 H について,

$$n - 1 = \dim_H \mathbb{S}^{n-1} \leq \dim_H X(p) \leq \dim X(p) \leq n.$$

また, 命題 2.1 と次に示す補題 2.2 から,

(1) $\dim_{\mathbb{Z}_p} X(p) = n - 1$.

(2) G が p-divisible ならば, $\dim_G X(p) = n - 1$.
i.e. $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X(p) = \dim_{\mathbb{Q}} X(p) = n - 1$,
任意の素数 $q \neq p$ について, $\dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} X(p) = \dim_{\mathbb{Z}_q} X(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} X(p) = n - 1$.

である. (1), (2) は, $X(p)$ が exceptional であることを示すには十分なコホモロジー次元の条件を与えているが, $\dim X(p) = n$ であるか現段階ではわからない. 実際, $\dim X(p) = n$ を示すにはこのままでは材料不足である. そのために (a,b)-modification の代数的性質を明らかにしていく.

ここで, $\mathcal{C}$ をすべての有限群から成る Serre class, $\mathcal{C}_p$ は有限 p-群から成る Serre class とする.

補題 2.2. コンパクト距離空間 X はコンパクト多面体の射影系 $\{K_i, f_{i,i+1}\}$ の極限とする．おのおのの K_i は単体分割 τ_i と距離 ρ_i が与えられ,

$$\lim_{i\to\infty} \mathrm{mesh}\,[f_{k,k+i}(\tau_{k+i})] = 0 \quad \textit{for all } k \geq 1$$

とする．このとき, $f_{i,i+1}$ が τ_{i+1}, τ_i に関して組合せ的かつ $\dim_G(f_{i,i+1}, \tau_i) \leq n$ *for infinitely many* i ならば, $\dim_G X \leq n$ である．

証明. 任意の閉部分集合 $A \subset X$ と連続写像 $\varphi : A \longrightarrow K(G,n)$ をとる．$K(G,n)$ は ANR だから,

$$i \geq 1,\ \ \text{連続写像}\ \varphi_i : f_i(A) \longrightarrow K(G,n),\ \varphi_i \circ f_i|_A \simeq \varphi$$

が存在する．さらに,

$$\text{開集合}\ U \supset f(A),\ \text{連続写像}\ \widetilde{\varphi}_i : U \longrightarrow K(G,n),\ \widetilde{\varphi}_i|_{f(A)} = \varphi_i$$

が存在する．このとき, 仮定から,

$$j \geq i,\quad f_{i,j}(st(f_j(A), \tau_j)) \subset U$$

が存在する．ここで, K_j の部分複体 $L = st(f_j(A), \tau_j)$ とすると, $\dim_G(f_{j,j+1}, \tau_j) \leq n$ だから,

$$\text{連続写像}\ \overline{\varphi}_{j+1} : K_{j+1} \longrightarrow K(G,n), \overline{\varphi}_{j+1} : K_{j+1}|_{f^{-1}_{j,j+1}(L)} = \widetilde{\varphi}_i \circ f_{i,j+1}|_{f^{-1}_{j,j+1}(L)}$$

が存在する．このとき,

$$(\overline{\varphi}_{j+1} \circ f_{j+1})|_A = \overline{\varphi}_{j+1} \circ (f_{j,j+1}|A) = \widetilde{\varphi}_i \circ f_{i,j+1} \circ (f_{j,j+1}|A) = \varphi_i \circ (f_i|A) \simeq \varphi.$$

したがって, $K(G,n)$ の homotopy extension property から, φ は X へ拡張できる． □

命題 2.3. n 次元コンパクト多面体 K とその単体分割 T とする．

(1) $(p,0)$-*modification* $\psi_K : K_{(p,0)} \longrightarrow K$ について, $\psi_K^* : H^n(K) \longrightarrow H^n(K_{(p,0)})$ は単射かつ $\mathcal{C}_p$-同型写像である．

(2) $(1,p)$-*modification* $\varphi_K : Y \longrightarrow K$ は同型写像 $\varphi_K^* : H^*(K; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\cong} H^*(Y; \mathbb{Z}_p)$. を導く．

証明. (1) 組 $(K, K^{(n-1)})$, $(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)}))$ のコホモロジー完全列から成る可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^{n-1}(\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \longrightarrow & H^n(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \longrightarrow & H^n(K_{(p,0)}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle (\psi_K|_{\dots})^*}\uparrow & & {\scriptstyle \psi_K^*}\uparrow & & {\scriptstyle \psi_K^*}\uparrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & H^{n-1}(K^{(n-1)}) & \longrightarrow & H^n(K, K^{(n-1)}) & \longrightarrow & H^n(K) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

定義から, $K_{(p,0)}^{(n-1)} = K^{(n-1)}$, $\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}) = K^{(n-1)}$ かつ $\psi_K|_{K^{(n-1)}} = \mathrm{id}_{K^{(n-1)}}$ だから, $i \leq n-1$ ならば $(\psi_K|_{K^{(n-1)}})^* : H^i(K^{(n-1)}) \cong H^i(\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}))$ かつ $H^n(K^{(n-1)}) = H^n(\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) = 0$. よって,

$$\psi_K^* : H^n(K, K^{(n-1)}) \longrightarrow H^n(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)}))$$

が単射かつ $\mathcal{C}_p$-同型写像であることを示せば十分である.

次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
H^n(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \xleftarrow{\cong} & H^n(K_{(p,0)}/\,\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) \\
{\scriptstyle \psi_K^*}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \widetilde{\psi}_K^*} \\
H^n(K, K^{(n-1)}) & \underset{\cong}{\longleftarrow} & H^n(K/\,K^{(n-1)})
\end{array}$$

ただし, 同型写像は射影 $K_{(p,0)} \longrightarrow K_{(p,0)}/\,\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})$, $K \longrightarrow K/\,K^{(n-1)}$ から導かれる.

連続写像 $\widetilde{\psi}_K : K_{(p,0)}/\,\psi_K^{-1}(K^{(n-1)} \longrightarrow K/\,K^{(n-1)}$ は ψ_K から導かれる.

$K/\,K^{(n-1)}$ は n 次元球面のブーケ $\bigvee_\Delta \mathbb{S}^n_\Delta$, $K_{(p,0)}/\,\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}$ は $\mu_p : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ の mapping cone $Cone(\mu_p)_\Delta$ のブーケ $\bigvee_\Delta Cone(\mu_p)_\Delta$ である.

$$\begin{array}{ccccc}
(K_{(p,0)}, \psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & \longrightarrow & (K_{(p,0)}/\,\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}), *) & = & (\bigvee_\Delta Cone(\mu_p)_\Delta, *) \\
{\scriptstyle \psi_K}\big\downarrow & & {\scriptstyle \widetilde{\psi}_K}\big\downarrow & & {\scriptstyle \bigvee_\Delta \widetilde{\psi}_K|_{Cone(\mu_p)_\Delta}}\big\downarrow \\
(K_{(p,0)}, K^{(n-1)}) & \longrightarrow & (K_{(p,0)}/\,K^{(n-1)}, *) & = & (\bigvee_\Delta \mathbb{S}^n_\Delta, *)
\end{array}$$

おのおのの Δ について, $\psi_K(Cone(\mu_p)_\Delta) \subset \mathbb{S}^n_\Delta$ だから, $\widetilde{\psi}_K|_{Cone(\mu_p)_\Delta} = \widetilde{g}_\Delta$.

一方, 準同形写像 $(\widetilde{\psi}_K|_{Cone(\mu_p)})^* : H^n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H^n(Cone(\mu_p))$ は, $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}$ に対応する. よって, $(\widetilde{\psi}_K|_{Cone(\mu_p)})^*$ は, 単射かつ $\mathrm{Coker}\,(\widetilde{\psi}_K|_{Cone(\mu_p)})^* = \mathbb{Z}_p$.

$$\begin{array}{ccc}
H^n(K_{(p,0)}/\,\psi_K^{-1}(K^{(n-1)})) & = & \bigoplus_\Delta H^n(Cone(\mu_p)_\Delta) \\
{\scriptstyle \widetilde{\psi}_K^*}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \oplus_\Delta \widetilde{g}_\Delta^*} \\
H^n(K_{(p,0)}/\,K^{(n-1)}) & = & \bigoplus_\Delta H^n(Sp^n_\Delta)
\end{array}$$

したがって, $\widetilde{\psi}_K^* : H^n(K/\,K^{(n-1)}) \longrightarrow H^n(K_{(p,0)}/\,\psi_K^{-1}(K^{(n-1)}))$ は単射かつ $\mathcal{C}_p$-同型写像である.

(2) n 次元多面体 P の n-単体 Δ の対して, Δ に関する $(1,p)$-modification $\varphi : \widetilde{P} = (P \setminus \mathrm{Int}\,\Delta) \cup M(1,p) \longrightarrow P$ として,

$$\varphi^* : H^n(P; \mathbb{Z}_p) \cong H^n(\widetilde{P}; \mathbb{Z}_p)$$

であることを示す. $(\widetilde{P}; P \setminus \mathrm{Int}\,\Delta, M(1,p))$, $(P; P \setminus \mathrm{Int}\,\Delta, \Delta)$ の Mayer-Vietoris 完全列の可換図 :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^{n-1}(P \setminus \mathrm{Int}\,\Delta; \mathbb{Z}_p) \oplus H^{n-1}(M(1,p); \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{k_1^* - k_2^*} & H^{n-1}(\partial\Delta; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^n(\widetilde{P}; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^n(P \setminus \mathrm{Int}\,\Delta; \mathbb{Z}_p) \\
\big\uparrow & & \| & & \big\uparrow{\scriptstyle f^*} & & \| \\
H^{n-1}(P \setminus \mathrm{Int}\,\Delta; \mathbb{Z}_p) \oplus H^{n-1}(\Delta; \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{k_1^*} & H^{n-1}(\partial\Delta; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^n(P; \mathbb{Z}_p) & \longrightarrow & H^n(P \setminus \mathrm{Int}\,\Delta; \mathbb{Z}_p),
\end{array}$$

ただし, 包含写像 $k_1 : \partial\Delta \hookrightarrow P \setminus \mathrm{Int}\,\Delta$, $\quad k_2 : \partial\Delta \hookrightarrow M(1,p)$ とする.

を考えると, $k_2^* : H^{n-1}(M(1,p)) = \mathbb{Z} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z} = H^{n-1}(\partial\Delta)$ だから, $k_2^* = 0 : H^{n-1}(M(1,p); \mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{n-1}(\partial\Delta; \mathbb{Z}_p)$. したがって, Five Lemma から, $\varphi^* : H^n(P; \mathbb{Z}_p) \cong H^n(\widetilde{P}; \mathbb{Z}_p)$.

上の fact を P の n-単体の数に関して帰納的に用いると,

$$\varphi_K^* : H^n(K;\mathbb{Z}_p) \cong H^n(K_{(1,p)};\mathbb{Z}_p)$$

であることがわかる. □

定理 2.4. $\dim X(p) = n$.

証明には次の補題が必要にあるが, 仮定して定理を証明する.

補題 2.5. X, K を n 次元コンパクト多面体とする. 連続写像 $f : X \longrightarrow K$ について,

$$f_{\mathbb{Z}_p}^* : H^n(K;\mathbb{Z}_p) \cong H^n(X;\mathbb{Z}_p) \quad \text{かつ} \quad H^n(K) = \operatorname{Tor} H^n(K)$$

ならば, $f^* : H^n(K) \longrightarrow H^n(X)$ は $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像である. ここで, $\mathcal{C}_{(p)}$ はすべての *q-torsion* 群, $q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}$ から成る *Serre class* とする.

定理 2.4 の証明. $H^n(X(p)) \neq 0$ を示せば十分である.

$H^n(X_0) = H^n(\mathbb{S}^{n-1} \cup_{\mu_p} \mathbb{D}^n) = \mathbb{Z}_p$.

命題 2.3 (2) と補題 2.5 から, $f_{0,1}^* : H^n(X_0) \longrightarrow H^n(X_1)$ は $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像. よって, $f_{0,1}^*$ は単射準同形写像である. また, $\operatorname{Coker} f_{0,1}^* = H^n(X_1)/\, f_{0,1}^*(\mathbb{Z}_p) \in \mathcal{C}_{(p)}$ だから, $H^n(X_1)$ は有限群. よって,

$$f_{0,1}^*|_{\mathbb{Z}_p} : \mathbb{Z}_p \cong f_{0,1}^*(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \leq H^n(X_1) \tag{1.1}$$

$$H^n(X_1) = \operatorname{Tor} H^n(X_1) \tag{1.2}$$

次に, 命題 2.3 (1) から, $f_{1,2}^* : H^n(X_1) \longrightarrow H^n(X_2)$ は単射準同形写像かつ $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像. よって,

$$f_{1,2}^*|_{\mathbb{Z}_p} : \mathbb{Z}_p \cong f_{1,2}^*(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \leq H^n(X_2) \tag{2.1}$$

$$H^n(X_2) = \operatorname{Tor} H^n(X_2) \tag{2.2}$$

よって, 帰納的に $i \geq 1$ について, i が奇数ならば命題 2.3 (2) と補題 2.5, i が偶数ならば命題 2.3 (1) を用いて次のことがわかる.

$$f_{i-1,i}^*|_{\mathbb{Z}_p} : \mathbb{Z}_p \cong f_{i-1,i}^*(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p \leq H^n(X_i) \tag{i.1}$$

$$H^n(X_i) = \operatorname{Tor} H^n(X_i) \tag{i.2}$$

である. したがって, $\mathbb{Z}_p \leq H^n(X(p)) = \varinjlim \{H^n(X_i), f_{i-1,i}^*\}$. $\square_{\mathit{Proof\ of\ Theorem}\,2.4}$

補題 2.5 の証明. $\dim X = \dim K = n$ だから, 普遍係数定理から, $f_{\mathbb{Z}_p}^*$ と $f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}$ を同一視できる.

$$\begin{array}{ccc}
H^n(X;\mathbb{Z}_p) & \xleftarrow{\cong} & H^n(X) \otimes \mathbb{Z}_p \\
{\scriptstyle f_{\mathbb{Z}_p}^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}} \\
H^n(K;\mathbb{Z}_p) & \xleftarrow{\cong} & H^n(K) \otimes \mathbb{Z}_p
\end{array}$$

今, 完全列 :

$$H^n(K) \xrightarrow{f^*} H^n(X) \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f^* \longrightarrow 0$$

と $\mathbb{Z}_p$ とのテンソル積をとると次の完全列が得られる.

$$H^n(K)\otimes\mathbb{Z}_p \xrightarrow{f^*_{\mathbb{Z}_p}} H^n(X)\otimes\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Coker}\, f^*\otimes\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0.$$

このとき, $f^*_{\mathbb{Z}_p}$ は同型写像だから, $\mathrm{Coker}\, f^*\otimes\mathbb{Z}_p = 0$. $H^n(X)$ は有限生成可換群だから, $\mathrm{Coker}\, f^*$ も有限生成可換群. よって, $\mathrm{Coker}\, f^* \in \mathcal{C}_{(p)}$.

また, $\mathrm{Coker}\, f^*$ は有限 torsion 群であり, $H^n(K)$ は有限 torsion 群だから, $H^n(X)$ は有限 torsion 群である. よって,

$$H^n(K) = H_1\oplus G_1,\quad H^n(X) = H_2\oplus G_2,\quad ただし,\ H_1, H_2\in\mathcal{C}_p,\ G_1, G_2\in\mathcal{C}_{(p)}$$

と表せる. このとき, $f^*(H_1)\subset H_2$, $f^*(G_1)\subset G_2$ であり,

$$f^* = (f^*|_{H_1})\oplus(f^*|_{G_1}) : H_1\oplus G_1 \longrightarrow H_2\oplus G_2.$$

よって, $\mathrm{Coker}\, f^*\in\mathcal{C}_{(p)}$ だから, $f^*(H_1) = H_2$ である. さらに, $G_1, G_2\in\mathcal{C}_{(p)}$ だから

$$f^*_{\mathbb{Z}_p} = f^*\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p} = ((f^*|_{H_1})\oplus(f^*|_{G_1}))\otimes\mathbb{Z}_p = (f^*|_{H_1})\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}.$$

よって, $f^*\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}$ は同型写像なので,

$$\mathrm{Ker}\,(f^*\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p}) = (\mathrm{Ker}\, f^*|_{H_1})\otimes\mathbb{Z}_p = 0.$$

したがって, $H_1\in\mathcal{C}_p$ だから, $\mathrm{Ker}\, f^*|_{H_1} = 0$. であり, $\mathrm{Ker}\, f^* = \mathrm{Ker}\, f^*|_{G_1} \le G_1\in\mathcal{C}_{(p)}$. ゆえに, f^* は $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像である. $\square_{Proof\ of\ Lemma\ 2.5}$

定理 2.6 (Boltyanskii-Kodama)**.** $\dim X(p) = n$ であり, $X(p)$ は次のコホモロジー次元をもつ :

(i) $\dim_{\mathbb{Z}_p} X(\mathbf{p}) = \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X(\mathbf{p}) = \dim_{\mathbb{Q}} X(\mathbf{p}) = n-1 < n = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X(\mathbf{p}) = \dim X(p)$,

(ii) p と異なる任意の素数 q について, $\dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} X(\mathbf{p}) = \dim_{\mathbb{Z}_q} X(\mathbf{p}) = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} X(\mathbf{p}) = n-1$.

したがって, 定理 A.11 と定理 A.13 から, $X(\mathbf{p})$ が exceptional なコンパクト距離空間である.

系 2.7 (Boltyanskii-Kodama)**.** $\dim X(\mathbf{p})^2 = 2n-1$.

注意 2.8. 児玉の構成 (40-8 Theorem) では, 素数 p に対して, 数列 $(p, p^2, p^4, \ldots, p^{2^i}, \ldots)$ に対して, 2 次元 *Möbius band* $M(1,p)$ から $(p^{2^{i-1}}, p^{2^i})$-*modifications* を繰り返して M_{Q_p} を構成している. このような列を考えた理由は, $\dim M_{Q_p} \ge 2$ を示す必要があったためであった. Appendix (40-8 Theorem) における証明は,

40-5 Lemma. (1) $H^n(M(a,b), \partial M(a,b)) = \mathbb{Z}_b$.
(2) それぞれの生成元 $\beta_n \in H^n(M(a,b), \partial M(a,b))$, $\alpha_n\in H^n(\Delta, \partial\Delta)$ とすると, $f^*_\Delta(\alpha_n) = \pm a\cdot\beta_n$, ただし, $f^*_\Delta = (f|_{M_\Delta})^* : H^n(\Delta,\partial\Delta) \longrightarrow H^n(M(a,b), \partial M(a,b))$.

および列 $(p, p^2, p^4, \dots, p^{2^i}, \dots)$ の性質を利用して M_{Q_p} の閉部分集合の組 $(L, \dot{L})$, $\check{H}^2(L, \dot{L}; \mathbb{Z}_{(p)}) \neq 0$ の存在を示している．この事実から,

$$2 \leq \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} L \leq \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} M_{Q_p} \leq \dim M_{Q_p} \leq 2$$

したがって, $\dim M_{Q_p} = 2$ を導いた．

実際, L は, $M(1,p)$ の適当な 2 単体 σ をとり, $(L, \dot{L}) = (\pi_1^{-1}(\sigma), \pi_1^{-1}(\dot{\sigma}))$ としている．ここで, 2 単体 σ の $(1,p)$-*modification* は *Moore space* $\mathbb{S}^1 \cup_{\mu_p} \mathbb{D}^2$ だから, $n = 2$ の場合に構成した $X(p)$ と同相である．よって, 本質的に同じ構成と証明をしたいえる．

3 Other examples

Pontryagin's example

Pontryagin (1930) がおのおのの素数 p に対して構成した 2 次元コンパクト距離空間 Π_p は

$$\text{異なる素数 } p,\ q \text{ について, } \dim(\Pi_p \times \Pi_q) = 3$$

という性質をもち, 次元論における重要な例「$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ が成り立たない」である．ここで本質的なことは次のコホモロジー次元をもつことであった．

$\dim_{\mathbb{Z}_p} \Pi_p = 2$, かつ G が p-divisible ならば, $\dim_G \Pi_p \leq 1$

よって, $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} \Pi_p = \dim_{\mathbb{Q}} \Pi_p = 1$,

任意の素数 $q \neq p$ について, $\dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} \Pi_p = \dim_{\mathbb{Z}_q} \Pi_p = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} \Pi_p = 1$.

整数 $n \geq 2$ と素数 p について, 同様なタイプのコホモロジー次元：

$\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} Y(p) = \dim_{\mathbb{Q}} Y(p) = n - 1 < n = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y(p)$,

任意の素数 $q \neq p$ について, $\dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_q} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} Y(p) = n - 1$.

をもつ n 次元コンパクト距離空間 $Y(p)$ を **n 次元 Pontryagin コンパクト距離空間**と呼ぶ．

n 次元コンパクト多面体と組合せ的連続写像からなる射影列 $\{Y_i, g_{i-1,i}\}$ を次のように帰納的に定義する．

$Y_0 = \mathbb{S}^n$ とその単体分割 τ_0, $\mathrm{mesh}\,[\tau_0] \leq 1$ をとる．

$i > 0$ について, n 次元コンパクト多面体 Y_{i-1} と単体分割 τ_{i-1}, $\mathrm{mesh}\,[\tau_{i-1}] \leq 1/2^{i-1}$ が得られていると仮定する．

(Y_{i-1}, τ_{i-1}) の $(1,p)$-modification:

$$g_{i-1,i} = \varphi_{Y_{i-1}} : Y_i = (Y_{i-1})_{(1,p)} \longrightarrow Y_{i-1}$$

をとり, Y_i の単体分割 τ_i, $\mathrm{mesh}\,[\tau_i] \leq 1/2^i$ をとる．

よって, n 次元コンパクト多面体と $(1,p)$-modifications からなる射影列 $\{Y_i, g_{i-1,i}\}$ が得られるので, コンパクト距離空間

$$Y(p) = \varprojlim \{Y_i, g_{i-1,i}\}$$

を定義して, $Y(p)$ が n 次元 Pontryagin コンパクト距離空間であることを示す.

命題2.3 (2) から,

$$\check{H}^n(Y(p); \mathbb{Z}_p) \cong \check{H}^n(Y_1; \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p.$$

また, 命題2.1 (2) から,

$$\text{可換群 } G \text{ が } p\text{-divisible ならば}, \ \dim_G Y(p) \leq n-1.$$

したがって, これらは次のようにまとめられる.

定理 3.1 (Pontryagin)**.** 整数 $n \geq 2$ と素数 p について, n 次元コンパクト距離空間 $Y(p)$ は次のコホモロジー次元をもつ :

(i) $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} Y(p) = \dim_{\mathbb{Q}} Y(p) = n-1 < n = \dim_{\mathbb{Z}_p} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} Y(p)$,

(ii) p と異なる任意の素数 q について, $\dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_q} Y(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} Y(p) = n-1$.

異なる素数 p, q とする. このとき, 任意の素数 r について,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{Z}_{(r)}}(Y(p) \times Y(q)) &= 2n-1 && \text{if } r = p \text{ or } r = q, \\ \dim_{\mathbb{Z}_{(r)}}(Y(p) \times Y(q)) &= 2n-2 && \text{if } r \neq p,\ q. \end{aligned}$$

したがって,

系 3.2 (Pontryagin)**.** 任意の素数 $p \neq q$ に対して, $\dim(Y(p) \times Y(q)) = 2n-1$.

注意 3.3. 定理A.13 から, *Pontryagin* の例 $Y(p)$ は *exceptional* ではない. *i.e.* $\dim Y(p)^2 = 2n$.

Other kind of examples

任意の素数が必ず無限回現れる素数からなる列 $\mathbf{p} = \{p_i\}$ をとる.

$W_0 = \mathbb{S}^n$ として, W_0 の単体分割 T_0, mesh $[T_0] \leq 1$ は, 赤道 $\mathbb{S}^{n-1}$ は (W_0, T_0) の $(n-1)$ 次元部分複体であるようにとる.

$i > 0$ について, n 次元コンパクト多面体 W_{i-1} と単体分割 τ_{i-1}, mesh $[\tau_{i-1}] \leq 1/2^{i-1}$ が得られていると仮定する. ここで, (W_{i-1}, τ_{i-1}) の $(p_i, 0)$-modification:

$$h_{i-1,i} = \psi_{W_{i-1}} : W_i = (W_{i-1})_{(p_i,0)} \longrightarrow W_{i-1}$$

をとり, W_i の単体分割 T_i, mesh $[\tau_i] \leq 1/2^i$ をとる. このとき, 命題2.1 (1), 命題2.3 (1) から, $h_{i-1,i} : W_i \longrightarrow W_{i-1}$ は次の性質をもつ.

$$\dim_{\mathbb{Z}_{p_i}}(h_{i-1,i}, \tau_{i-1}) \leq n-1 \tag{$C(i)$}$$

$$h^*_{i-1,i} : H^n(W_{i-1}) \longrightarrow H^n(W_i) \text{ は単射かつ } \mathcal{C}_{p_i}\text{-同型写像} \tag{$D(i)$}$$

帰納的にして n 次元コンパクト多面体と組合せ的連続写像からなる射影列 $\{W_i, h_{i-1,i}\}$ が得られるので, コンパクト距離空間

$$W = \varprojlim \{W_i, h_{i-1,i}\}$$

を定義する.

このとき, Boltyanskii-Kodama の例と同様に $\mathbb{S}^{n-1}$ の逆像を考えると, 部分空間 $W_0 \subset W(p)$, $W_0 \cong \mathbb{S}^{n-1}$ が存在する. よって, 任意の可換群 G について,

$n-1 \leq \dim_G W_0 \leq \dim_G W(p) \leq \dim W(p) \leq n.$

よって, 性質 (C_i), 数列 $\mathbf{p}$ の取り方と Bockstein の不等式から,

$$\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} W = \dim_{\mathbb{Z}_p} W = n-1 \quad \text{for every prime } p.$$

Claim 1. $\check{H}^n(W;\mathbb{Q}) \neq 0$.

Proof of Claim 1. すべての $i \geq 1$ について $h^*_{i-1,i} : H^n(W_{i-1}) \longrightarrow H^n(W_i)$ は, 条件 $(D(i))$ から, $\mathcal{C}$-同型写像. また, 普遍係数定理 :

$$\begin{array}{ccc} H^n(W_i)\otimes\mathbb{Q} & \xrightarrow{\cong} & H^n(W_i;\mathbb{Q}) \\ {\scriptstyle h^*_{i-1,i}\otimes\mathbb{Q}}\Big\uparrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle (h^*_{i-1,i})_{\mathbb{Q}}} \\ H^n(W_{i-1})\otimes\mathbb{Q} & \xrightarrow[\cong]{} & H^n(W_{i-1};\mathbb{Q}) \end{array}$$

から, $(h^*_{i-1,i})_{\mathbb{Q}} : H^n(W_{i-1};\mathbb{Q}) \longrightarrow H^n(W_i;\mathbb{Q})$ は, $h^*_{i-1,i}\otimes\mathbb{Q} : H^n(W_{i-1})\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow H^n(W_i)\otimes\mathbb{Q}$ と同一視できる. よって,

$$h^*_{i-1,i}\otimes\mathbb{Q} : H^n(W_{i-1})\otimes\mathbb{Q} \cong H^n(W_i)\otimes\mathbb{Q}$$

を示せば, $\check{H}^n(W;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ が得られる.

$H^n(W_j)$ は有限生成可換群だから, $H^n(W_j) = H^n(W_j)/\operatorname{Tor} H^n(W_j) \oplus \operatorname{Tor} H^n(W_j)$ と表され,

$$\begin{aligned} h^*_{i-1,i} : [H^n(W_{i-1})/\operatorname{Tor} H^n(W_{i-1})] &\oplus \operatorname{Tor} H^n(W_{i-1}) \\ &\longrightarrow [H^n(W_i)/\operatorname{Tor} H^n(W_i)] \oplus \operatorname{Tor} H^n(W_i) \end{aligned}$$

について, $h^*_{i-1,i}(\operatorname{Tor} H^n(W_{i-1})) \subset \operatorname{Tor} H^n(W_i)$. 一方,

$h^*_{i-1,i}(H^n(W_{i-1})/\operatorname{Tor} H^n(W_{i-1})) \not\subset H^n(W_i)/\operatorname{Tor} H^n(W_i)$

ならば, $H^n(W_{i-1})/\operatorname{Tor} H^n(W_{i-1}) = \bigoplus_{\text{finite}} \mathbb{Z}$ だから, $0 \neq \operatorname{Ker} h^*_{i-1,i} \cap [H^n(W_{i-1})/\operatorname{Tor} H^n(W_{i-1})]$ は有限生成自由可換群. ところが, $\operatorname{Ker} h^*_{i-1,i} \in \mathcal{C}$ に矛盾する. よって,

$h^*_{i-1,i}(H^n(W_{i-1})/\operatorname{Tor} H^n(W_{i-1})) \subset H^n(W_i)/\operatorname{Tor} H^n(W_i)$.

よって, $h^*_{i-1,i}$ は

$$\alpha\oplus\beta : [H^n(W_{i-1})/\operatorname{Tor} H^n(W_{i-1})] \oplus \operatorname{Tor} H^n(W_{i-1}) \longrightarrow [H^n(W_i)/\operatorname{Tor} H^n(W_i)] \oplus \operatorname{Tor} H^n(W_i)$$

と準同形写像の直和へ分解できる. このとき, $h^*_{i-1,i}$ は $\mathcal{C}$-同型写像だから, α は単射かつ $\operatorname{Coker}\alpha \in \mathcal{C}$. したがって,

$$h^*_{i-1,i}\otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} = \alpha\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} : [H^n(W_{i-1})/\operatorname{Tor} H^n(W_{i-1})]\otimes\mathbb{Q} \longrightarrow [H^n(W_i)/\operatorname{Tor} H^n(W_i)]\otimes\mathbb{Q}$$

は同型写像である. $\square_{Proof\ of\ Claim\,1}$

したがって,

$$\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} W = \dim_{\mathbb{Q}} W = n \quad \text{for every prime } p.$$

定理 3.4 (Boltyanskii-Kodama)**.** 任意の $n \geq 2$ について, 次の条件を満たす n 次元コンパクト距離空間 W が存在する.

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{Z}_p} W = \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} Z(p) = n-1,\\ &\dim_{\mathbb{Q}} W = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} W = n \ \ \textit{for every prime } p\end{aligned}$$

素数 p をとる. p と異なるすべての素数が必ず無限回現れる素数 $p_i \neq p$ からなる列 $\mathbf{p} = \{p_i\}$ をとる. この点列 $\mathbf{p}$ について上述と同様な構成を行い, n 次元コンパクト距離空間

$$W(p) = \varprojlim \{W_i, h_{i-1,i}\}$$

を定義する. このとき, 同様にして次のことがわかる.

すべての素数 $q \neq p$ について, $n-1 = \dim_{\mathbb{Z}_q} W(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} W(p) < \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} W(p) = n$,
$\dim_{\mathbb{Q}} W(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} W(p) = n$.

Claim 2. $\check{H}^n(W(p); \mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$.

Proof of Claim 2. 証明は *Claim* 1 に倣う.

数列 $\mathbf{p}$ の取り方から, すべての $i \geq 1$ について, $h^*_{i-1,i} : H^n(W_{i-1}) \longrightarrow H^n(W_i)$ が $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像であることがわかる. よって, $H^n(W_0) = \mathbb{Z}$ から,

$$H^n(Y_i) = \mathbb{Z} \oplus G_i,\ G_i \in \mathcal{C}_{(p)} \quad \text{for all } i \geq 1 \tag{D_1}$$

である.

なぜならば, 一般に (有限生成可換) 群 H と準同形写像 $f : H \longrightarrow \mathbb{Z}$ について, $\mathrm{Tor}\, H \subset \mathrm{Ker}\, f$. f が $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像ならば, $\mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{C}_{(p)}$ だから, $\mathrm{Tor}\, H = \mathrm{Ker}\, f \in \mathcal{C}_{(p)}$. よって, f が誘導する準同形写像 $\widetilde{f} : H/\mathrm{Tor}\, H \longrightarrow \mathbb{Z}$ は単射である. さらに, $\mathrm{Im}\, \widetilde{f} = \mathrm{Im}\, f$ だから, $\mathrm{Coker}\, \widetilde{f} \in \mathcal{C}_{(p)}$. よって, $\mathrm{Im}\, \widetilde{f} = m\mathbb{Z}$ for some $m > 0$ であり, $\widetilde{f} : H/\mathrm{Tor}\, H \cong m\mathbb{Z}$. したがって, $H \cong (\mathrm{Tor}\, H) \bigoplus (H/\mathrm{Tor}\, H) \cong (\mathrm{Tor}\, H) \oplus \mathbb{Z}$. また, $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像の合成はまた $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像だから, $i > 1$ についても求める直和分割が得られる.

このとき, *Claim* 1 の証明と同様にして, $\mathcal{C}_{(p)}$-同型写像 $h^*_{i-1,i} : H^n(W_{i-1}) \longrightarrow H^n(W_i)$ を直和分割 (D_1) にしたがって

$$\alpha_i \oplus \beta_i : \mathbb{Z} \oplus G_{i-1} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus G_i \tag{D_2}$$

ただし, 準同形写像 $\alpha_i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ は単射かつ $\mathrm{Coker}\, \alpha_i = B_i \in \mathcal{C}_{(p)}$

と直和分割する．一方, $\dim W_j = n$ だから, 普遍係数定理より, $(h^*_{i-1,i})_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} : H^n(W_{i-1};\mathbb{Z}_{p^\infty}) \longrightarrow H^n(W_i;\mathbb{Z}_{p^\infty})$ は, $h^*_{i-1,i} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} : H^n(W_{i-1}) \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow H^n(W_i) \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$ と同一視できる．よって, $\mathbb{Z}_{p^\infty} \otimes G_j = 0$ だから,

$$h^*_{i-1,i} \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} = \alpha_i \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}$$

である．完全列 : $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha_i} \mathbb{Z} \longrightarrow B_i \longrightarrow 0$ と $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ とのテンソル積をとり, 完全列

$$\cdots \longrightarrow B_i * \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \xrightarrow{\alpha_i \otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow B_i \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \longrightarrow 0$$

を考える．このとき, $B_i \in \mathcal{C}_{(p)}$ だから, $B_i * \mathbb{Z}_{p^\infty} = p\text{-}\mathrm{Tor}\, B_i = 0$ かつ $B_i \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} = 0$. よって,

$$\alpha_i \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} : \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}.$$

したがって,

$$\begin{aligned}
\check{H}^n(W(p);\mathbb{Z}_{p^\infty}) &= \varinjlim \{H^n(W_i;\mathbb{Z}_{p^\infty}), (h^*_{i-1,i})_{\mathbb{Z}_{p^\infty}}\} \\
&= \varinjlim \{\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \xrightarrow{\alpha_i \otimes \mathrm{id}} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty} \xrightarrow{\alpha_i \otimes \mathrm{id}} \cdots\} \\
&= \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{p^\infty}.
\end{aligned}$$

$\square_{\mathit{Proof\ of\ Claim\,2}}$

定理 3.5 (Boltyanskii-Kodama)**.** *任意の $n \geq 2$ と素数 p について, 次の条件を満たす n 次元コンパクト距離空間 $W(p)$ が存在する.*

$$\dim_{\mathbb{Q}} W(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} W(p) = \dim_{\mathbb{Z}_p} W(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} W(p) = n,$$
$$\text{任意の素数 } q \neq p \text{ について,} \quad \dim_{\mathbb{Z}_q} W(p) = \dim_{\mathbb{Z}_{q^\infty}} W(p) = n-1, \quad \dim_{\mathbb{Z}_{(q)}} W(p) = n.$$

ここで構成した n 次元コンパクト距離空間のコホモロジー次元をまとめておく．ただし, 素数 p を固定し, q は p と異なるすべての素数を動くとする．

	$\mathbb{Z}_{(p)}$	$\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_{p^\infty}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}_{(q)}$	$\mathbb{Z}_q$	$\mathbb{Z}_{q^\infty}$
W	n	$n-1$	$n-1$	n	n	$n-1$	$n-1$
$W(p)$	n	n	n	n	n	$n-1$	$n-1$
$Y(p)$	n	n	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$
$X(p)$	n	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	$n-1$

A　コホモロジー次元の定義と基本的な定理

本稿はコホモロジー次元論の基本的な結果を既知として用いた．ここで, コホモロジー次元の定義と基本的な結果を記しておく．

コホモロジー次元の定義と基本的な定理

定義 A.1. 整数 $n \geq 0$ とする．距離空間 X の**可換群 G に関するコホモロジー次元が n 以下である**とは, 任意の閉部分集合 $A \subset X$ について, $\check{H}^{n+1}(X, A) = 0$ であることをいい, $\dim_G X \leq n$ と書く．ここで, $\check{H}^*(-;G)$ は G を係数群とする ***Čech* コホモロジー群**である．

$\dim_G X \leq n$ かつ $\dim_G X \not\leq n-1$ ではないとき, $\dim_G X = n$ と定義する．

$\dim_G X \leq n$ となる n が存在しないとき, $\dim_G X = \infty$ とする．

定理 A.2. X を距離空間, G を可換群とする．このとき, 次は同値である．

(1) $\dim_G X \leq n$,

(2) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ とすべての $k \geq n+1$ について, $\check{H}^k(X, A) = 0$

(3) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ について, 包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ が導く準同形写像 $i^* : \check{H}^n(X;G) \longrightarrow \check{H}^n(A;G)$ が全射である．

(4) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ と *Eilenberg-MacLane* 複体 $K(G,n)$ への連続写像 $f : A \longrightarrow K(G,n)$ に対して, 連続写像 $\widetilde{f} : X \longrightarrow K(G,n)$, $\widetilde{f}|_A = f$ が存在する．

定理 A.3. 可換群 $G \neq 0$ と距離空間 X について, 次が成り立つ．

(1) $\dim_G X \leq \dim_{\mathbb{Z}} X \leq \dim X$.

(2) $\dim X = 0 \Longleftrightarrow \dim_G X = 0$.

(3) $\dim X = 1 \Longleftrightarrow \dim_{\mathbb{Z}} X = 1$.

定理 A.4 (Alexandorff)**.** 距離空間 X について, $\dim X < \infty$ ならば, $\dim_{\mathbb{Z}} X = \dim X$.

定理 A.5 (Dranishnikov)**.** $\dim_{\mathbb{Z}} X < \infty$ である無限次元コンパクト距離空間が存在する．

定理 A.6. 可換群 G と距離空間 X について, 次が成り立つ．

(1) 任意の部分集合 $A \subset X$ について, $\dim_G A \leq \dim_G X$.

(2) 閉部分集合 $K_i \subset X$ $(i = 1, 2, \dots)$ について, $\dim_G \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \max\{\dim_G K_i \mid i = 1, 2, \dots\}$.

Bockstein 族と Bockstein の定理

- $\mathbb{Z}$ を整数と自然な演算による可換群, $\mathbb{Q}$ を有理数と自然な演算による可換群とする．
- $\mathcal{P}$ を素数全体の集合, 素数 $p \in \mathcal{P}$ について,
- $\mathbb{Z}_p$ は位数 m の巡回群,
- p 準巡回群 $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \varinjlim \{\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\times p} \mathbb{Z}_{p^3} \xrightarrow{\times p} \cdots\}$.
- 加群 $\mathbb{Z}$ に p 局所化 $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid n \text{ is not divisible by } p\right\}$.

と書き, 可算族

$$\sigma = \{\mathbb{Q}\} \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}} \{\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_{(p)}\}$$

を **Bockstein 基**と呼ぶ.

これらの群を係数とするコホモロジー次元の関係は以下のようになる.

定理 A.7 (Bockstein の不等式)**.** 任意の距離空間 X について次の不等式が成り立つ.

$(B1)$ $\dim_{\mathbb{Z}_p} X = \dim_{\mathbb{Z}_{p^2}} X = \dim_{\mathbb{Z}_{p^3}} X \le \cdots$.

$(B2)$ $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X \le \dim_{\mathbb{Z}_p} X \le \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X + 1$.

$(B3)$ $\dim_{\mathbb{Z}_p} X \le \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X$.

$(B4)$ $\dim_{\mathbb{Q}} X \le \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X$.

$(B5)$ $\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X \le \max\{\dim_{\mathbb{Q}} X, \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X + 1\}$.

$(B6)$ $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X \le \max\{\dim_{\mathbb{Q}} X, \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X - 1\}$.

任意の可換群 G に対して, **Bockstein 族** $\sigma(G) \subset \sigma$ を次のように定める :

(1) $\mathbb{Z}_p \in \sigma(G) \Longleftrightarrow p\text{-Tor}\,(G) \neq \{0\}$ is not divisible by p.

(2) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \sigma(G) \Longleftrightarrow p\text{-Tor}\,(G) \neq \{0\}$ is divisible by p.

(3) $\mathbb{Z}_{(p)} \in \sigma(G) \Longleftrightarrow G/\mathrm{Tor}\,(G) \neq \{0\}$ is not divisible by p.

(4) $\mathbb{Q} \in \sigma(G) \Longleftrightarrow G/\mathrm{Tor}\,(G) \neq \{0\}$ is divisible by all primes p.

定理 A.8 (Bockstein の定理)**.** 任意のコンパクト距離空間 X と可換群 G について,

$$\dim_G X = \max\{\dim_K X \mid K \in \sigma(G)\}.$$

例 A.9. (1) $G \in \sigma$ ならば, $\sigma(G) = \{G\}$.

(2) $\sigma(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{Z}_{(p)} \mid p \in \mathcal{P}\}$.

したがって, $\dim_{\mathbb{Z}} X = \max\{\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X \mid p \in \mathcal{P}\}$.

(3) $\mathbb{Z}_{[1/p]} = \{m/p^k \in \mathbb{Q} \mid k \ge 0,\ m \in \mathbb{Z}\}$ について, $\sigma(\mathbb{Z}_{[1/p]}) = \{\mathbb{Z}_{(q)} \mid q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}\}$.

(4) *p-adic integers* $\hat{\mathbb{Z}}_p$ について, $\sigma(\hat{\mathbb{Z}}_p) = \{\mathbb{Z}_{(p)}\}$.

(5) *p-adic rationals* $\mathbb{Q}_p$ について, $\sigma(\mathbb{Q}_p) = \{\mathbb{Q}\}$.

注意 A.10. 上記の *Bockstein* の定理はコンパクト距離空間に限る.

定理 A.11. 任意のコンパクト距離空間 X について, 次が成り立つ.

(1) $\dim_{\mathbb{Z}}(X \times X) = 2\dim_{\mathbb{Z}} X$, または $2\dim X - 1$.

(2) $\dim_{\mathbb{Z}} X^n = n\dim_{\mathbb{Z}} X$, または $n\dim_{\mathbb{Z}} X + (n-1)$.

定理 A.12. コンパクト距離空間 X は *standard* である必要十分条件は

$$\dim X = \dim_F X$$

である体 F が存在するである.

定理 A.13. n 次元コンパクト距離空間 X は *exceptional* である必要十分条件は

$$\dim_{\mathbb{Q}} X < n \text{ かつ } \dim_{\mathbb{Z}_p} X = \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X = n-1 \quad \textit{for all } p \in \mathcal{P}$$

であることである.

コンパクト ANR とコホモロジー次元

定理 A.14. コンパクト ANR M について次が成り立つ.

(1) 任意の素数 $p \in \mathcal{P}$ について, $\dim_{\mathbb{Z}_p} M = \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} M$.

(2) 任意の可換群 G に対して, $\dim_{\mathbb{Q}} M \leq \dim_G M$.

(3) $(Borsuk)$ $\dim M < \infty$ ならば, $\dim M = \dim_{\mathbb{Z}_p} M$ である素数 $p \in \mathcal{P}$ が存在する.

(4) $(Watanabe)$ $\dim M = \dim_{\mathbb{Z}} M$.

定理 A.15. (1) コンパクト ANR M は $standard$ である.

(2) $(Kodama)$ 2 次元コンパクト ANR M と任意のコンパクト距離空間 Y について, $\dim(M \times Y) = 2 + \dim Y$.

(3) $(Dranishnikov)$ 4 次元コンパクト ANR M_p, M_q, $\dim(M_p \times M_q) = 7$ が存在する.