オーリッチリスクの資源・環境問題への応用[i]

(Applications of Orlicz risks to resource and environmental problems)

北陸先端科学技術大学院大学　吉岡秀和
Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hidekazu Yoshioka
同志社大学　辻村元男
Doshisha University, Motoh Tsujimura

1. はじめに

時々刻々とランダムに変化するノイズに駆動される時系列は確率過程と呼ばれ，ファイナンスや保険，リアルオプションに留まらず，環境や資源，生物，物理に関わる極めて広範な分野においても研究対象である（すべてを列挙することはできないが，例えば[1-2]がある）．とくに確率微分方程式を介して記述できる確率過程については，動的計画原理や最大値原理に基づく最適制御問題との相性の良さから実学的な価値が高く，長年に渡り詳細な研究がなされてきた[3]．こうした理論が機械学習の基礎となっていることも注目すべきである[4]．本稿では動的計画原理に焦点を当てる．

古典的な動的計画原理では，時間後ろ向きに最適性方程式（Hamilton–Jacobi–Bellman（HJB）方程式やベルマン方程式とも呼ばれるもの）を解くことで対象とする系について期待値の意味での最適制御則を得る，というアプローチが用いられている．この方法論の問題点としては，少なくとも以下の 2 点がある．1 点目は，対象とする系が極端な状態に陥る事象，すなわちリスクを過小評価する可能性があることである．2 点目は，系のパラメータや係数の正確な値や形がわからない，すなわち不確実（ノイズとは全く異なる概念であることに注意を要する）である場合に対処できないことである．前者についてはリスク鋭敏制御[5]，後者については意思決定者と自然が相対する動的微分ゲーム[6]の範疇で取り扱うことが可能であることが個別に論じられてきた．リスクと不確実性は異なる概念である（ただし，両者の HJB 方程式が等しい形をしているという指摘がある[7]）．もし，両者を個別ではなく一貫的に取り扱うことができる動的計画原理のようなものがあれば，理学的に興味深いのみならず，工学的にも有用な解析ツールを提供できる可能性がある．こうした研究動機のもとで資源・環境問題を研究する著者らが最近出会った概念が，次節で紹介するオーリッチリスク[8]である．

オーリッチリスクは日本国内では浸透していない概念である．こうしたことから，本稿ではオーリッチリスクの導入，ならびに付随する最適性方程式の導出に内容を絞る．ここで最適性方程式とは，既存の動的計画法に現れる HJB 方程式の亜種である．オーリッチリスクの応用性は未知数である．本稿を機に，オーリッチリスク，さらには関連したリスク指標の新しい活用先が見出されることを期待する．

2. オーリッチリスク

2.1 出自

本稿で対象とするオーリッチリスクは，「Dynamic robust Orlicz premia (premium)」として 2021

年に提案された[8]. Premium はリスクに対するリターンをあらわすファイナンスの用語である．提案者の Bellini 達が保険やファイナンスにおける確率モデルの専門家であるために, premium という用語を使用したと考えられる．本稿や著者らの研究ではリターンではなくリスクそのものを対象としたいことから，premium ではなく risk という単語を用いる．リスクとは極端な事象を意味する概念であると述べたが，本稿では対象とする確率過程が著しく大きい値をとるという事象を考える．

「オーリッチ」という単語は人名であり, 関数空間の一種であるオーリッチ空間（Orlicz space）に由来している．その専門書としては和書では[9]，洋書では[10-11]がある．「オーリッチ」は，「オルリッチ」や「オーリッツ」と呼ばれることもある. オーリッチ空間はルベーグ空間（Lebesgue space）の一般化であり，後者よりも多様な振る舞いをする関数の性質を解析する際に使用される．元論文[8]で Orlicz premium と呼ばれていたことから，これが様々な振る舞いをする確率変数を統一的な観点から評価することを念頭に置いて提示された数理概念であるということが推察される．とはいえ，それ以外のリスク指標の性質を分析する場合にもオーリッチ空間が中心的な役割を果たすことを付記する[12].

以下では連続時間モデルを対象としてオーリッチリスクを定式化するが，離散時間モデルに対しても同様の理論展開を行うことができると考えられる．とくに断らない限り, 本稿で現れる期待値や積分は全て存在するという前提で議論を進める．概略を掴んでもらうために数学的に細かい箇所が省略されていることに注意されたい．

2.2 定式化の準備

時刻を $t \geq 0$ と書き，完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ において定義されるマルコフ的な非負確率過程 $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ を考える．例えば，幾何ブラウン運動や Cox–Ingersoll–Ross（CIR）等，確率微分方程式にしたがう確率過程を考えればよい．次節では，連続ノイズが駆動する CIR 過程を具体例として扱う．

オーリッチリスクを定式化するに際して，3 種類の重要なパーツがある．それらは，(i) **確率測度の歪み**, (ii) **不確実性指標**, (iii) **ヤング（Young）関数**である．

(i) 確率測度の歪み

最初のパーツは，不確実性を表現するための確率測度の歪みである．歪みとは一体何であるかを説明しなければならない．誤解を恐れずに述べると，元の確率測度 $\mathbb{P}$ を実験や観測の結果から同定されたモデルと見なしてその支配変数の確率密度関数が得られたとすれば，歪みとは真の確率密度関数と $\mathbb{P}$ の下での確率密度関数の差異である．確率密度関数が異なることはモデルが異なることを意味する．逆に，両者が同一であれば歪みが無いということになる．

一般の確率測度 $\mathbb{Q}$ のもとでの期待値を $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ と書く．また，ある可測な確率過程 $\phi = (\phi_t)_{t \geq 0}$ によってパラメタライズされる確率測度を $\mathbb{Q}(\phi)$ と書く．この ϕ が確率過程の不確実性に対応している．ϕ がすべての時刻で定数 0 である場合を不確実性が存在しないと言い，そうではない場合は不確実性が存在すると言う．とくに $\mathbb{P} = \mathbb{Q}(0)$ と書く．ϕ の各時刻 t での値 ϕ_t が 0 から乖離するほど不確実性が大きくなると解釈できる．オーリッチリスクは期待値 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}$ により定式化される．

(ii) 不確実性指標

次のパーツは，不確実性指標$C(\phi)$というϕの汎関数（関数の関数のこと）である．ここでは，$C(\phi)$を$\mathbb{P}$と$\mathbb{Q}(\phi)$の差異を測る時間整合的（逐次的な意思決定を考えることができる性質を持つこと）な数値指標であるとする．歪みが無い場合には不確実性が存在しないため，$C(0)=0$とする．応用問題における不確実性指標$C(\phi)$としては，例えば相対エントロピー[6]を考えればよい．その他の統計ダイバージェンスでも代用できるであろう．相対エントロピーの場合は，ある非負関数$F:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$，$F(0)=0$が$F$の大域的最小値，かつ$F$は正の値に対して単調増加であり負の値に対して単調減少，を用いて，正の値kを用いた時間間隔$(t,t+k)$に対して

$$C(\phi)=\int_t^{t+k}F(\phi_s)\mathrm{d}s \tag{1}$$

と与えればよい．Fは0で最小値をとる，おわん型の関数であると考えればよい．本稿で考える具体例では，Fを2次関数として与える．

(iii) ヤング関数

最後のパーツは, ヤング関数またはオーリッチ関数$\Phi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$と呼ばれる1変数関数である．この$\Phi$は，$\Phi(0)=0$，$\Phi(1)=1$，かつ$\Phi(+\infty)=+\infty$を満足する，凸な増加関数である．すなわち，1階微分Φ'と2階微分Φ''の双方が非負である．このようなΦの具体例としては，$p\geq 0$とすれば

$$\text{単項式関数}\,\Phi(y)=y^{p+1}\quad\text{や}\quad\text{正規化された指数関数}\,\Phi(y)=\frac{e^{py}-1}{e^{p}-1}, \tag{2}$$

ならびにこれらの線形結合がある．パラメータpが大きいほどより深刻にリスクを評価することを後で見る．

2.3 定式化

文献[8]にしたがい，Zに対する時刻tでのオーリッチリスク$\|Z\|_{\Phi,t}$を次式で与える：

$$\|Z\|_{\Phi,t}=\inf\left\{h>0\left|\sup_{\mathbb{Q}(\phi)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\Phi\left(\frac{Z_t}{h}\right)-C(\phi)\middle|\mathcal{F}_t\right]\leq 1,\ h\text{ is }\mathcal{F}_t\text{-measurable}\right.\right\}. \tag{3}$$

式(3)では，オーリッチリスク$\|Z\|_{\Phi,t}$を所定の不等式が成立するような極小のhとして与えている．この不等号が等号にならないのはどのような場合であるかは，著者らには定かではない．また，厳密には$\mathbb{Q}(\phi)$に対して sup を作用させる際にϕの許容集合を定める必要がある．さらに，内側にある sup を max に，外側にある inf を essinf や min に書き換えられる条件も事前には定かではない．これらは問題依存であろう．

式(3)の期待値$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}$の中にある各項について，第1項はリスク，第2項は不確実性を評価する項である．このことは直感的に明らかではないが，$\Phi(y)=y^{p+1}$とした場合には式(3)が以下のように書き換えられる[8]：

$$\|Z\|_{\Phi,t} = \sup_{\mathbb{Q}(\phi)} \left\{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)} \left[\left. \frac{(Z_t)^{p+1}}{1+C(\phi)} \right| \mathcal{F}_t \right] \right\}^{\frac{1}{p+1}} . \tag{4}$$

式(4)では，リスクの評価が期待値の確実性等価$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[(\cdot)^{p+1}\right]^{\frac{1}{p+1}}$として，不確実性が$1+C(\phi)$での重み付きの最大化として与えられている．前者については古典的なイェンセンの不等式から

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[(\cdot)\right] \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[(\cdot)^{p+1}\right]^{\frac{1}{p+1}} \tag{5}$$

という意味の関係式が得られるため,リスクに関わる過大評価を意味している.後者については,$C(0)=0$であることから,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\cdot] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(0)}\left[\frac{(\cdot)}{1+C(0)}\right] \le \sup_{\mathbb{Q}(\phi)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\frac{(\cdot)}{1+C(\phi)}\right] \tag{6}$$

という意味の関係式が得られるため，不確実性に関わる過大評価を意味している．$C(\phi)\ge 0$であるために，$C(\phi)$は不確実性に対するペナルティを与えていると解釈できる．リスクと不確実性が同一の式において異なる形で現れている．

2.4 最適性方程式の導出

オーリッチリスクに更なる仮定を課し，そのうえで最適性方程式を導く．その際，伊藤の公式等，確率微分方程式に対する基本的な解析ツールを使用する．例えば文献[3]を参照されたい．より複雑な場合における最適性方程式の導出については，著者らの文献[13-14]を参照されたい．

ここでは，一意な強解が存在する 1 次元確率微分方程式を考える（そのための条件が文献[15]等に記載されている）:

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\mathrm{d}t + b(X_t)\mathrm{d}B_t, \quad t>0, \quad X_0 = 0 . \tag{7}$$

ここで, a,b は十分に滑らかな係数であり, $B=(B_t)_{t\ge 0}$ は$\mathbb{P}$上の 1 次元標準ブラウン運動である.式(7)は，確率測度$\mathbb{Q}(\phi)$のもとで以下のように変換されると仮定する：

$$\mathrm{d}X_t = a(X_t)\mathrm{d}t + b(X_t)(\phi_t\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t), \quad t>0, \quad X_0 = 0 . \tag{8}$$

ここで，$W=(W_t)_{t\ge 0}$は$\mathbb{Q}(\phi)$上の 1 次元標準ブラウン運動である．また，不確実性回避の強度をあらわすパラメータを$\eta>0$とし，正の値kを用いた時間間隔$(t,t+k)$に対して

$$C(\phi) = \frac{1}{2\eta}\int_t^{t+k} (\phi_s)^2\,\mathrm{d}s \tag{9}$$

とおく．ここでは，ηが大きいほど不確実性を回避する性向が強くなる．また，ϕの値域は各時刻において実数値である．

以上の準備のもと，リスクと不確実性を鑑みつつ，ある定められた終端時刻$T>0$における確率過程Xの関数$f(X_T)$の上限を条件付き期待値の意味で見積もる問題を考える．例えば，時刻

$t(<T)$における河川での汚濁物質濃度の観測結果から，時刻Tでの濃度の上限を統計的に評価したい場合に相当する．式(3)に基づいて，時刻$t(<T)$におけるその見積もりをΨ_tと書き，これが以下の関係式を満たすとする．ただし，$k>0$は十分に小さい：

$$\Psi_t = \inf\left\{h>0 \left| \sup_{\mathbb{Q}(\phi)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\Phi\left(\frac{\Psi_{t+k}}{h}\right) - \frac{1}{2\eta}\int_t^{t+k}(\phi_s)^2 \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t\right] \le 1,\ h \text{ is } \mathcal{F}_t\text{-measurable}\right.\right\}. \tag{10}$$

オーリッチリスクを介して，Ψ_tについての時間後ろ向き漸化式を定義してみたい．従来の動的計画原理では，例えば

$$\Psi_t = \sup_{\mathbb{Q}(\phi)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\Psi_{t+k} - \frac{1}{2\eta}\int_t^{t+k}(\phi_s)^2 \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{11}$$

というような定式化が用いられることから，式(10)は動的計画原理の亜種として理解できる．その意味は現段階では不明瞭であるが，最適性方程式を導くことでより鮮明になる．

さて，式(10)から最適性方程式，すなわちΨ_tの支配方程式を導きたい．もちろん，その方程式を解けば$f(X_T)$の上限を条件付き期待値の意味で見積もることができることを望んでいる．そのために新たな仮定を課す．思い切って式(10)で等式が成立すると仮定して，

$$1 = \sup_{\mathbb{Q}(\phi)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\Phi\left(\frac{\Psi_{t+k}}{\Psi_t}\right) - \frac{1}{2\eta}\int_t^{t+k}(\phi_s)^2 \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{12}$$

を得る．ただし，Ψ_tが正である必要がある．式(12)を整理すれば

$$\sup_{\mathbb{Q}(\phi)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\frac{1}{k}\left\{\Phi\left(\frac{\Psi_{t+k}}{\Psi_t}\right) - 1\right\} - \frac{1}{2\eta}\frac{1}{k}\int_t^{t+k}(\phi_s)^2 \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t\right] = 0 \tag{13}$$

を得る．ただし，$k>0$が定数であることを用いた．

式(13)で$k \to +0$の極限を考えると最適性方程式が得られる．右辺は0であるので，左辺のみに注目すればよい．そのために，以下では記法の乱用を許容しつつ，Ψ_tがマルコフ性を持ち，次のように表現されることを仮定する：

$$\Psi_t = \Psi(t, X_t). \tag{14}$$

式(14)の右辺におけるΨは十分に滑らかであり，なおかつ正の値をとる2変数関数であると仮定する．以下では，Ψと言えば式(14)右辺の関数を意味する．同様に，ϕについてもマルコフ性を仮定する．マルコフ性の仮定は，確率制御理論の実問題への応用可能性を著しく損なうものではないと考えられる．

さて，Φが十分に滑らかであるとしてテイラー展開を施す：

$$\Phi(1+\kappa) = \Phi(1) + \kappa\Phi'(1) + \frac{1}{2}\kappa^2\Phi''(1) + o(\kappa^2),\quad \kappa \text{ は絶対値} |\kappa| \text{ が十分に小さい実数.} \tag{15}$$

つぎに，$\Phi\left(\dfrac{\Psi_{t+k}}{\Psi_t}\right)$すなわち$\Phi\left(\dfrac{\Psi(t+k,X_{t+k})}{\Psi(t,X_t)}\right)$に対して伊藤の公式を適用するが，式(13)にあるように時刻tおける条件付き期待値を考えているため，(t,X_t)は既知であるかのように扱っていることに注意を要する：

$$\begin{aligned}\Psi(t+k,X_{t+k}) &= \Psi(t,X_t)+\int_t^{t+k}\frac{\partial\Psi}{\partial t}(s,X_s)\,\mathrm{d}s\\ &+\int_t^{t+k}\left(a(X_s)+\phi_s b(X_s)\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}(s,X_s)\,\mathrm{d}s+\int_t^{t+k}\frac{1}{2}b^2(X_s)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(s,X_s)\,\mathrm{d}s\\ &+\int_t^{t+k}\frac{\partial\Psi}{\partial x}(s,X_s)b(X_s)\,\mathrm{d}W_s\end{aligned}. \tag{16}$$

ただし，tおよびxに関する偏微分は，それぞれΨの左側ならびに右側の引数に対する偏微分を意味する．式(16)の最終項は，（局所）マルチンゲールであれば期待値をとった際に消える．以下ではこの状況を仮定する．式(16)より，次式を得る：

$$\begin{aligned}&\frac{\Psi(t+k,X_{t+k})}{\Psi(t,X_t)}-1\\ &=\frac{1}{\Psi(t,X_t)}\left\{\begin{aligned}&\int_t^{t+k}\frac{\partial\Psi}{\partial t}(s,X_s)\,\mathrm{d}s\\ &+\int_t^{t+k}\left(a(X_s)+\phi_s b(X_s)\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}(s,X_s)\,\mathrm{d}s+\int_t^{t+k}\frac{1}{2}b^2(X_s)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(s,X_s)\,\mathrm{d}s\\ &+\int_t^{t+k}\frac{\partial\Psi}{\partial x}(s,X_s)b(X_s)\,\mathrm{d}W_s\end{aligned}\right\}\end{aligned}. \tag{17}$$

式(17)の左辺をκと書き，これが十分に小さいと仮定する．kが十分に小さくΨが十分に滑らかであれば，この仮定は満足される．式(13)-(17)より，$\Phi(1)=1$であることから次式を得る：

$$\sup_{\mathbb{Q}(\phi)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\frac{1}{k}\left\{\kappa\Phi'(1)+\frac{1}{2}\kappa^2\Phi''(1)+o(\kappa^2)\right\}-\frac{1}{2\eta}\frac{1}{k}\int_t^{t+k}(\phi_s)^2\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right]=0\,, \tag{18}$$

すなわち

$$\sup_{\mathbb{Q}(\phi)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\Phi'(1)\frac{\kappa}{k}+\frac{1}{2}\Phi''(1)\frac{\kappa^2}{k}+\frac{1}{k}o(\kappa^2)-\frac{1}{2\eta}\frac{1}{k}\int_t^{t+k}(\phi_s)^2\,\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right]=0\,. \tag{19}$$

さらに先に進むために，極限 lim と極大化 sup，さらに期待値$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\cdot\middle|\mathcal{F}_t\right]$が以下のように交換可能であると仮定する：

$$\lim_{k\to+0}\sup_{\mathbb{Q}(\phi)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\ldots\middle|\mathcal{F}_t\right]=\sup_{\mathbb{Q}(\phi)}\lim_{k\to+0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\ldots\middle|\mathcal{F}_t\right]=\sup_{\mathbb{Q}(\phi)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\lim_{k\to+0}\ldots\middle|\mathcal{F}_t\right]=0\,. \tag{20}$$

ただし，“…”は式(19)の期待値の中身である．式(20)を認めると，古典的な伊藤の等長性から（期待値$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}(\phi)}\left[\cdot\middle|\mathcal{F}_t\right]$の中で）以下に示す一連の式を得る：

$$\lim_{k\to+0}\Phi'(1)\frac{\kappa}{k}=\frac{\Phi'(1)}{\Psi(t,X_t)}\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial t}(t,X_t)+\left(a(X_t)+\phi_t b(X_t)\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}(t,X_t)+\frac{1}{2}b^2(X_t)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(t,X_t)\right\}, \tag{21}$$

$$\lim_{k\to+0}\frac{1}{2}\Phi''(1)\frac{\kappa^2}{k}=\frac{\Phi''(1)}{2\left(\Psi(t,X_t)\right)^2}b^2(X_t)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}(t,X_t)\right)^2, \tag{22}$$

$$\lim_{k\to+0}\frac{1}{k}o\left(\kappa^2\right)=0, \tag{23}$$

$$\lim_{k\to+0}\left(-\frac{1}{2\eta}\frac{1}{k}\int_t^{t+k}(\phi_s)^2\,\mathrm{d}s\right)=-\frac{1}{2\eta}(\phi_t)^2. \tag{24}$$

式(21)-(24)の右辺はすべて時刻 t での情報に基づくために，式(26)を得る．ただし，

$$\text{時刻}\,t\,\text{において，}\sup_{\mathbb{Q}(\phi)}\text{は}\sup_{\phi_t\in\mathbb{R}}\text{を意味する} \tag{25}$$

と解釈し，再び記法の乱用を許して (t,X_t) を (t,x) と書く：

$$\sup_{\phi_t\in\mathbb{R}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Phi'(1)}{\Psi(t,x)}\left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}(t,x)+\left(a(x)+\phi_t b(x)\right)\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}(t,x)+\dfrac{1}{2}b^2(x)\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(t,x)\right\}\\ +\dfrac{\Phi''(1)}{2\left(\Psi(t,x)\right)^2}b^2(x)\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}(t,x)\right)^2-\dfrac{1}{2\eta}(\phi_t)^2\end{array}\right\}=0. \tag{26}$$

式(26)の定義域は問題依存であり，ここでは触れない．個別の設定が必要である．式(26)に課すべき終端条件は $\Psi(T,x)=f(x)$ である．

式(26)が最適性方程式ではあるが，もう少し式形を整理することができる．まず，各関数の引数を省略し，sup とは無関係な項を集めることで次式を得る：

$$\begin{array}{l}\dfrac{\Phi'(1)}{\Psi}\left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial t}+a\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}+\dfrac{1}{2}b^2\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right\}+\dfrac{\Phi''(1)}{2\Psi^2}b^2\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2\\ +\sup_{\phi_t\in\mathbb{R}}\left\{\dfrac{\Phi'(1)}{\Psi}\phi_t b\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}-\dfrac{1}{2\eta}(\phi_t)^2\right\}=0\end{array}. \tag{27}$$

式(27)の 2 行目の最大化問題は陽的に解ける．実際に，最大化は

$$\phi_t=\eta\frac{\Phi'(1)}{\Psi}b\frac{\partial\Psi}{\partial x} \tag{28}$$

により実現される．式(28)より，式(27)は以下のように書き換えられる：

$$\frac{\Phi'(1)}{\Psi}\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial t}+a\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right\}+\frac{\Phi''(1)}{2\Psi^2}b^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\frac{\eta\left(\Phi'(1)\right)^2}{2\Psi^2}b^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2=0. \tag{29}$$

式(29)を整理することで，次式に到達する：

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + a\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\eta'}{2\Psi}b^2\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 = 0\,. \tag{30}$$

ただし，

$$\eta' = \Phi'(1)\eta + \frac{\Phi''(1)}{\Phi'(1)} > 0 \tag{31}$$

である．式(30)が，本稿で導出を試みた最適性方程式の最終形である．

ところで，式(30)を

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + a\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \sup_{\phi\in\mathbb{R}}\left\{b\phi\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{1}{2\eta'}\phi^2\Psi\right\} = 0 \tag{32}$$

と書き直すことができる．式(32)は式(8)で $W \to B$ と形式的に置き換えた系の確率制御問題

$$\text{Find } \sup_{(\phi_t)_{t\geq 0}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[f\left(X_T\right)\exp\left(-\int_0^T \frac{1}{2\eta'}\left(\phi_s\right)^2 \mathrm{d}s\right)\right] \tag{33}$$

の HJB 方程式とみなせる．とくに，係数 $\phi^2/(2\eta')$ は割引率として理解できる．

2.5 最適性方程式の考察

最適性方程式(30)の式形は示唆に富んでいる．まず，左辺第 1, 2, 3 項は，確率過程 X の生成演算子に由来する項であり，標準的な HJB 方程式に広く現れるものである．左辺第 4 項が特徴的な項である．解の x 方向についての 1 階偏微分の 2 乗が現れる点が，既存のリスク鋭敏制御や不確実性下での最適制御問題と類似している．大きな差異は，分母に解が現れている点にある．また，この項が意味を持つためには，解が定符号であることが自然に要請される．これはオーリッチリスクの定式化の段階で要請している事項であった．分母に解があることは，定性的には，終端時刻 T から過去にさかのぼった情報に基づくほどオーリッチリスクを小さく見積もることに相当する．すなわち，エルゴード制御のような無限期間の制御問題を論じることがこのままでは困難であり，そのためには割引がある無限期間の問題を考える必要があると考えられる．ただし，確率過程や終端条件次第ではそうでないのかもしれない．式(28)により歪められた確率測度が，オーリッチリスクに付随する最悪条件下でのリスク評価を与えることもわかる．

式(31)にある係数 η' の形も興味深い．中辺第 1 項には，不確実性回避とリスク回避の影響が乗法的に現れている．この項は，オーリッチリスクの中ではリスクと不確実性が混合された形で評価されていることを意味する．中辺第 2 項は，古典的なリスク回避度を表現していると考えられる．ヤング関数 Φ が引数 1 における微分係数のみを介して最適性方程式に現れている点も重要である．このことは，Φ 全体のプロファイルが異なっていても，引数 1 における 1 階と 2 階の微分係数が同一であれば，同一の最適性方程式が得られることを意味する．ただし，これはノイズとして拡散過程を考えたことに起因する．実際に，ノイズとしてジャンプ過程を考える場合は Φ 全体のプロファイルが最適性方程式に効いてくることが示されている[14].

さいごに，式(32)-(33)はオーリッチリスクに付随する最適性方程式が別の最適制御問題と等価

であることを示す．このこと自体が興味深いことに加えて，割引率の中に制御変数ϕが入る制御問題について網羅的に性質が解明されているわけではないことも重要であろう．前述したエルゴード制御に関する事項も関係してくると考えられる．

3. 最適性方程式が厳密に解ける場合

前節の最適性方程式が厳密に解ける場合があり，簡素ながら様々な用途が考えられるために紹介する．以下の確率微分方程式を考える：

$$\mathrm{d}X_t = \left(a - rX_t\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}B_t\,,\quad t > 0\,,\quad X_0 = 0\,. \tag{34}$$

ここで，$a, r, \sigma > 0$はモデルパラメータである．確率微分方程式(34)の解は一意に存在し，なおかつほとんど確実に非負である[16, Chapter 1.2]．その解がCIR過程と呼ばれるものである．

以下の終端条件に基づいてHJB方程式を解く：

$$\Psi\left(T, x\right) = \exp\left(qx\right),\quad x > 0\,. \tag{35}$$

ここで，$q \in \mathbb{R}$はパラメータである．この場合，オーリッチリスクは確率変数X_Tの特性関数の上限を算出していることになる．HJB方程式は，次式で与えられる：

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \left(a - rx\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\eta'}{2\Psi}\sigma^2 x\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2 = 0\,,\quad x > 0\,,\quad t < T\,. \tag{36}$$

このとき，解Ψとして以下の形を仮定する：

$$\Psi\left(t, x\right) = e^{\alpha_t x + \beta_t}\,,\quad z > 0\,,\quad t < T\,. \tag{37}$$

ここで，α_t, β_tは時間依存の係数である．式(37)は確かに正の値をとる関数の候補である．式(37)を式(36)に代入すると次式が得られる：

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_t}{\mathrm{d}t} - r\alpha_t + r\frac{\sigma^2\left(1+\eta'\right)}{2}\left(\alpha_t\right)^2 = 0\,,\quad t < T\,,\quad \alpha_T = q\,, \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta_t}{\mathrm{d}t} + a\alpha_t = 0\,,\quad t < T\,,\quad \beta_T = 0\,. \tag{39}$$

式(38)から，以下のように係数αが求まる：

$$\alpha_t = \frac{1}{\dfrac{\sigma^2\left(1+\eta'\right)}{2} + \left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{\sigma^2\left(1+\eta'\right)}{2}\right)e^{r(T-t)}}\,,\quad t \le T\,. \tag{40}$$

係数βについては式が長くなるためにここに示さないが，式(39)-(40)から一意に求まる．

式(28)に対応する最悪条件下での歪みは，

$$\phi_t = \eta\frac{\Phi'(1)}{\Psi}\sigma\sqrt{x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \eta\frac{\Phi'(1)}{e^{\alpha_t x + \beta_t}}\sigma\left(\alpha_t\sqrt{x}e^{\alpha_t x + \beta_t}\right) = \sigma\eta\Phi'(1)\alpha_t\sqrt{x} \tag{41}$$

となる．マルコフ性の仮定を思い出しつつ，式(41)を歪んだバージョンの式(34)：

$$\mathrm{d}X_t = \left(a - rX_t\right)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\left(\phi_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t\right) \tag{42}$$

に代入すると

$$\mathrm{d}X_t = \left[a - \left(r - \sigma\eta\Phi'(1)\alpha_t\right)X_t\right]\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t \tag{43}$$

を得る．オーリッチリスクに由来する歪みのもとでは，元の CIR 過程は別の CIR 過程に変換されるということである．ただし，式(43)の係数は時間依存である．こうしたある種の不変性は式(34)の形に起因するものであると考えられるが，他の確率微分方程式ではどのようになるのかを検討することには意味があるであろう．

確かに最適性方程式が厳密に解ける場合があることがわかった．しかしながら，いつでもその解が存在するわけではない．より具体的には，

$$\frac{1}{q} - \frac{\sigma^2\left(1+\eta'\right)}{2} < 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2}{\sigma^2\left(1 + \dfrac{\Phi'(1)^2\eta + \Phi''(1)}{\Phi'(1)}\right)} < q \tag{44}$$

のとき，式(38)の解が以下の有限時間 τ （式(40)の分母が 0 になる時刻）で爆発する：

$$\frac{\sigma^2\left(1+\eta'\right)}{2} + \left(\frac{1}{q} - \frac{\sigma^2\left(1+\eta'\right)}{2}\right)e^{r(T-t)} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \tau = T + \frac{1}{r}\ln\left(1 - \frac{2}{q\sigma^2\left(1+\eta'\right)}\right). \tag{45}$$

式(37)で与えられる Ψ は（時間後ろ向きに積分していることに注意）時刻 τ より前の時刻に拡張できないということになる．

以上のように，最適性方程式はいつでも大域的に解けるわけではない．式(44)の意味を考察すると，最適性方程式の大域解が存在しない（解が有限時間で爆発する）条件をより深く理解することができる．式(44)の左辺を固定して右辺を見ると，指数 q が大きい場合は大域解が存在しない．あまりにも増大速度が大きい，すなわちリスクに鋭敏すぎる終端条件に基づくリスク指標は無意味な結果を与える．感度が大きすぎるリスク指標は役に立たない，と言い換えることができる．CIR 過程の定常確率密度関数がガンマ分布であることも関係している．実際に，ガンマ分布の指数モーメントは指数が大きい場合には定義できない．

式(44)については別の見方もできる．まず，ノイズの強度に対応する σ または不確実性回避の強度 η が大きくても同様の事態が生じる．さらに，リスク回避度 $\Phi''(1)/\Phi'(1)$ が大きい場合も同様である．このように，ごく簡素な厳密解から多様な示唆が得られる．本節の厳密解は，数値計算手法の妥当性を検証する際にも有用であろう．

4. おわりに

オーリッチリスクならびに最適性方程式は，あらゆる分野で現れる確率制御問題に応用できると考えられる．系の次元にも大きな制約は無いと考えられる．ただし，これらの使用に際しては以下の注意点がある．定義上，オーリッチリスクは対象とする確率過程が非負であり，なおか

つある意味で増大速度が小さいものでなくてはならない．前者については，幾何ブラウン運動には応用できてもブラウン運動には応用できないという可能性がある．後者については本稿の前節で論じたものが一例であるが，最適性方程式の解を求めた後に解の存在性を論じている．最適性方程式を導くまたは解く前の段階で解の存在性を判別できるような理論の構築が望まれる．本稿の読者であれば「…を仮定する」という文章の多さに気付くであろう．どのような問題ではどの部分の仮定を撤廃することが可能であるのか，という考察も意義深い研究課題である．本稿に限らず，「この積分や微分は本当に存在するのであろうか．また，存在するのはどのようなときであろうか」という視点を持ちながら数理モデルを眺めることは極めて重要である．

本稿で紹介したオーリッチリスクは，時間に依存した動的リスク指標である．確率過程ではなく時間に依存しない確率変数に対する静的なバージョンが 2018 年に立案されており[17]，その後，河川流況の分析に応用されている[18]．この場合においても，オーリッチリスクの存在性の議論が理論と応用の両観点から重要であることが確認されている．さらに，本稿では上側のリスク評価に資する定式化を示したが，下側のリスク評価に資するバージョンも同様に定式化できる．ただし，互いに異なる存在条件が課される[18]．この点に注意が必要である．上述した「この積分や微分は本当に存在するのであろうか」という考察が鍵となっている．

さいごに，本稿の主題とは直接関係しないが，数理の新しい概念や方法論を構築するうえで重要であると著者らが考えている事項に触れたい．理論と応用の間には，未だに深い川が流れていると感じている．理論サイドは「このような新しい概念が見出された．素晴らしいものであるので，是非とも応用サイドで使っていただきたい．」と考えているが応用サイドの需要と合わず，結局のところ使われないということが多々ある．その反面，応用サイドは理論サイドを「なんでも産み出せる魔法使い」のように捉えていると経験することも多々ある．難しいことではあるが，著者らは理論と応用の双方に一貫的に取り組むことでこの状況を打破しようと試みている．例えば，自分（達）で両方する，というのは一つの解決策である．本稿で取り扱ったオーリッチリスクに限らず，少しでも理論と応用を貫く研究を実現できればと考えている．

謝辞 本研究は，京都大学数理解析研究所「共同利用・共同研究拠点事業」ならびに JSPS 科研費（番号 22K14441 および 22H02456）の支援を受けました．また，研究集会「ファイナンスの数理解析とその応用」においていただいた貴重なコメントを本稿にフィードバックすることができました．研究集会の主催者の方々，ならびに参加者の方々に深く感謝申し上げます．

引用文献

[1] Nikseresht A, Amindavar H (2023) Hourly solar irradiance forecasting based on statistical methods and a stochastic modeling approach for residual error compensation. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment. Published online. https://doi.org/10.1007/s00477-023-02539-5

[2] Betz T, Lim D, Käs JA (2006) Neuronal growth: a bistable stochastic process. Physical Review Letters, 96(9), 098103. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.098103

[3] Øksendal B, Sulem A (2019) Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Cham: Springer International Publishing.

[4] Yang L, Gao T, Lu Y, Duan J, Liu T (2023) Neural network stochastic differential equation models with applications to financial data forecasting. Applied Mathematical Modelling, 115, 279-299. https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.11.001

[5] Bielecki T, Pliska S (2000) Risk sensitive asset management with transaction costs. Finance and Stochastics, 4, 1-33. https://doi.org/10.1007/s007800050001

[6] Hansen LP, Sargent TJ (2001) Robust control and model uncertainty. The American Economic Review, 91, 60-66. https://doi.org/10.1257/aer.91.2.60.

[7] Ju N, Miao J (2012) Ambiguity, learning, and asset returns. Econometrica, 80(2), 559-591. https://doi.org/10.3982/ECTA7618

[8] Bellini F, Laeven RJ, Gianin ER (2021) Dynamic robust Orlicz premia and Haezendonck–Goovaerts risk measures. European Journal of Operations Research, 291(2), 438-446. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.08.049

[9] 北 廣男 (2009) オーリッチ空間とその応用. 岩波書店, 東京. (オンデマンド版も 2022 年に出版されている).

[10] Rao MM, Ren ZD. (2002) Applications of Orlicz spaces. USA: CRC Press.

[11] Rubshtein BZA, Grabarnik GY, Muratov MA, Pashkova YS (2016) Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions. Cham: Springer International Publishing.

[12] Cheridito P, Li T (2008) Dual characterization of properties of risk measures on Orlicz hearts. Mathematics and Financial Economics, 2, 29-55. https://doi.org/10.1007/s11579-008-0013-7

[13] Yoshioka H, Tsujimura M (2023) The Robust Orlicz Risk with an Application to the Green Photovoltaic Power Generation. Preprint. https://arxiv.org/abs/2307.13879.

[14] Yoshioka H, Tsujimura M, Aranishi F, Tanaka T (2023) Environmental management and restoration under risk and uncertainty unified under a robustified dynamic Orlicz risk. Preprint. http://arxiv.org/abs/2306.01998

[15] Yamada T, Watanabe S (1971) On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. Journal of Mathematics of Kyoto University, 11(1), 155-167. DOI: 10.1215/kjm/1250523691

[16] Alfonsi A (2015) Affine diffusions and related processes: simulation, theory and applications. Cham Heidelberg New York Dordrecht London: Springer International Publishing.

[17] Bellini F, Laeven RJ, Rosazza Gianin E (2018) Robust return risk measures. Mathematics and Financial Economics, 12, 5-32. https://doi.org/10.1007/s11579-017-0188-x

[18] Yoshioka H, Tomobe H, Yoshioka Y (2023) Orlicz risks for assessing stochastic streamflow environments: a static optimization approach. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment. Published online. https://doi.org/10.1007/s00477-023-02561-7

---

[i] 本稿は，京都大学数理解析研究所の共同研究（公開型）として 2023 年 8 月 30 日から 9 月 1 日にかけて開催された研究集会「ファイナンスの数理解析とその応用」における，著者らによる同名の講演内容の一部を概説するものである．