高等学校数学科におけるICTを活用した三角関数を含む関数の最大値・最小値の導出

福岡教育大学教職大学院 2 年次　内田　幹貴
福岡教育大学教職大学院　有元　康一
Yoshitaka Uchida, Koichi Arimoto,
Graduate School Research Divisions of Education,
University of Teacher Education Fukuoka

1　問題の所在

高等学校においては令和 4 年度より, 新学習指導要領 [1] に沿った教育活動が行われている。新学習指導要領では, これからの社会は Society5.0 と呼ばれ, 社会や生活などが大きく変化し予測困難な時代となることから, 子供たちが様々な変化に積極的に向き合い, 他者と協働して課題を解決していくことの重要性を指摘している。従来の, 教師が生徒に何をどのように教えるかという視点に加え,「生徒が授業等の学びを通して, どのような力を身につけていくことができるのか」という視点を重視するなかで, 生徒が能動的に学習を進めていけるような,「主体的・対話的で深い学び」を目指した授業改善の必要性を指摘できる。

このようななか, GIGA スクール構想の実施にともない, 小学校・中学校においては, 1 人 1 台端末の整備がほぼ完了している。しかし, 高等学校においてはこの整備が遅れている現状にある。著者らは中学校と高等学校の ICT の活用の仕方の差について指摘している ([2])。中学校では生徒がロイロノートを活用し, 生徒同士考え方を共有している協働的な学びが実現されているのに対して, 高等学校では教師がデジタル教科書を活用し板書する時間の短縮を図っている現状であった。また, 小・中学校では ICT を活用した実践例も多数紹介されている (たとえば [3])。

今後 1 人 1 台端末を使ってきた世代が高等学校に入学する。先ほど述べたような ICT 活用についての中学校と高等学校の差を埋められるように, 高等学校に 1 人 1 台端末が整備された後, この環境を生かした授業づくりを行うことが喫緊の課題である。

2　研究の目的

高等学校数学科において, 生徒が課題を把握し解決するために, 試行錯誤を重ねたうえで, 他者と協働することにより, 自分の考えを深めていく力が求められる。第 1 著者の内田は, 数学教科の特性を踏まえ ICT を活用したうえで「主体的・対話的で深い学び」を実現する授業改善を図った授業実践を行った ([4])。

本研究では第 1 著者の内田による授業実践のもとであった授業構想を, 数学教科の特性および「主体的・対話的で深い学び」の観点から考察を行い, この授業構想の意義や

課題を明らかにする。そして, このことにより自己の実践研究の能力を高めるだけでなく, 高等学校におけるICTを活用した授業構想例を提示することを目的とする。

3　構想授業の内容

以下に構想した授業について述べる。授業実践では関数グラフソフトであるGRAPESを活用した。なお本節は, 内田 [4] を引用し補足した内容である。

3.1　構想授業の概要

検討した授業構想の概要について以下に示す。

- 実施　11月中旬
- 対象　高等学校第1学年
- 科目　数学I
- 単元名　第4章 図形と計量, 第1節 三角比（全8時間計画　第8時）
- 目標　三角比の意味やその基本的な性質について理解し, 三角比の相互関係などを理解できるようにする。また, 日常の事象や社会の事象などを数学的にとらえ, 三角比を活用して問題を解決する力を培う ([5])。（第1節）

今回構想した授業は, 同一内容で3学級においてそれぞれ行った。実際の授業では, PCがうまく作動しない状況等があったが, 本研究ではICTの効果的な利用の観点から考察を行うことが目的であるため, 授業実践前に構想した内容について述べる。

授業では, 三角関数を含む関数 $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ の最大値と最小値を求める活動をICTを活用して工夫した内容を実施した。

授業の流れとしては, $\theta = 0°, 30°, 45°$ などの代表的な角度に対して y の値を求めた後, ICTを活用して, 角 θ の大きさと y の値の組 (θ, y) を座標平面上にプロットした後に y の最大値と最小値を予想した。その後 $\cos\theta = t$ とおいて $y = -t^2 + t + 1$ と y を t の2次関数で表し, y の最大値と最小値およびそのときの θ の値を求めた。その後に, ICTを活用して $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ のグラフを描き, 求めた最大値と最小値およびそのときの θ の値が正しいことを確認する内容とした。

3.2　構想授業の流れ

1年生の段階では, 三角比は学習していても, それを一般角 θ の関数とした考え方はまだ学習していない。また, $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ の最大値と最小値の求め方およびグラフの概形も学習していない。しかし既習事項を組み合わせながら, 置き換えを利用し, 2次関数に帰着させることで最大値と最小値を求めることができる。

はじめに, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲内のいくつかの角 θ における $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ の y の値を求め, GRAPES でプロットしたグラフ（図 1）を表示し, このグラフだけでは最大値と最小値が断定できないことを確認する。

次に, 以前学習した 2 次関数の最大値・最小値の問題と今回学習する問題の違いについて把握する。ここで, 今回はどこで解けなくなるのかという課題を把握し, それを解消するためには何ができるのかを, 個で考える時間とグループ協議の時間を通して思考を深めていく。そして, 置き換えて 2 次関数に帰着させることによって, 2 次関数のときと同様に考えていくことができることに気づく。

最後に図 2 の $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ のグラフの概形を表示し, 図 1 の点 D と点 I のそれぞれで最大と最小となることを確認するとともに, グラフを描くことができなくても最大値と最小値を求めることができることを確認する。下の図 1 および図 2 の横軸（θ 軸）は, ラジアンを単位とする弧度法による目盛りとなっている。

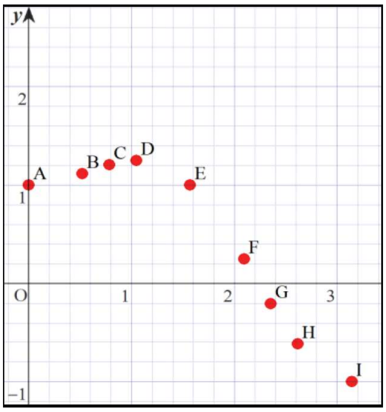

図 1　プロットしたグラフ

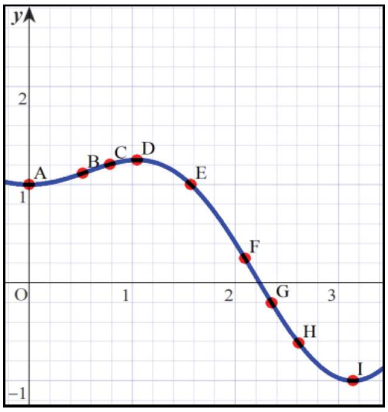

図 2　$y = \sin^2\theta + \cos\theta$ のグラフ

3.2.1　導入

- 課題を把握する。
  【問】 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき, $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ の最大値と最小値, およびそのときの θ の値を求めよ。

- $\theta = 0^\circ, 30^\circ$ のときの y の値について考える（表 1）。

表 1　ワークシートで提示した表

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
y									

3.2.2　展開（前半）

- θ が $0^\circ, 30^\circ$ 以外のときの y の値を求めて記録する（表 1）。

- 各自求めた y の値をグループで確認しあう。
- y の値について, 電子黒板に表示されたグラフを確認する（図 1)。
- y の値は, θ が 60° のときに最大となり, θ が 180° のときに最小となるといってよいかについて考える。

3.2.3　展開（後半）

- y が θ の関数になっていることを踏まえ, 今までに学んだ 2 次関数のときと同じように考えられないか考察する。
- 今回考えている式について, なぜ分からないと思ったか, どうすればよいかを考える。
  - y が x の整式によって表されていないから。
  - $\sin\theta$, $\cos\theta$ が入った式を今まで見たことがないから。
  - $\sin\theta$, $\cos\theta$ の 2 種類の関数が含まれているから。
  - 置き換えることにより, x を含んだ整式の形にすればよい。
- 置き換えを行う前に 2 種類の $\sin\theta$ と $\cos\theta$ を統一するために, 何か式の変形ができないかを考える。
  - 三角比の相互関係 $(\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$ を使う。
- $\cos\theta = t$ とおくと, y は t を使ってどのように表せるかを考える。
  - $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ より, $y = 1 - \cos^2\theta + \cos\theta$ となる。
  - $y = 1 - t^2 + t$ より, $y = -t^2 + t + 1$ が得られる。
- 2 次関数で学んだ内容を思い出し, 最大値と最小値, および最大や最小を与える t の値を求める。
  - 最大値は $\frac{5}{4}$ ($t = \frac{1}{2}$ のとき), 最小値は -1 ($t = -1$ のとき) である。
- $\cos\theta = t$ と置き換えたことから θ の値を求め, もとの関数の最大や最小を与える θ の値を求める。
  - 最大を与える $\theta = 60^\circ$, 最小を与える $\theta = 180^\circ$ である。
- 電子黒板に表示された $y = \sin^2\theta + \cos\theta$ のグラフを見て, 求めた y の最大値と最小値が正しいこと確認する（図 2)。

3.2.4　終末

- 今回学習したことのまとめとして, 振り返りシートに書く。
  - y が θ の関数になっていることを踏まえ, $\cos\theta = t$ と置き, y を t の 2 次関数で表すことにより, 最大値と最小値を求めることができたことを振り返る。

4　構想授業の考察とその発展

本節ではまず, 今回取りあげた題材の背景について触れる。その後, ICT の効果的な活用の観点で本授業構想について, 数学教科の特性を踏まえた視点, 「主体的・対話的な深い学び」の視点のそれぞれで考察をする。なお, ICT の活用についての考察にあたり飯島 ([6]) を参考にした。

4.1　本題材における背景

まず, 三角関数についての大学生における認知に関連して, 有元・細野 [7] は, ある教育学部の初等教育教員養成課程に所属する学生を主対象者とした授業において, 「y は x の関数となっている例を, 知っている限り多数挙げなさい。」という質問をしたところ, $y = \sin x$ などの三角関数に関する式や用語を挙げた学生は 53 名中 5 名 (9.4%) であったことを報告したうえで, 今までの指導経験からも, 三角関数を苦手と感じている高校生が多数いると考えられることを指摘している。

その一方で, 今回取りあげた三角関数を含む関数の最大値・最小値を考える内容は, 高等学校の教科書だけでなく, 大学で学ぶ数学の前段階として位置付けることができる。これは, 例えば松坂 [8, p376-377], 吉本・豊泉 [9, p120] において取りあげられている。このように三角関数は数学を学ぶうえで重要な概念であり, 三角関数の相互関係 ($\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ など）, 三角関数の合成 ($a\sin\theta + b\cos\theta = r\sin(\theta+\alpha)$) などを用いて, 正弦または余弦の一方のみの関数として表し, $\sin x = t$ などとおいて t の変域を考えたうえで,

- y を t の整関数で表して, グラフを描く
- t が 2 次式であれば実数の性質より $t^2 \geq 0$ などとして, 不等式を考える

ことにより最大や最小を求めることになる。このように本題材に関する内容は大学で学ぶ数学に必要な素養と考えられる。

4.2　数学教科の特性からの ICT 活用

本小節では, 本授業構想について数学教科の特性を踏まえた ICT の効果的な活用の観点で考察をする。山本 [10] は, 数学の実験には「数学実験」と「実験数学」の 2 つが考えられ, 明確な区別はないとしながらも,

- 数学実験　　的確な実験により, 知識, 技術を修得し, 定着させる。
- 実験数学　　多くの実験を通して, 新しい知見を得る。

と述べ, 実験数学は, 本来, 数学の研究を行うときに利用される技術であるが, 単に数学研究の技術としてではなく, 数学の学習の方法としても有効であることが分かると指摘している。この文脈で今回の授業構想をとらえれば, 従来の数学教育では「数学実験」

として扱われていた内容を, 生徒の思考をより中心に考えた「実験数学」として扱ったということができる。

高等学校における指導場面において, $y=\sin^2\theta+\cos\theta$ の最大値と最小値を求める活動において, $\cos\theta=t$ とおいて 2 次関数に帰着して考えるが, 帰着するまでの過程やそこで得られた結果について十分に考える場面は少ないと考えられる。この現状を踏まえて本授業構想において, ICT の活用が効果的であったと考えられる点について考察をする。

4.2.1　有限個の点をプロットして最大値と最小値を帰納的に推論した

今回の授業では, いくつかの角 θ について y の値を求めた結果を, ICT を活用して図示し最大値と最小値を推論したうえで議論を進めている。このとき, 生徒自身の手でプロットしようとすると時間がかかるため, ICT を活用することにより時間の短縮を図り, また視覚的に訴えることにより, 生徒が丁寧に推論を行うことが期待できる ([4])。このことにより, 生徒の予想から, なぜ置き換えが必要なのかを考える時間, 他者と協議しながら思考を深める時間を確保することが期待できる ([4])。このように, y の値の増減や最大・最小について考える際に, y が θ の関数であり, いくつかの角 θ についてそれらの y の値を求めることは基本となる考え方である。このような考え方に基づいて指導を行うことは重要な視点である。

また, θy 座標平面上に有限個の点をとり, y の最大値と最小値を帰納的に推論した結果は正しいかどうかはこの時点では分からないが, このような推論の活動を取り入れることは数学における問題解決過程を意識するうえでも意義があると考えられる。

有元・米倉ほか [11] は, ある問題解決の過程で ICT を活用して帰納的に推論し, その結果が正しいことを人が証明するという一連の流れを想定できることを述べている。ここでは, まず予想する段階で ICT を活用して帰納的な推論を行い（実験段階・試行錯誤の過程）, その後証明する段階で定式化された事柄が正しいことを演繹的に推論する（検証段階・結論導出の過程）という授業の流れが, ICT の効果的な活用方法の例として示されている。また, この研究において題材例の一つに関数があげられており, 今回の授業構想もこの実践事例の一つとして位置付けられる。

4.2.2　$y=\sin^2\theta+\cos\theta$ のグラフを表示して確認した

今回の授業構想では, $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ のときの $y=\sin^2\theta+\cos\theta$ のグラフを GRAPES を活用して描いたものを提示し, この関数における値の変化についてのイメージをもたせたうえで, 求めた y の最大値・最小値とそのときの角 θ が正しいことを確認する活動を設定した。GRAPES を活用して $y=\sin^2\theta+\cos\theta$ のグラフを描いたものを図 3 で示す。文部科学省 [12] においても, 高等学校数学科における ICT の活用例として「数学 II：いろいろな関数（三角関数）など」において, 発展的な内容を取り上げて理解を深める場面として, 関数 $y=\cos 2x-2\sin x$ $(0\leq x<2\pi)$ の最大値と最小値を求める活動をあげている。ここでも, $y=-2\sin^2 x-2\sin x+1$ と変形して $t=\sin x$ と置き, y を t の 2 次関数として $-1\leq t\leq 1$ の範囲で最大値を最小値を求める活動を想定している。このとき, ICT を活用して「複雑なグラフもコンピュータを活用すると容易にかくことができ

る。グラフを確認するとむしろ, 複雑なグラフをかかなくても置き換えを利用して 2 次関数の最大・最小に持ち込む数学的な考え方のよさを実感できる。」と述べられている。

4.2.3 ICT 活用の視点からの意義

以上の考察により本授業構想において, ICT 活用の視点において効果的であったといえる内容について 3 点を指摘する。

1 点目は, 問題を解決する過程を重視し, 与えられた関数の最大値・最小値を帰納的に推論する過程を設定し, その場面で ICT を活用する計画としたことである。2 点目は, 与えられた関数の最大値・最小値を, 置き換えにより既習の関数に帰着して求めた後, ICT を活用してもとの関数のグラフを与えることにより, 求めた内容が正しいことを確かめ, もとの関数について理解を深めるきっかけを与えたことである。3 点目は, 今回提案した授業構想の考え方は, 他の関数における指導にも適用が期待できることである。この点については次で考察をする。なお, 下の図 3 の横軸（θ 軸）は, ラジアンを単位とする弧度法による目盛りとなっていることを注意しておく。

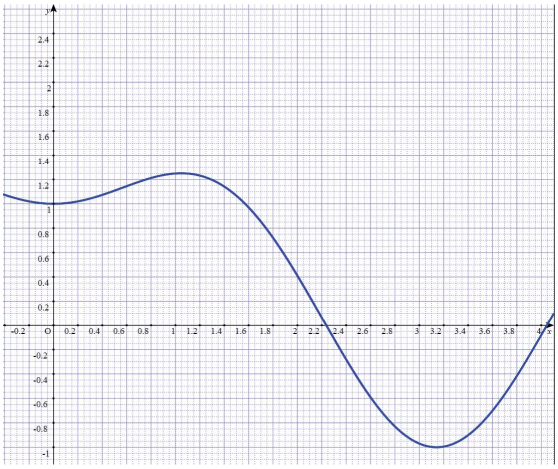

図 3　GRAPES で描いた $y = \sin^2 x + \cos x$ のグラフ

4.2.4 ICT 活用の視点からの発展

今回構想した授業は, 他の三角関数を含む関数においても同じような方針で実施することが期待でき, 汎用性があることを指摘できる。ある三角関数を含む関数のグラフを今まで学習した範囲で描くことができない場合, ICT を活用して次の手順でその関数の最大値・最小値を導出する授業を行うことが考えられる。

- 定義域内のいくつかの値に対して関数における値を求める。
- ICT を活用して, それらの値を座標平面上にプロットする。
- 関数の最大値・最小値を帰納的に推論する。

- $\sin\theta = t$ などとおいて, もとの関数を t の式で表す。
- もとの関数を, 既知の t の関数として考え, グラフを描くことにより最大値・最小値を求める。
- ICT を活用してもとの関数の概形を描き, 求めた最大値・最小値が正しいことを確かめる。

4.3 「主体的・対話的で深い学び」の視点からの ICT 活用

本小節では, 本授業構想について「主体的・対話的で深い学び」の視点から ICT の効果的な活用の観点で考察をする。

4.3.1 帰納的に最大値・最小値を推論する過程において

θy 座標平面内に有限個の点がプロットされたうえで, これらの情報だけで正しく最大値や最小値を求めることができるかについて生徒間で協議する活動を設定したい。この情報だけでは求められない理由を協議する機会や時間を確保することにより, 対話のなかから深い学びを得ることが期待できる。

4.3.2 置き換えにより最大値・最小値を求めた後において

今回は $\cos\theta = t$ とおいて y を t の 2 次関数で表すことにより, y の最大値・最小値を求めた。正しい論理により結論を導いたことは理解できたとしても, もとの関数における値の増減については未知である。このような状況において, 生徒たちの対話によって「もとの関数のグラフがどのようになっているのかについて知りたい。」という意見が出てくることも予想される。教師は, このような対話が行われることも想定したうえでこのような機会を確保することが望まれる。

4.3.3 ICT 活用の視点からの課題

今回は, 教師が 1 台の PC を活用して PC の画面をスクリーンに映したものを学級全体で共有する方法により授業を構想・実施している。この授業の成果と課題を踏まえたうえで, 1 人 1 台端末を有効に活用した授業設計を考察することが課題である。

5 本研究の成果と課題

本研究では, 高等学校数学科において ICT を活用し, 三角関数を含む合成関数の最大値・最小値について, 帰納的推論過程を重視し, 得られた結論の可視化を図った効果的な活用事例を提示することができた。今回構想した授業では, 教師が 1 台の PC を活用してその画面をスクリーンで映したものを生徒に共有して議論を深めている。今後の研究

の方向性として, 1 人 1 台端末を活用し, 思考を深めていくことができる授業構想を視野に入れる。

附記

本研究は, 第 1 著者が昨年度課題演習として実践研究を行い, 教職大学院に提出した中間報告書 ([4]) および中間報告会における資料等を, その後数学教科の特性および「主体的・対話的で深い学び」の実現の視点を踏まえた ICT 利用の観点から著者 2 名で検討したものである。そのため, 本論文の第 1, 2, 3, 5 節は, 第 1 著者による [4] 等を本研究の目的に沿って再構成し, 加筆・修正したものであり, 第 4 節は第 2 著者が今回新たに執筆した。

なお, 個人情報保護の観点から, 本研究に関連して実施した授業の実施校, 生徒の実態等については明らかにしていない。

謝辞

本研究の基となる授業構想および実践に対して, 有益な御助言をいただきました実習校の先生方, 本学教職大学院所属の先生方および本学授業担当の先生方に御礼を申し上げます。また, 著者らによる RIMS 共同研究「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」における講演に対して, 有益な御助言をいただきました先生方に御礼を申し上げます。

参考文献

[1] 文部科学省 :「高等学校学習指導要領（平成 30 年度告示）解説 数学編 理数編」, 2019.

[2] 佐藤禎大・内田幹貴・有元康一：高等学校数学科における効果的な ICT の活用について ー「社会人基礎力」の育成を視野に入れてー, 数理解析研究所講究録 2236, 京都大学数理解析研究所, pp.148-157, 2022.

[3] 上越教育大学附属中学校 :「GIGA スクール時代の学校　ー自己調整を促し創造性を発揮する ICT の活用ー」, 東京書籍, 2021.

[4] 内田幹貴：中間報告書, 福岡教育大学大学院 中間報告会発表資料（未公刊）, 2023.

[5] 数研出版 web ページ :「シラバス作成資料」(高等学校シリーズ 数学 I)
`https://view.officeapps.live.com/op/view.aspx?src=https%3A%2F%2Fwww.chart.co.jp%2Fkyokasho%2F22kou%2Fsugaku%2Fimg%2Ftop%2Fsyllabus_kousu1.docx&wdOrigin=BROWSELINK`
(2023 年 7 月 2 日最終閲覧)

[6] 飯島康之 :「ICT で変わる数学的探究 次世代の学びを成功に導く 7 つの条件」, 明治図書, 2021.

[7] 有元康一・細野元秀 : 高等学校数学科におけるポリアによる問題解決の過程を踏まえた三角関数の指導, 数学教育学会 2021 年度秋季例会予稿集, 数学教育学会, pp.69-71, 2021.

[8] 松坂和夫 :「新装版 数学読本 2」, 岩波書店, 2019.

[9] 吉本武史・豊泉正男 :「数学基礎入門 −微積分・線形代数に向けて−」, 学術図書, 2010.

[10] 山本芳彦 :「実験数学入門」, 岩波書店, 2000.

[11] 有元康一・米倉脩真・林瑞樹 : 数学科教育における帰納的推論過程を踏まえた ICT の効果的な活用に向けての基礎研究, 福岡教育大学大学院教育学研究科教職実践専攻（教職大学院）年報, 13, 11-17, 2023.

[12] 文部科学省 : 算数・数学科の指導における ICT の活用について, https://www.mext.go.jp/content/20200914-mxt_jogai01-000009772_001.pdf (2023 年 7 月 2 日最終閲覧)