Visualized Rational Approximation of Binomial Roots by Recurrence Sequences

室井龍二・鷲尾勇介・鷲尾夕紀子・鈴木潔光・利根川聡・平田典子
Ryuji Muroi · Yusuke Washio · Yukiko Washio · Kiyomitsu Suzuki · Satoshi Tonegawa and Noriko Hirata-Kohno
日本大学大学院 理工学研究科 数学専攻・日本大学 理工学部
Mathematics Major, Graduate School of Science and Technology, Nihon University, College of Science and Technology, Nihon University

1　はじめに

昨年 2022 年においては，Riemann zeta 関数の奇数 3 における値 $\zeta(3)$ に対し，1979 年の R. Apéry による $\zeta(3)$ の無理数性の証明で構成された近似列と，Apéry の結果の別証明を与えた F. Beukers の考察に現れる近似列，また連分数展開による近似列の近似速度を視覚的に比較した．

本年は Poincaré-Perron の定理と呼ばれる，差分方程式に関する著名な定理を活用した新たな有理近似を述べる．そして有理数の対数関数における値，また冪乗関数における値という実数を対象として，連分数展開による近似と，Poincaré-Perron を活用した Padé 近似列との近似の速度を比較するための視覚化を実施した．

ここでは有理数の自然対数及び冪乗関数における値を扱った．Hermite-Lindemann の定理や，冪乗関数の基本的性質等から値が無理数になることは既知である．無理数であるため，連分数展開は無限に続く．そのような無理数に対して Mathematica という数学ソフトウェアでの convergent というコマンドで得られた連分数の n 次近似分数である有理数列の近似速度と，Poincaré-Perron を用いた Padé 近似による有理数列の近似速度を比較したのである．Poincaré-Perron の定理は，漸近的な良い評価を与える理想的なツールである．Poincaré-Perron を適用した近似列に対し，その良さを視覚的に確認することが，本稿の目的である．

Poincaré-Perron の定理を適用するには，考える近似列が，添字で表される**明示的な漸化式を持つ数列**である必要がある．一般に無理数性が未知の実数に対し，その数に近づく Padé 近似の有理数列を明示的に構成すること自体が，実際は整数論の難問であって，近似列を具体的に添字 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の式で表すことさえ難しいが，最終著者のもとで JSPS PD 研究員としての研究を実施した Anthony Poëls 及び，川島 誠は，ある超幾何級数に対する Padé 近似列の明示的な漸化式の構成 [10] に成功した．今回はその漸化式を適用している．

2　有理数における対数関数と指数関数の値の数論的性質

まず超越数論の基本である，Hermite-Lindemann の定理を述べる．代数的数とは有理数係数の一元多項式の根になる数で可算集合を成す．その集合を $\overline{\mathbb{Q}}$ と表す．$\overline{\mathbb{Q}}$ は複素数の真部分集合である．超越数とは複素数より代数的数を除いた集合の元で，非可算無限集合を成す．有理数は実数の代数的数に含まれるため（実数のうち有理数でない数を無理数と定義していることより）実数の超越数は無理数になる．

Theorem 2.1 (Hermite- Lindemann の定理, 1873/1882). α が 0 でない代数的数なら，$\exp(\alpha)$ は超越数となる．

$\alpha = 1$ のときが e の超越性である．この Ch. Hermite の e の超越性は 1873 年に示されているが，Padé 近似（同時近似）の手法で証明されていることに注意しておこう．

定理 2.1で $\alpha = i\pi$（i は虚数単位）とおき，$0 \neq \alpha$ が代数的数であると仮定すれば，$\exp(i\pi) = -1$ は超越数ではないので矛盾．従って $i\pi$ は超越数．もし π が代数的数であると仮定すれば，代数的数である i と π の積は代数的数になってしまうので，π は超越数（F. Lindemann の定理，1882 年）となり，もちろん無理数である．

Hermite-Lindemann の定理の簡単な系をもう一つ述べておく．これは代数的数の複素共役も代数的数であることに注意すれば得られる．

Corollary 2.2. $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ のとき，α 及び $\sin\alpha$ の少なくとも一方は超越数である．同様に α 及び $\cos\alpha$ の少なくとも一方は超越数である．

Hermite-Lindemann の定理を一般的に拡張したのが Fields 賞を受賞した A. Baker の下記の定理（対数一次形式 linear forms in logarithms）である．

Theorem 2.3 (A. Baker [3]). 非零の代数的数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の自然対数 $\log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_n$ が $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立ならば，1 を加えた $n+1$ 個の数 $1, \log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_n$ は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で 1 次独立である．

自然対数が，定理2.3の仮定を満たすかどうかを，確認することを考えよう．非零の数 1 個は常に 1 次独立である．2 個以上の有理数の自然対数の $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立性も容易に判定できるが，2 個以上の代数的数の自然対数の $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立性の判定 [6][7] は，一般に自明ではない．また，Hermite-Lindemann の定理より，$0 \neq r/s \in \mathbb{Q}$ に対しては $\log(1-r/s)$ が超越数なので，$\log(1-r/s)$ は無理数である．しかし，Alladi-Robinson の Padé 近似の論文 [1] の拡張としての Shifted logarithm という，自然対数の拡張である実数の無理数性及び数論的性質 [6][7][10][13] は非自明である．Hermite-Lindemann の定理からは従わないため，別途，証明の必要があることを注意しておこう．

まず自然対数に対する Padé 近似を用いた無理数性に関し，Legendre 多項式の性質を用いた証明を $\log 2 = -\log(1/2) = -\log(1-1/2)$ の場合に紹介する．

無理数性を示すための判定規準とその証明を述べよう．本稿では以下，n は 0 以上の整数として数列の添字を表すことにする．

Lemma 2.4. $\theta \in \mathbb{R}$ に対し，$\{(p_n, q_n)\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ を満たす整数列が存在し，

$$\text{無限個の } n \text{ に対し } q_n\theta - p_n \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{n\to\infty} q_n\theta - p_n = 0$$

を満たすならば，$\theta \notin \mathbb{Q}$ である．

Proof

$\theta = a/b \in \mathbb{Q}$ かつ $a, b \in \mathbb{Z}$ を仮定すると，0 ではない整数の絶対値が 1 以上であるという基本的事実より

$$0 \neq |q_n\theta - p_n| = \left|\frac{q_n a - p_n b}{b}\right| \geq \frac{1}{|b|}.$$

しかし，これは $|q_n\theta - p_n| \to 0$ に矛盾する． □

remark 2.5. 上記の証明で $\left|\frac{q_n a - p_n b}{b}\right|$ の分子に現れる $|q_n a - p_n b|$ において p_n と q_n が有理数のままでは，分子が非零だから 1 以上という結論が出せないことに注意しよう．このように何らかの形で整数列を登場させることが必要なのである．

Definition 1 (s 重 Polylogarithm). $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ とする．
s 重 Polylogarithm を

$$\mathrm{Li_s}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)^s}$$

と定める．

$s = 1$ のときは，$\mathrm{Li_1}(z) = -\log(1-z)$ である．s 重の Polylogarithm は，微分方程式

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li_s}(z) = \frac{1}{z} \cdot \mathrm{Li_{s-1}}(z) \ (s \geq 2)$$

を満たす．さらに Shift 付きの Polylogarithm は Lerch 関数とも呼ばれ，次で定義される．

Definition 2 (Lerch function). $x \in \mathbb{Q}, x \notin \mathbb{Z}_{<0}$ とする．
$s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ に対して

$$\Phi_s(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+x+1)^s}$$

と定める．

$x = 0$ のときが Polylogarithm である．$\Phi_s(x, z)$ は微分方程式

$$\left(z\frac{d}{dz} + x\right)\Phi_s(x, z) = \Phi_{s-1}(x, z) \text{ ただし } s \geq 2$$

を満たす．

Proposition 2.6. $\log(2) \notin \mathbb{Q}$.

Proof $|z| > 1$ に対して，z の逆数 $1/z$ における 1 重 Polylogarithm に対し，

$$-\log(1-1/z) = \mathrm{Li}_1(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)z^{k+1}} = \int_0^1 \frac{1}{z-t}dt$$

である．これより $-\log(1-1/z)$ に収束する Padé 近似列として，多項式 $P_n(z), Q_n(z) \in \mathbb{Q}[z]$ で，$\deg P_n(z), \deg Q_n(z) = n$ を満たし，なおかつ

$$-P_n(z)\log(1-1/z) - Q_n(z) = \mathcal{O}(1/z^{n+1}) \quad (\text{ただし } n \to \infty)$$

となるものが Legendre 多項式を用いて

$$P_n(z) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}z^n(1-z)^n \in \mathbb{Z}[z], Q_n(z) = \int_0^1 \frac{P_n(z)-P_n(t)}{z-t}dt$$

のように構成できる．なぜならば,

$$-P_n(z)\log(1-1/z) - Q_n(z) = \int_0^1 \frac{P_n(t)}{z-t}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\int_0^1 t^k P_n(t)dt}{z^{k+1}}$$

であり，部分積分を繰り返すと

$$\int_0^1 t^k P_n(t)dt = \frac{1}{n!}\int_0^1 t^k \cdot \frac{d^n}{dt^n}t^n(1-t)^n dt = 0 \quad (0 \le k \le n-1)$$

が得られるからである．ここで z に整数 2 を代入し，$Q_n(2)$ に現れる分母に 1 から n 迄の最小公倍数 $d_n = \mathrm{l.c.m.}(1,\ldots,n)$（素数定理 [19] より $d_n = e^{(n+o(1))}$ である）を乗じて分母を払い，整数列を作れば，補題 2.4より $\log(2) \notin \mathbb{Q}$ が従う． □

3 Poincaré-Perron の定理

明示的な Padé 近似列 [1] [10] より，$\log(1-r/s)$ に対する精密な有理近似が構成されるが，この近似列が特に漸化式を満たすことより，Poincaré-Perron の定理が使えるために，優れた有理近似が従うことを示そう．そのためにまず，Poincaré-Perron の定理とは何かを説明する．

Poincaré-Perron の定理とは，次の主張である．まず最初に H. Poincaré が証明したものを記述する．次に O. Perron が拡張して得られた，いわゆる Poincaré-Perron の定理を紹介する．これらは最近 M. Pituk によりさらに拡張された [18]．Poincaré-Perron の定理の初等的な証明は [12][16] にある．

$u(n)$ を $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ から $\mathbb{C}$ への関数，つまり複素数を値として持つ数列とする．

本節では簡単のため，2 次の差分方程式の場合のみ述べるが，一般次数の差分方程式 $u(n) + p_1(n)u(n-1) + \cdots + p_k(n)u(n-k) = 0$ でも以下の定理は同様に成立する．

Definition 3. $p_1(n), p_2(n)$ は 0 以上の整数 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ から複素数への関数で，各 $j = 1, 2$ に対し定数 $q_j \in \mathbb{C}$ が存在して

$$q_j = \lim_{n\to\infty} p_j(n) \tag{1}$$

が成立するものと仮定する．この仮定が満たされるときに，差分方程式（$n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$）

$$u(n) + p_1(n)u(n-1) + p_2(n)u(n-2) = 0 \tag{2}$$

を Poincaré type と称する．また

$$T^2 + q_1 T + q_2 \tag{3}$$

を (2) の特性多項式という．

Theorem 3.1 (Poincaré の定理). 上記の Poincaré type の差分方程式 (2) の特性多項式 (3) の根を λ_1, λ_2 とおく．根の絶対値が互いに異なる，即ち $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$ を仮定する．このとき，$u(n)$ が Poincaré type の差分方程式 (2) の解ならば，十分大きな全ての n について $u(n) = 0$ が成立するか，もしくは λ_1, λ_2 の一方の解 λ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u(n+1)}{u(n)} = \lambda \tag{4}$$

が成立するか，のいずれかが成り立つ．

Poincaré は，特性多項式 (3) の各々の解 λ_1, λ_2 がそれぞれ (4) を満たす場合があるか，という疑問には答えなかったが，この問題について Perron が次のように答え，合わせて Poincaré-Perron の定理と呼ばれるようになった．

Theorem 3.2 (Poincaré-Perron の定理). 定理 3.1 の仮定に加え，無限個の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $p_2(n) \neq 0$ であると仮定する．このとき Poincaré type の差分方程式 (2) は 2 個の 1 次独立な解 $u_1(n), u_2(n)$ をもち，λ_1, λ_2 の各々に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_j(n+1)}{u_j(n)} = \lambda_j \quad (j = 1,\ 2) \tag{5}$$

が成り立つ（ただし λ_1, λ_2 のどちらが $u_1(n), u_2(n)$ のどれに対応するかは一般には不明）.

定理3.1の結論である $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{u(n+1)}{u(n)} = \lambda$ は，数列 $u(n)$ が本質的に等比数列である，ということを述べている．これより以下が従う [1].

Corollary 3.3. Poincaré type の差分方程式 (2) の特性多項式 (3) の根 λ_1, λ_2 の絶対値に対して $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ かつ，いずれの根の絶対値も 1 ではないと仮定する．差分方程式 (2) の解 $u(n)$ に対し，無限個の n について $u(n) \neq 0$ が成立するならば，λ_1, λ_2 のいずれかの λ に対し

$$|u(n)| = |\lambda|^{n(1+o(1))} \quad n \to \infty \tag{6}$$

が成り立つ（漸近的！）．特に $u(n)$ の上界は常に以下で与えられる．

$$|u(n)| \leq |\lambda_2|^{n(1+o(1))} \quad n \to \infty. \tag{7}$$

さてここで，無理数に対する有理近似を考えるために，次の関数 $f(z)$ を定めよう．

Definition 4. $z \in \mathbb{C}, |z| > 1$ とする．パラメータ $\gamma, \omega, x \in \mathbb{Q}$ を $\gamma \notin \{-1, -2, \dots\}$, $\omega \notin \mathbb{Z}$，$x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ と定める．関数 $f(z)$ を次のように定義する．

$$f(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega)_k}{k!} \frac{1}{z^{k+1}} = \frac{1}{z} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} -\omega, 1 \\ 1 \end{matrix} \;\middle|\; \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\omega} \text{(binomial function)} \\ \displaystyle(1+x)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x+1)} \frac{1}{z^{k+1}} = (1+x)\Phi_1(x, 1/z) \quad \text{(shifted logarithmic function)} \end{cases}$$

これらはいずれも超幾何関数の特別な場合であり，$z \in \mathbb{C}, |z| > 1$ で収束する．またパラメータは，$(\alpha, \gamma, \delta) = (1, x, -x)$ のときに shifted logarithmic function に対応し（特に $x = 0$ のときは logarithms），$(\alpha, \gamma, \delta) = (1, -1, 1+\omega)$ のときに冪乗関数 (binomial function) に対応する．

冪乗関数に対する明示的な Padé 近似は以下で与えられる [10].

Proposition 3.4. $\omega \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ とする．このとき

$$P_{n,0}(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n+k-1}{k} \binom{n-\omega-1}{n-k} z^k,$$
$$P_{n,1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n+k}{k} \binom{n+\omega}{n-1-k} z^k$$

とおく．十分大きい $\beta \in \mathbb{Z}$，$f(\beta)$ に対し，$\mathbb{Q}$ 係数多項式の値の組 $\big(P_{n,0}(\beta),\, P_{n,1}(\beta)\big)$ は

$$0 \neq P_{n,0}(\beta) f(\beta) - P_{n,1}(\beta) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{8}$$

を満たす．ここで $\big(P_{n,0}(\beta),\, P_{n,1}(\beta)\big)$ の値は共通分母を払えば整数になり，その共通分母は n に依存するが，共通分母を掛けても (8) の収束は崩れない．

命題 3.4で作られた Padé 近似列については以下の漸化式を満たす．ここで Poincaré-Perron の定理の系 3.3を適用すれば，(7) より以下が得られる．冪乗関数については $(\alpha, \gamma, \delta) = (1, -1, 1+\omega)$ であるが，川島-Poëls [10] で証明された一般的な形で述べる．

Lemma 3.5. $\delta \notin \alpha\mathbb{Z}_{\geq 0}, -(\alpha\gamma + \delta) \notin \alpha\mathbb{Z}_{\geq 0}$ のとき $(P_{n,0}(z))_{n\geq 0}, (P_{n,1}(z))_{n\geq 0}$ は，漸化式

$$A_n u(n+1) - (z - B_n) u(n) + C_n u(n-1) = 0 \quad (n \geq 1) \tag{9}$$

を満たす．ただし各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$A_n := \frac{(n+\gamma+1)(n+1)}{(2n+\gamma+1)(2n+\gamma+2)}, B_n := \frac{2\alpha n^2 + 2\alpha n(1+\gamma) + \gamma(\alpha - \delta)}{(2n+\gamma)(2n+2+\gamma)},$$

$$C_n := \frac{(\alpha n - \delta)(\alpha(\gamma + n) + \delta)}{(2n+\gamma)(2n+\gamma+1)} \text{ とする．}$$

補題 3.5 より以下が得られる．
$|z| > |\alpha|$ を仮定すると，差分方程式 (9) の特性多項式 $P(X) = X^2 - 2(2z-\alpha)X + \alpha^2$ の根の絶対値 $\rho_1(z), \rho_2(z)$ は異なり，2 根 $2z - \alpha \pm 2\sqrt{z^2 - z\alpha}$ に対しては $\rho_1(z) < |\alpha| \leq \rho_2(z)$ が満たされ，$\max\{|P_{n,0}(z)|, |P_{n,1}(z)|\} \leq \rho_2(z)^{n(1+o(1))}$ となる．さらに $\alpha = 1$ ならば

$$P_{n,0}(z)f(z) - P_{n,1}(z) \leq \rho_1(z)^{n(1+o(1))} \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

が成り立つ．

4 Poincaré-Perron を用いた Padé 近似と連分数の比較

では実際に整数 $\beta > 1$ を z に代入して，無理数性が担保できる $f(\beta)$ に対して，ソフトウェア Mathematica による連分数展開の近似分数 $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ の $f(\beta)$ への近づき方

$$\left| f(\beta) - \frac{p_n}{q_n} \right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

及び Poincaré-Perron の定理を適用した Padé 近似数列 $\in \mathbb{Q}$ による $f(\beta)$ への近づき方

$$\left| f(\beta) - \frac{P_{n,1}(\beta)}{P_{n,0}(\beta)} \right| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

における近似速度を，2 種類の $\beta \in \mathbb{Z}$ (Case 1, Case 2) について比較しよう．

Case1: function	α	$\gamma \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	δ	$z = \beta$	
$\frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\omega}$ (binomial)	1	-1	$1 + \omega = 4/3$	25	$(\omega = 1/3)$
$-\log(1 - 1/z)$ (logarithm)	1	x	$-x$	2	$(x = 0)$

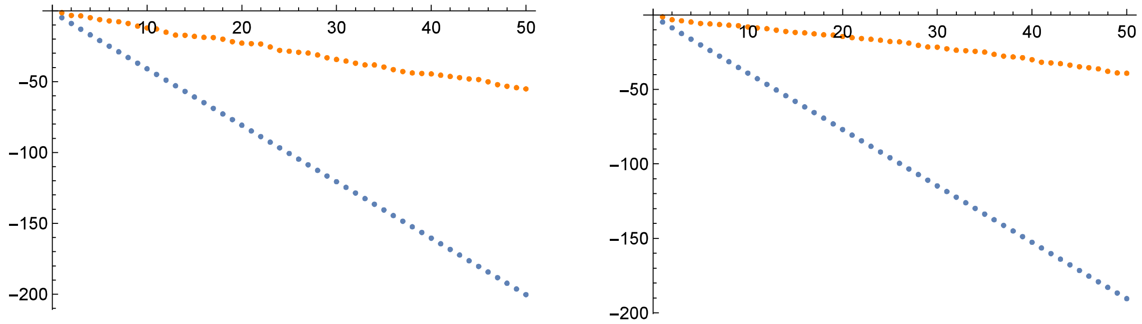
Case2: function	α	$\gamma \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	δ	$z = \beta$	
$\frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\omega}$ (binomial)	1	-1	$1 + \omega = 6/5$	20	$(\omega = 1/5)$
$-\log(1 - 1/z)$ (logarithm)	1	x	$-x$	300	$(x = 0)$

横軸は n，縦軸は $f(\beta)$ と近似する有理数列との差の常用対数の値である．橙色のグラフは連分数展開の近似分数，青色グラフが Padé 近似の有理数列による近似に対応する．縦軸で -50 とあるのは，近似する有理数列と $f(\beta)$ との差を y とおくと，常用対数 $\log_{10} y = -50$ つまり $y = 10^{-50}$ を意味している．グラフは下の方にあるほど，$f(\beta)$ との距離 y が小さいことに相当するので，近似が優れている．

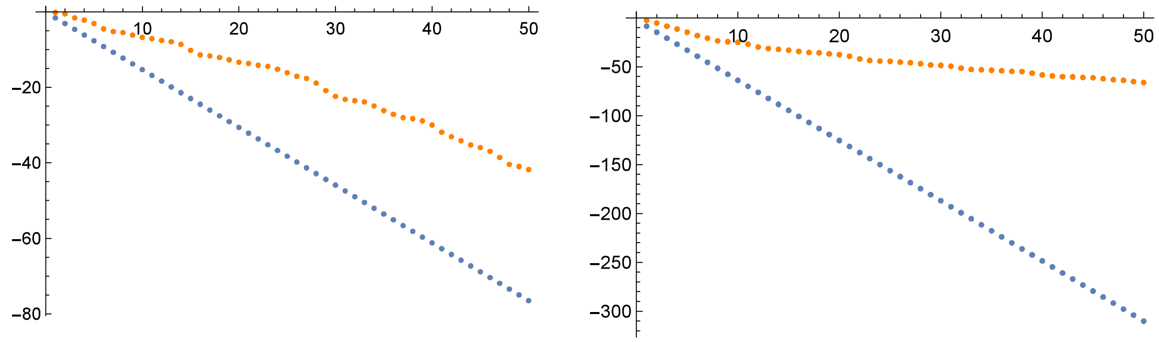
従って，青色グラフが橙色のグラフよりいつも下にあることが，Padé 近似の精度の良さを示しているのである．

Padé のほうが常に連分数展開よりも速度の速い近似を与えている．

グラフ：Binomials in the Case 1 (左) and the Case 2 (右)



グラフ：Logarithms in the Case 1 (左) and the Case 2 (右)



5　今後の研究の方向性

次回はさらに新しい数論的考察の視覚化を実施したい．

謝辞

本研究は JSPS 科学研究費補助金 Grant No. 21K03171 の助成を受けております．国際共同利用・共同研究拠点としての京都大学数理解析研究所の支援も受けております．研究代表者の先生方にもお世話になりました．この場をお借りしてお礼申し上げます．

参考文献

[1] K. Alladi and M. L. Robinson, *Legendre polynomials and irrationality*, J. Reine Angew. Math., **318**, (1980), 137–155.

[2] R. Apéry, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$, Journées arithmétiques de Luminy, Astérisque no. 61, (1979), 11–13.

[3] A. Baker, *Transcendental Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1975.

[4] F. Beukers, *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc., **11**, (1979), 268–272.

[5] G. V. Chudnovsky,*On the method of Thue-Siegel*, Annals of Math., **117**, (1983), 325–382.

[6] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Can polylogarithms at algebraic points be linearly independent*?, Mosc. J. Comb. Number Theory, **9**, no, 4, (2020), 389–406.

[7] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear Forms in Polylogarithms*, Ann. Scuola Nor. Sup. Pisa, Classe di Scienze, series 5, **23** (3), (2022), 1447–1490.

[8] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Linear independence criteria for generalized polylogarithms with distinct shifts*, Acta Arithm., **206**, (2022), 127–169.

[9] S. David, N. Hirata-Kohno and M. Kawashima, *Generalized hypergeometric G-functions take linear independent values*, preprint, arXiv:2203.00207 .

[10] M. Kawashima and A. Poëls, *Padé approximations for shifted functions and parametric geometry of numbers*, J. Number Theory, **243**, (2023), 646–687.

[11] N. I. Fel'dman and Yu. V. Nesterenko (authors), A. N. Parshin & I. R. Schfarevich (eds.), Number Theory IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol 44, 1998.

[12] A. O. Gel'fond, *Calcul des différences finies*, Dunod, Paris, 1963.

[13] N. Hirata-Kohno, R. Muroi and Yusuke Washio, *Shifted logarithms adapting Poincaré-Perron*, Preprint.

[14] H. Jager, *A multidimensional generalization of the Padé table. I, II, III, IV, V, VI*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A, 67, Indag. Math., **26**, (1964), 193–198, 199–211, 212–225, 227–239, 240–244, 245–249.

[15] K. Mahler, *Perfect systems*, Compos. Math., **19**, (1968), 95–166.

[16] L. M. Milne-Thomson, *The Calculus of finite differences*, Macmillan and co., London, 1933, Chelsea Publishing, reprinted American Math. Society, 2000.

[17] E. M. Nikisin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, American Math. Society, 1991.

[18] M. Pituk, *Asymptotic behavior of a Poincaré recurrence system*, J. Approx. Theory **91** (2) (1997) 226–243.

[19] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math., **6**, (1962), 64–94.

[20] C. L. Siegel, *Transcendental Numbers*, Annals of Mathematics Studies, **16**, Princeton University Press, Princeton, 1949.