動的幾何ソフトウエアを利用した平面図形の作図についての一考察
ー 和算書にある平面図形問題の利用 ー

A Study on Drawing of Flat Figures by Dynamic Geometry Software
ー Using the Flat Figure Problem of Wasan Books ー

愛知県立津島高等学校　山田　潤
Jun Yamada,Tsushima Senior High School

1　はじめに

Society 5.0 時代の到来に備え，現行の学習指導要領では「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業の改善が図られている.「GIGA（Global and Innovation Gateway for All，全ての児童・生徒のための世界につながる革新的な扉）スクール構想の実現」では，ICT（Information and Communication Technology）を利用した授業へと転換するだけでなく，従来の授業では実現が難しい「ICT の特性を生かした」学びの実現が期待されている．「教育の情報化に関する手引」の第４章第３節３ (4) で,『数学的に考える資質・能力を育成するため，高等学校数学指導要領解説 数学編では，数学 I（二次関数，データの分析），数学 II（図形と方程式），数学 A（図形の性質）等の内容に「コンピュータなどの情報機器を用いるなどする」ことが示されており，ICT を積極的に活用した指導が求められている.

和算書にある接円関係にある（円のみに関する）平面図形の問題では，外円（半径 R）と大円（半径 a），中円（半径 b），小円（半径 c）の４つの円の半径の間に関係式（R=a+b+c）を満たすものが存在する．筆者はこの関係式を満たす平面図形の動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）を利用した作図の仕方について考察した．弓型図形がこの関係式を満たす図形の場合，動的幾何ソフトウエアを利用すると，簡単に作図できる場合があることがわかった.

2　余弦定理の利用

福島県の和算家 佐久間纉（さくま・つづき 1819-1896）による算法起源集 (さんぽうきげんしゅう．1877）は，江戸時代の和算書にある問題を集めた資料集である．この巻中に以下の問題がある.

【問】 図１のように外円（半径 R）の直径の両端に半径の等しい甲円（半径 a）を内接させる．さらにこれらの間に任意の連結する二つの乙円（半径 b）と丙円（半径 c）を内接させる.

このとき，外円の半径を甲円，乙円，丙円の半径で表せ.

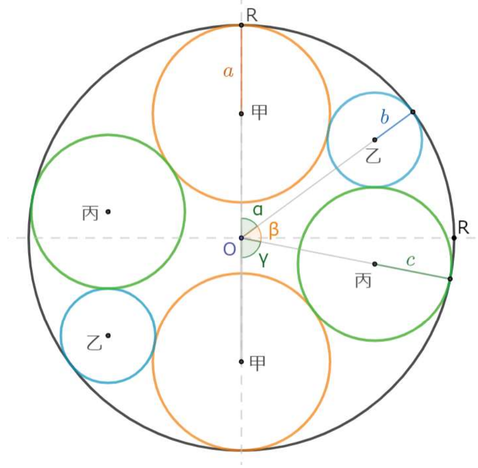

図 1: 算法起源集の問題

【解】外円の半径は，甲円と乙円と丙円の半径の和に等しい． (R=a+b+c)

GeoGebra のもつ作図機能を利用すると，関係式（R=a+b+c）を満たす平面図形の作図が簡単になると考えた．

3　動的幾何ソフトウエアによる作図

和算書にある接円関係をもつ（円のみに関する）平面図形の中には，中心線 (y 軸) に関して対称な図形も存在する．ここでは，算法起源集の問題の片側にある２円（乙円と丙円）を入れ替えてできる左右対称な平面図形を考えることにした．

乙円と丙円を入れ替えても，中心角（α，β，γ）の大きさは，π-β＝α＋γ＝γ＋α であり，α＋β＋γ＝π の関係は変わらない．このときの乙円と丙円の４つの中心を結んでできる図形は長方形である．また，乙円と丙円の中心を結ぶ直線は，２つの甲円の中心を結ぶ直線（y 軸）と常に平行である．図２のように，左右両側にできる乙円と丙円の接点を結ぶ直線（弦）は，常に x 軸と平行であるから，２つの甲円の中心を結ぶ直線（y 軸）と垂直である．

この「ひな型（図２)」を利用すると，作図が簡単にできる問題例を紹介する．

ここでは，名古屋市にある大須観音の算額を取り上げる．和算書には，円の直径以外の線分で切断をした図形（弓型図形）があるが，その例として，結城市山川新宿不動堂と東都下谷稲荷神社の算額を取り上げる．いずれの問題も，必ずしも作図が必要なわけではないが，この「ひな型」を利用すると，容易に作図することができる．

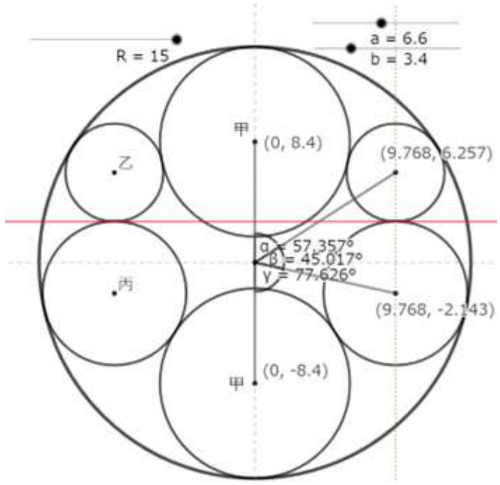

図 2: 「ひな型」

4　大須観音 算額

「今有如図円内容九円只云甲円径一寸」
問　　乙円径及外円径幾何
答曰　乙径一寸外径九寸
術曰　甲径為乙径九之得外径合問

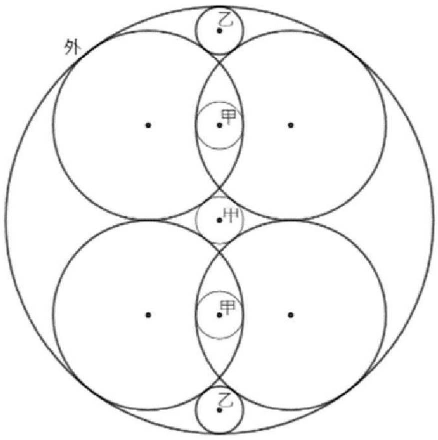

図 3: 大須観音算額

図３のように外円の内部に９円がある．
甲円の直径が１寸のとき，乙円と外円の直径を求めよ．
答　乙円の直径１寸，外円の直径９寸

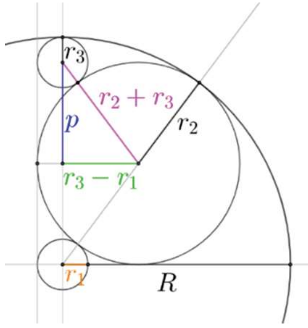

図 4: 大須観音算額 作図例

【解答例】

図 4 より，$R = 2r_2 + r_1$,

$(r_2 - r_1)^2 + r_2^2 = (r_2 + r_1)^2$ より，$r_2 = 4r_1$,

故に，$R = 2 \times 4r_1 + r_1 = 9r_1$

次に，$p = R - r_2 - r_3 = 5r_1 - r_3$,

$(r_2 + r_3)^2 = (5r_1 - r_3)^2 - (r_2 + r_1)^2$ より，$r_1 = r_3$

これより，$r_3 = r_1, R = 9r_1$ となる．

藤安順　　(引用文献：所掲大須観音堂解義)

以下に,「ひな型」を利用した作図例 (図 5) をあげておく．

この大須観音の算額の外円の中心を原点，半径を R=4.5 のときの作図から，この円の内部に含まれるすべての円の中心の座標 (x, y) は，すべて整数であることが確認できる．

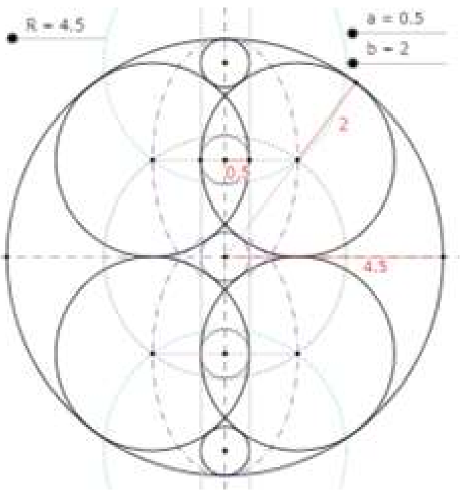

図 5: 大須観音算額 作図例

5　結城市山川新宿不動堂

「今有外円内隔斜等円一個斜截等円三個唯云外円径一二寸」

問　　等円径如何
答日　等円径四寸五分八厘
術　　径三段内余二除得等円径問合

半径 R の円内に図 6 のように 4 つの等円（半径 r）を内接させたい．
等円の半径 r を R で表せ．
答 $R = 12$ のとき，$r = 4.58$　（近似値になっている）
術 $r = (3 - \sqrt{5})R/2$

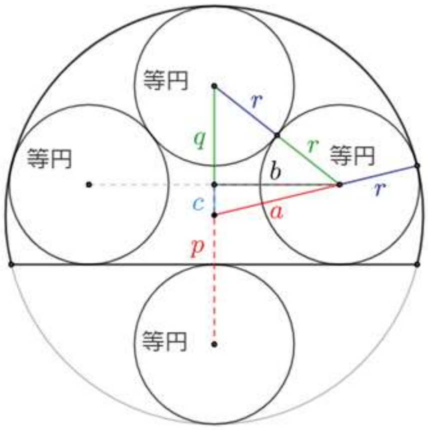

図 6: 山川新宿不動堂

【解答例】
図 6 のように，各線分の長さを a, b, c, p, q, r とおく．
このとき，$a^2 = (R - r)^2 = R^2 - 2Rr + r^2$,
$c = p - R = 3r - R,$
$b^2 = a^2 - c^2 = 4r(R - 2r),$
$q = R - r - c = 2R - 4r$ が成り立つ．
以上の式を，$q^2 + b^2 = (2r)^2$ に代入，展開整理すると，
$r^2 - 3Rr + R^2 = 0$ となる．
これより，$(r - \frac{3}{2}R)^2 = \frac{5R^2}{4}$,
$r < R$ より，$r = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot R$ となる．
よって，$R = 12$(寸) のとき，
$r = 12 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 6(3 - \sqrt{5}) = 4.5835 \cdots$(寸) となる．
このとき，第 1 象限の等円の中心座標を (x_r, y_r) とすると，

$x_r(=b)=2\sqrt{r(R-2r)}$，$y_b(=c)=3r-R$ となる．

長谷川弘（はせがわ・ひろむ 1810-1887）
（引用文献: 算法点竄手引艸初編．茨城県算額集）

外円の半径をが 12（寸）のとき甲円との半径と乙円の半径が同じと考えると「ひな型」を利用して作図 (図 7) できる．関係式（R=a+b+c）より，丙円の半径の原点を中心とする弓形図形に接する円の半径が同じ図形であることがわかった．

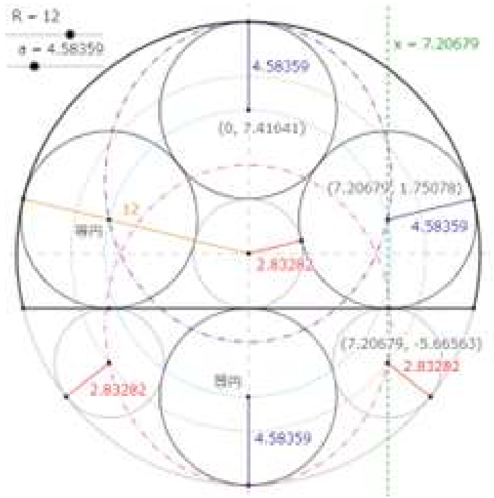

図 7: 山川新宿不動堂　作図例

6　東都下谷稲荷社算額

「今有如図弧内容五円甲円一箇乙円丙円各二箇　云甲円径一十二寸丙円径三寸」
問　　乙円径幾何
答曰　乙円径八寸
術曰　置甲円径以丙円径除之開平方加一箇得数

図８のように円弧の内に連結する５つの内接円（甲円１個，乙円２個，丙円２個）がある．

これらの円の半径をそれぞれ，a, b, d とするとき，b を a と d で表せ．
答　$2a=12$,$2d=3$ のとき，$2b=8$
術　$b=\frac{2a\sqrt{d}}{\sqrt{a}+\sqrt{d}}$
【解答例】
説明のために，外円の中心を原点 O，乙円の中心座標を (x_b, y_b)，
丙円の中心座標を (x_d, y_d) とおく．

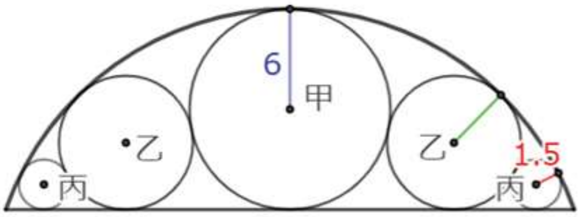

図 8: 東都下谷稲荷算額

$x_b = 2\sqrt{ab}$，$y_b = R - (2a - b)$
$x_b^2 + y_b^2 = (R - b)^2$ より，
$(2\sqrt{ab})^2 + (R - (2a - b))^2 = (R - b)^2$，
　展開整理すると，$R = \frac{a^2}{a-b}$ となる．
　また，$x_d = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bd}$，$y_d = R - (2a - d)$，$x_d^2 + y_d^2 = (R - d)^2$ より，
$(2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bd})^2 + (R - (2a - d))^2 = (R - d)^2$
展開整理すると，$b(\sqrt{a} + \sqrt{d})^2 = (R - a)(a - d) = (R - a)(\sqrt{a} + \sqrt{d})(\sqrt{a} - \sqrt{d})$，
　これより，$b(\sqrt{a} + \sqrt{d}) = (R - a)(\sqrt{a} - \sqrt{d})$ となる．
$b(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 2a\sqrt{d}$ だから，$b = \frac{2a\sqrt{d}}{\sqrt{a}+\sqrt{d}}$ となる．
　この問題では，$2a = 12$,$2d = 3$ だから，$b = \frac{2\cdot 6\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6}+\sqrt{\frac{3}{2}}} = 4$，
よって，$R = \frac{6^2}{6-4} = 18$ となる．

　北川孟虎（きたがわ・もうこ 1736-1833），
（引用文献：神壁解．神壁算法（しんぺきさんぽう））

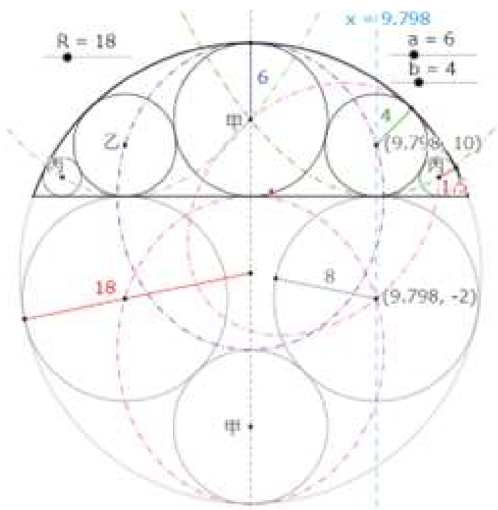

図 9: 東都稲荷社下谷算額　作図例

東都下谷稲荷社算額の問題を動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）を利用して作図（図9）すると，外円径が $2R=36$ のとき，甲円径 $2a=12$，乙円径 $2b=8$，丙円径 $2d=3$，円外の円の円径が $2c=16$ となり，この平面図形に含まれるすべての円径（直径）が整数であることが確認できた.

7　考察

算法起源集の問題（外円（半径 R）の直径の両端に半径の等しい甲円（半径 a）を内接させ，さらにこれらの間に任意の連結する二つの乙円（半径 b）と丙円（半径 c）を内接させる）では，外円，甲円，乙円，丙円の半径の間に関係式 (R=a+b+c) が成り立つ.

この関係式は，算法起源集の問題の片側にある乙円と丙円を入れ替えてできる左右対称な平面図形の場合にも（一部，変数の範囲が変わるが）適用できることが確認できた.

この左右対称な平面図形の「ひな型」を作成し，この「ひな型」と動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）の作図機能を利用すると，従来の定規とコンパスによる作図とは異なるが，簡単に作図できることが確認できた.

さらに，弓形図形がこの関係式を満たす図形の場合にも，この「ひな型」を利用すると簡単に作図できる場合があることがわかった.

小川束（四日市大学）は,「江戸時代には，数学の塾に入門する者は皆，自分で問題を作りそれを解くことが目的であり,（途中省略）図形が美しく，線分の長さなどの数値がなるべく単純で，さらに答えも単純な数値になることが望ましい．計算の詳細を書かないのは，これが見る者に対する挑戦だからである.（途中省略）むしろ複雑な計算過程を経て最後に得られる答えが単純なものが賞賛の対象であったろう.」（小川．2021．p254）と述べているが，ここで取り上げた問題は設定が巧妙で，得られた平面図形の美しさに驚かされる問題と考える.

8　まとめ

関係式 R=a+b+c が成り立つ問題は，動的幾何ソフトウエア (GeoGebra) で「ひな型」を作成しておくと，幾つかの変数の操作で作図が可能となる．和算では（デカルト）座標の考えがなかったので, 定規とコンパスでの作図が難しかった図形が，ICT の特徴を生かした利用で正確に作図することができ，動的ソフトウエアの活用促進にも繋げられる.（実用的目的）

関係式 R=a+b+c を利用した作図活動は，数学の興味や関心を高める教材として利用できると考える． ICT を効果的に活用する指導案を作成し，活用する場面を的確に選択をすることによって，学習指導要領の求める資質・能力を育成する教材として活用が可能となる.（文化的目的）

和算書にある平面図形問題を利用することによって, 和算家の研究成果とその優れた才能に触れるよい機会になると考える．課題学習や探究的な学習の時間に，生徒自身がタブレット端末等を利用した学習活動を通して，問題解決力の育成に活用できると考える.（陶冶的目的）

GIGA スクール構想により，ICT 機器を利用した授業と学習者がタブレット端末を活用した学習場面が増えている．動的幾何ソフトウエア（GeoGebra）のもっている作図の機能を利用すると，高校数学で学ぶ平面図形を作図できるが，この作図操作は，従来の定規とコンパスによる作図操作とは同じではない．和算書にある平面図形を利用して，従来の定規とコンパスによる作図と GeoGebra による作図の相違点を明らかにし，GeoGebra を利用した作図指導を実施する場合の注意点を考えたい．和算書にある平面図形の問題を教材とする動的幾何ソフトウエアを用いた作図における学習指導案を検討し，授業の実践を通して作図の学習指導案の検証をおこなう.

謝辞 This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

参考文献

[1] 小川束．和算 江戸の数学文化．中央公論新社．2021.

[2] 佐久間纘．算法起源集巻中．http://www.wasan.jp/archive/sanpokigensyu2.pdf.（2023.9.18．参照）.

[3] GeoGebra 日本．https://sites.google.com/site/geogebrajp/.（2023.9.18．参照）.

[4] 竹ノ内脩・永田雅宜．理系のための代数・幾何．培風館．1983.

[5] 中村信弥. 和算の図形公式 (算法助術)．2008．http://www.wasan.jp/kosiki/kosiki.html,（2023.9.18．参照）.

[6] 深川英俊編・続々算額の研究．鳴海土風会．1983.

[7] 深川英俊・トニーロスマン．聖なる数学：算額．森北出版．2010.

[8] 文部科学省．高等学校学学習指導要領　数学．2018a.

[9] 文部科学省．高等学校学習指導要領解説　数学編理数編．2018b.

[10] 文部科学省．GIGA スクール構想のもとでの高等学校数学科の指導について．https://www.mext.go.jp/content/20210609-mxt_kyoiku01-000015480_rk.pdf.（2023.9.18. 参照）.

[11] 山田潤．高等学校における課題学習教材の作成　ー円のみに関する問題ー，春季予稿集．数学教育学会．2022.