数論的 Teichmüller 理論入門

望月新一（京大数理研）

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/˜motizuki
「出張・講演」

I. グラフと副有限群

II. 自由副有限群の center

III. 圏論から見た位相空間・正則構造

IV. 圏論から見たリーマン面の変形

V. p 進 Teichmüller 理論の紹介

VI. p 進遠アーベル幾何の紹介

I. グラフと副有限群

§1. 様々な数論的側面

リーマン面や双曲曲線を 数論的 に扱おうとすると、数体の数論に対応する様々な側面が出てくる：

nonarchimedean ＝「p 進」（I, II, V, VI）:

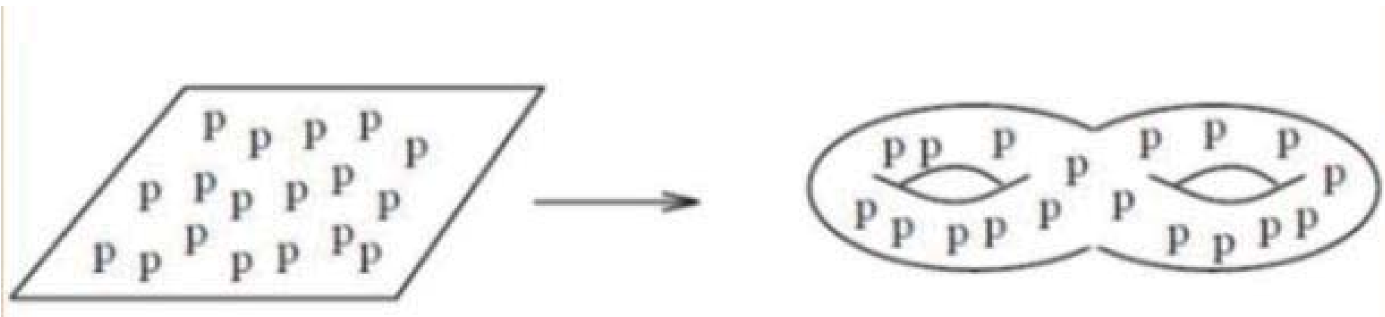
　　幾何は（副有限）群論 に反映される。

archimedean ＝「普通の絶対値」（III, IV）:

　　幾何は（測地）線 に反映される。

global （大域的）（談話会）:

　　幾何は抽象的な パターン＝＊圏＊ に反映される。



「<u>圏＝category</u>」$\mathcal{C}$ とは、

(a) <u>objects</u> $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

(b) <u>morphisms</u> $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ （「矢印」）,

(c) $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
（「$f \mapsto (A, B)$」を「$f : A \to B$」と書く）

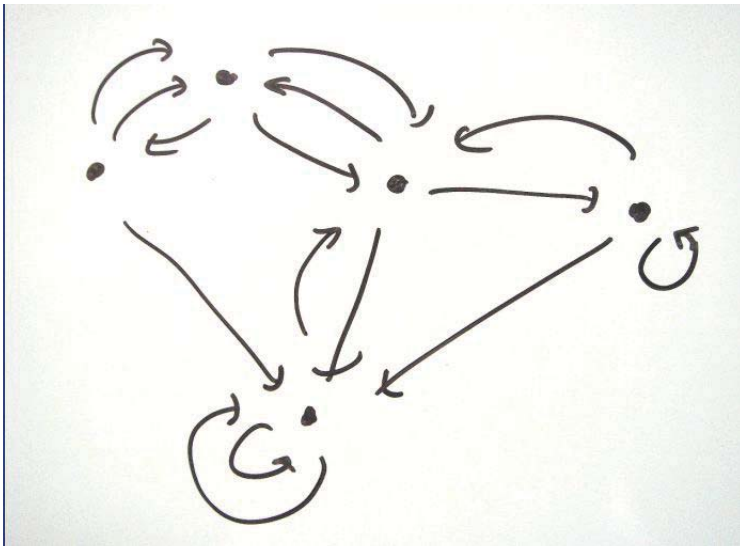
(d) $\mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \times_{\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Mor}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$
（「$(f, g) \mapsto f \circ g$」と書く）

というデータからなるもので、次の性質を満たすもの：

(i) $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}),\ \exists\, \mathrm{id}_A : A \to A$
s.t. $\mathrm{id}_A \circ f = f,\ g \circ \mathrm{id}_A = g$
$\forall f : B \to A,\ g : A \to C$

(ii) $\forall f : A \to B,\ g : B \to C,\ h : C \to D$,
結合法則が成り立つ：$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

もっと具体的にいうと、「点と矢印」



の集まりで、何らかの

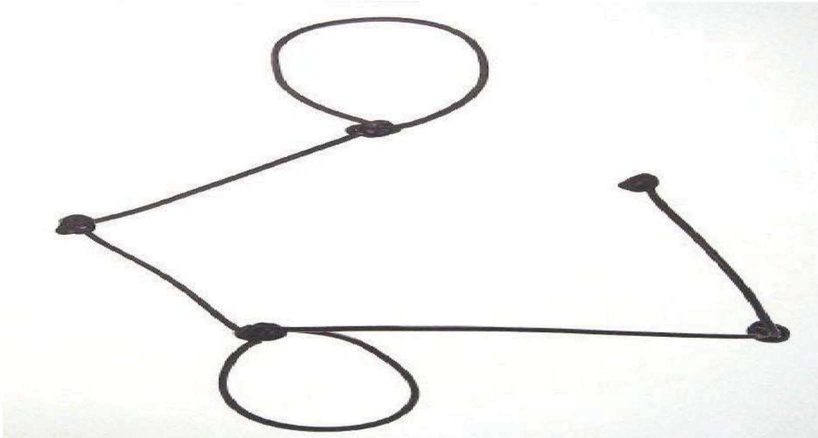
組合せ論的パターン

を記述しているもの。

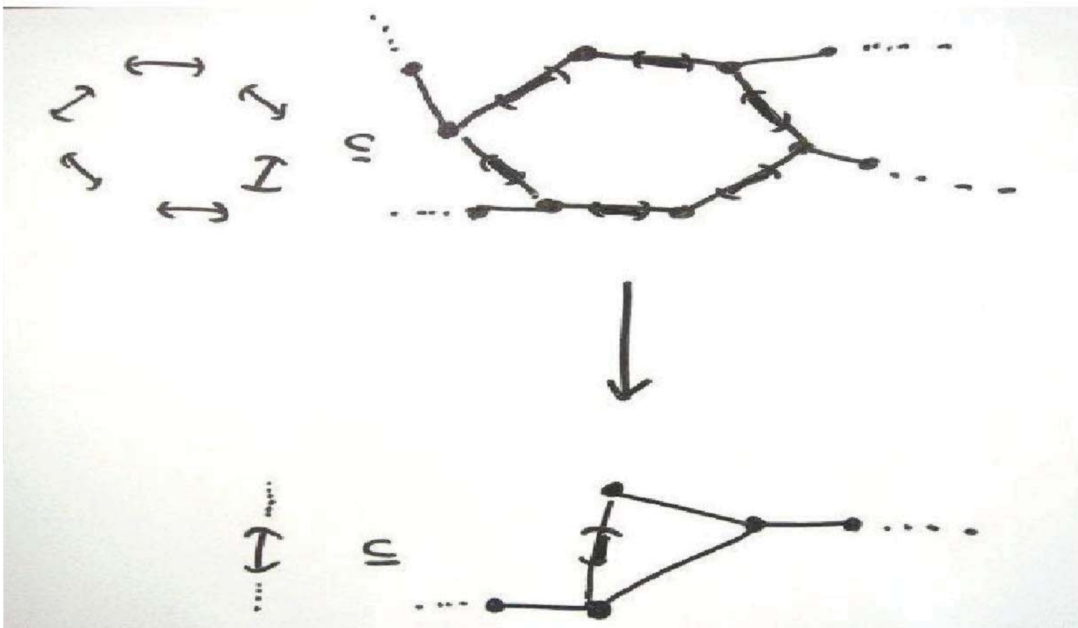
注: 「群」も、「one-object category」と
見做せる。

§2. グラフと被覆と基本群

「グラフ」とは、「頂点」と「辺」からなる幾何的対象：



「グラフの射」とは、頂点を頂点に写し、辺を辺に写す写像。グラフの「被覆」$\Gamma' \to \Gamma$ とは、グラフの射で、下のグラフ上局所的に、上のグラフが下のグラフの幾つかのコピーの直和になるようなもの：



（グラフの）ガロア な被覆 $\Gamma' \to \Gamma$ とは、$\mathrm{Aut}(\Gamma'/\Gamma)$ が、被覆の各ファイバー（＝一点の逆像）に 推移的 に作用するもの。このとき、$\mathrm{Gal}(\Gamma'/\Gamma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Aut}(\Gamma'/\Gamma)$ と書く。

Γ を固定すると、任意の連結被覆 $\Gamma' \to \Gamma$ を、「中間被覆」として持つような

「普遍（ガロア）被覆」

$$\widetilde{\Gamma} \to \Gamma \qquad (\text{s.t. } \widetilde{\Gamma} \to \Gamma' \to \Gamma)$$

を構成することが可能。普遍被覆は同型を除いて一意的である。

$$\pi_1(\Gamma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\widetilde{\Gamma}/\Gamma)$$

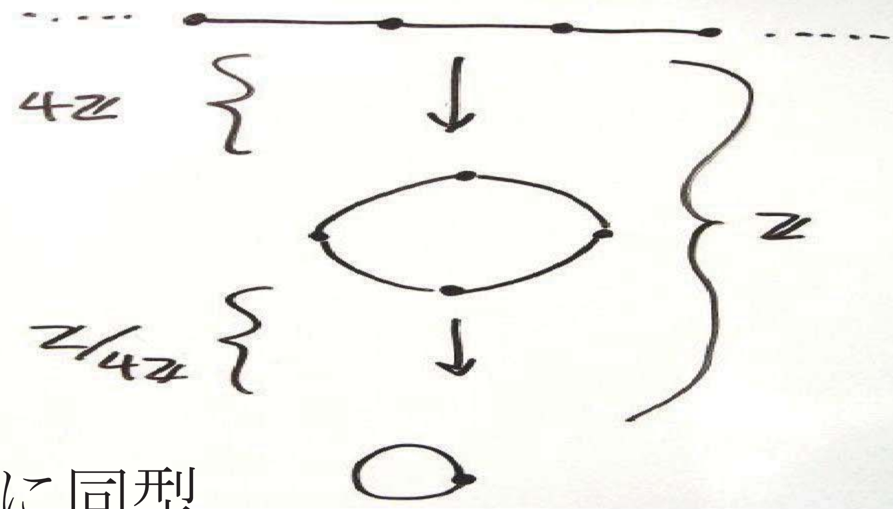
を、グラフ Γ の 基本群 と呼ぶ。すると：

$$\begin{aligned} &(\Gamma \text{ の被覆の圏}) \\ &\quad \stackrel{\sim}{\to} \quad (\pi_1(\Gamma) \text{ の作用を持つ集合の圏}) \end{aligned}$$

注：グラフの被覆の理論は、体のガロア理論（中間体、ガロア群）と＊圏論的＊に類似的な理論。

§3. ループとブーケと自由群

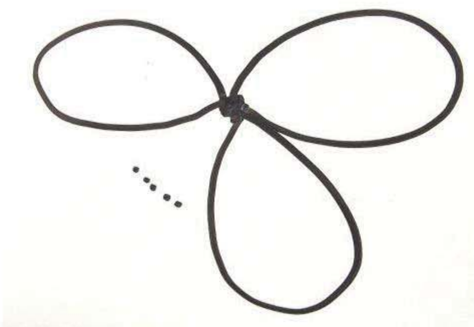
例１：ループ（loop）



基本群：$\mathbb{Z}$ に同型。
中間被覆：$n \cdot \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ （$n \in \mathbb{Z}$）に対応。

例２：ブーケ（bouquet）

「複数のループが一点で結ばれている」



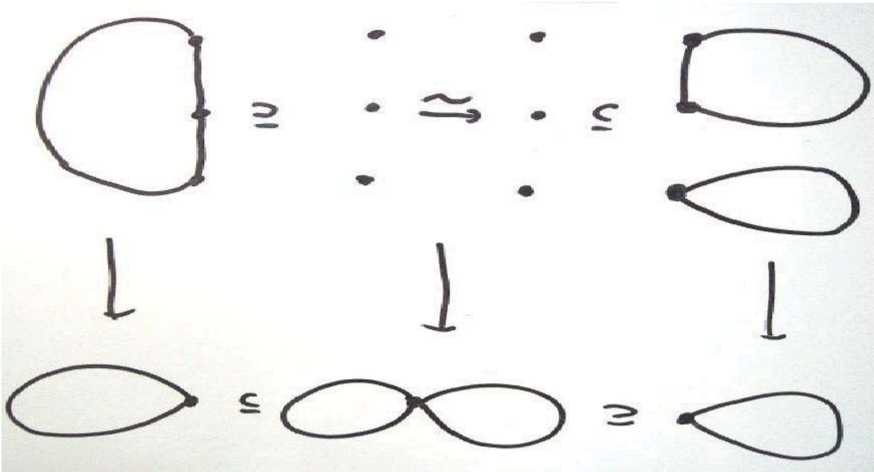
注：$\forall$ 連結なグラフは、ブーケとホモトープ
＝（グラフではなく位相空間として）基本群を変えずに変形可能である。

ブーケの基本群を計算しよう。

ブーケの被覆は、

（それぞれのループ上の被覆）

＋（頂点での張り合わせ同型）



というデータと同値。従って、例１の基本群の決定と合わせると、ブーケの被覆は、

（それぞれのループに付随する「$\mathbb{Z}$」の作用を持つ集合）

というデータと同値。

つまり、基本群の一般論を適用すると、

$$\pi_1(\text{ブーケ}) \cong (\text{ループたちを生成元とする } \underline{\text{自由群}})$$

ということになる。

ループたちにラベル $a, b, c, \ldots$ を付けると、この自由群は

$$a^3 \cdot b^2 \cdot a^{-1} \cdot c^5 \cdot \ldots$$

のような勝手な「文字列＝ <u>ワード</u>」からなる、「関係式なし」の群である。

因みに、この自由群を交換子たち $[a, b]$ で割って「最大アーベル商」＝<u>「アーベル化」</u>を作ると、

$$\mathbb{Z} \cdot a \oplus \mathbb{Z} \cdot b \oplus \mathbb{Z} \cdot c \oplus \ldots$$

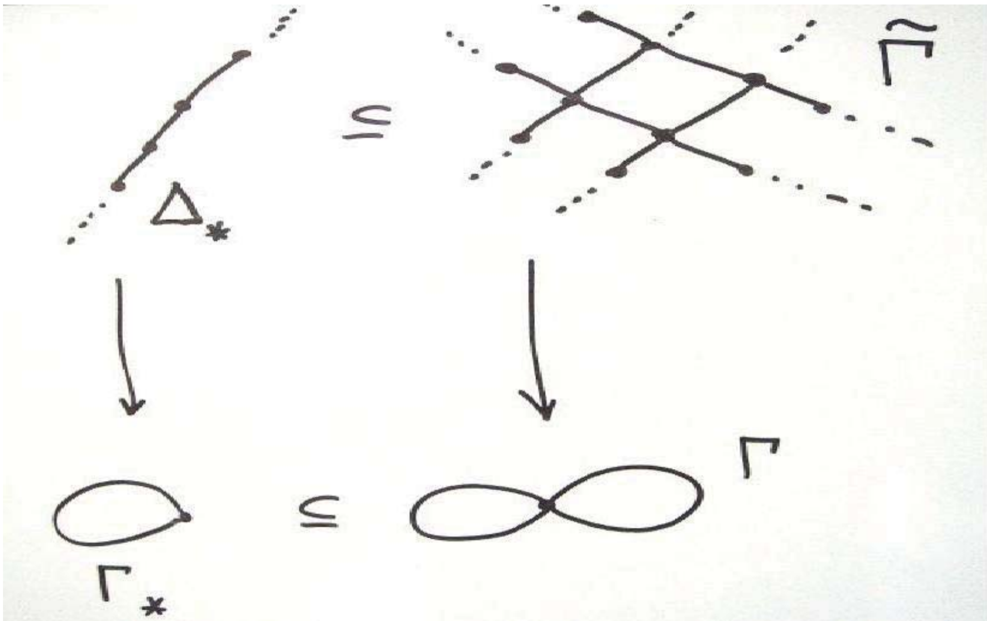
となる。

§4. ループに付随する分解群

ブーケの基本群の話を続けよう。

ブーケの普遍被覆 $\widetilde{\Gamma} \to \Gamma$ を考える。

被覆を、ある ループ $\Gamma_* \subseteq \Gamma$ に制限 すると、そのループのガロア被覆 $\widetilde{\Gamma}_* \to \Gamma_*$ ができる。



しかも、その制限された被覆の連結成分 Δ_* を 1 個選ぶと、連結成分 Δ_* を固定する 部分群

$$D_* \subseteq \pi_1(\Gamma)$$

ができる。

しかも、$\pi_1(\Gamma)$ の推移性 $\Longrightarrow D_*$ の推移性。従って、

$$D_* \cong \pi_1(\Gamma_*)$$

となる。連結成分を

$$\Delta_* \quad \rightsquigarrow \quad \sigma \cdot \Delta_*$$

（$\sigma \in \pi_1(\Gamma)$）というふうに取り替えると、D_* は、

$$D_* \quad \rightsquigarrow \quad \sigma \cdot D_* \cdot \sigma^{-1}$$

と、<u>共役</u> される。つまり、

「<u>共役を除けば、D_* は、</u>
<u>ループ Γ_* のみで決まる</u>」

ということである。$D_* \subseteq \pi_1(\Gamma)$ を、Γ_* の <u>分解群</u> と呼ぶ。

§5. <u>副有限群</u>

集合たちの「<u>射影系</u>」

$$\ldots \to E_n \to \ldots \to E_3 \to E_2 \to E_1$$

に対して、その「<u>射影極限</u>」E_∞ を次のように定義する：

$$\varprojlim_n E_n \overset{\text{def}}{=}$$

$$(\to \text{ たちと }\underline{\text{両立的}}\text{ な列たち}) \subseteq \prod_n E_n$$

集合 E_∞ には、「$\prod$」から誘導される <u>位相</u> が入る。

それぞれの「E_n」が <u>有限群</u> でそれぞれの「$\to$」が群準同型のとき、E_∞ も群となる。このような E_∞ として得られる位相群のことを、「<u>副有限群</u>」と呼ぶ。(本当は添え字集合は「自然数」でなくてもよい。)

例えば、任意の群 G から出発すると、

$$G^{\wedge} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{N \triangleleft G,\ [G:N]<\infty} G/N$$

は副有限群となり、群 G の 副有限完備化 と呼ぶ。自由群の副有限完備化を

「自由副有限群（free profinite group）」

と呼ぶ。

（ブーケのような）グラフ Γ の被覆の話に戻ろう。

$$G \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1(\Gamma)$$

と置くと、「G/N」たちは、ちょうど

有限次（ガロア）被覆

に対応する。§3 の議論から分かるように、

$$\pi_1(\Gamma)^{\wedge}$$

は 自由副有限群 となる。