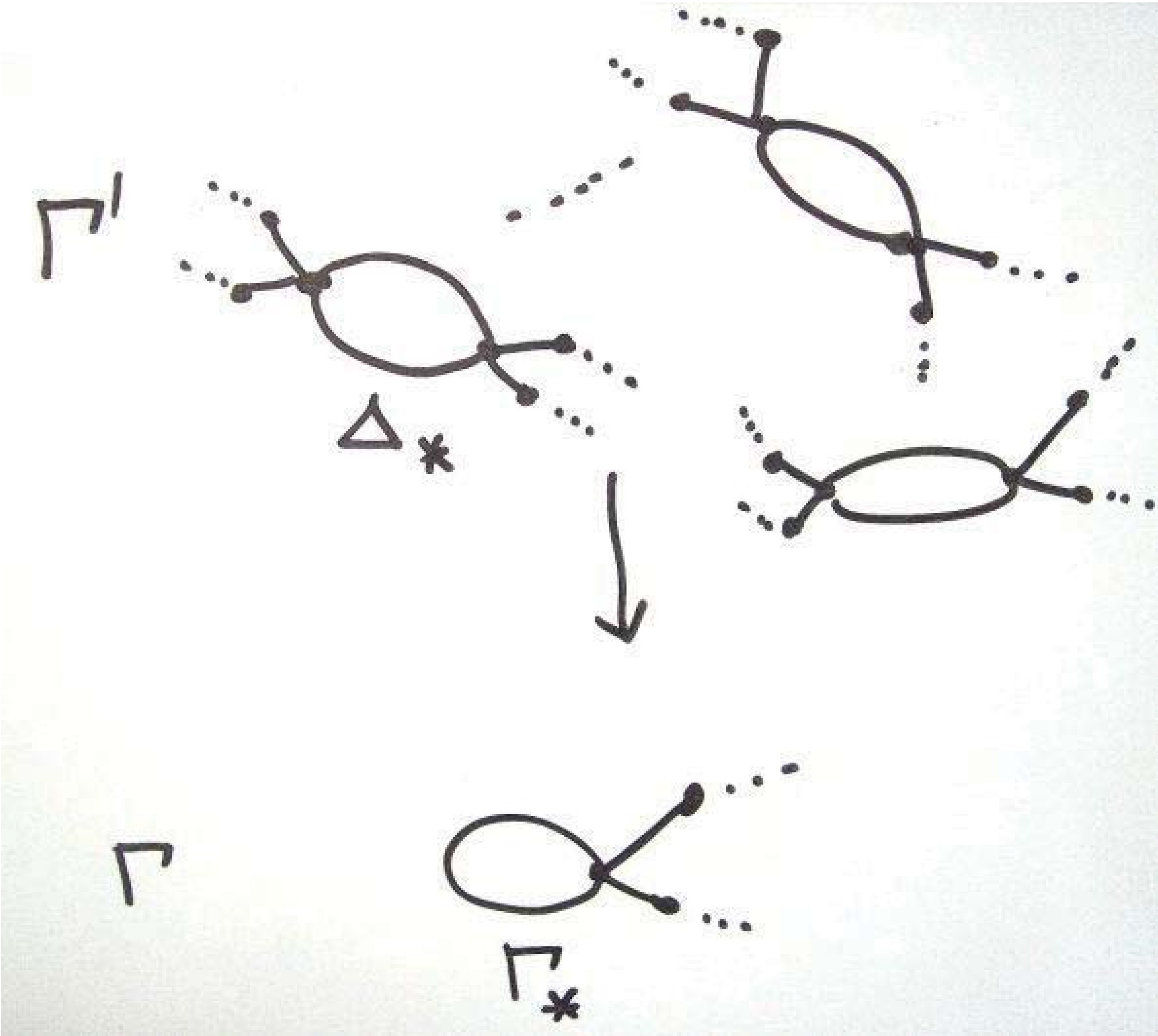
II. 自由副有限群の center

§1. 分解群と「構造の輸送」

（ブーケとは限らないが、

ブーケに必ずホモトープになる）

連結なグラフの被覆 $\Gamma' \to \Gamma$ を考えよう。



（I, §4 のように）下のグラフのループ $\Gamma_* \subseteq \Gamma$ が与えられたとする。

すると、Γ_* に対して、$\Gamma' \to \Gamma$ の Γ_* への制限の連結成分 Δ_* を固定する分解群

$$D_* \subseteq \mathrm{Gal}(\Gamma'/\Gamma)$$

が定まり、Δ_* を取り替えても

D_* は共役を除いて変わらない。

次に、有限群 G が Γ に作用し、

$$G \ \curvearrowright \ \Gamma$$

その作用によって被覆 $\Gamma' \to \Gamma$ の同型類が保たれると仮定しよう。これはつまり、$\forall g \in G$ に対して、g によって引き起こされる Γ の自己同型 α_g を次のような可換図式の中に埋め込めることを意味する：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \xrightarrow{\alpha'_g} & \Gamma' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma & \xrightarrow{\alpha_g} & \Gamma \end{array}$$

ただし、Γ' の自己同型 α'_g は、

$\mathrm{Gal}(\Gamma'/\Gamma)$の元との

合成を除いてしか決まらない。

次に、前の分解群の話を思い出してみよう。
α_g がループ Γ_* を別のループ

$$\alpha_g : \Gamma_* \mapsto \Gamma_\circ \overset{\text{def}}{=} \alpha_g(\Gamma_*)$$

に写したとすると、部分群 $D_* \subseteq \mathrm{Gal}(\Gamma'/\Gamma)$ の 共役類$[D_*]$ は、α_g によって

$$\alpha_g : [D_*] \mapsto [D_\circ]$$

と、$\Gamma_\circ$の分解群の共役類 に写される。

この現象のことを、

「構造の輸送 (transport of structure)」

と呼ぶ。

§2. 自由群の生成元の中心化群の計算

G は 自由副有限群 とし、

$$\gamma \in G$$

は G の生成元の系に現れる元 とする。すると、γ で生成される G の閉部分群

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \gamma \rangle \subseteq G$$

は、$\widehat{\mathbb{Z}}$（つまり、$\mathbb{Z}$ の副有限完備化）と 同型 になる（G の アーベル化 に落とすと分かるように）。

本講義 I, II の主定理は次の通りである：

定理：γ の G 内の 中心化群＝ centralizer

$$Z_G(H) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\sigma \in G \mid \sigma \cdot h = h \cdot \sigma,\ \forall h \in H\}$$

は H になる。

系:G が「複数元生成」ならその 中心＝ center

$$Z(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\sigma \in G \mid \sigma \cdot g = g \cdot \sigma,\ \forall g \in G\}$$

は自明である。

<u>定理の証明</u>：

G を、（ブーケのような）連結な

<u>グラフ Γ の基本群の副有限完備化</u>

と見て、H が、ある <u>ループ</u> $\Gamma_* \subseteq \Gamma$ に付随する <u>分解群</u> として生じたと仮定する。

次に、$\sigma \in Z_G(H)$ とする。すると、（副有限完備化の定義より）G の任意の正規開部分群 $N \triangleleft G$ に対して、

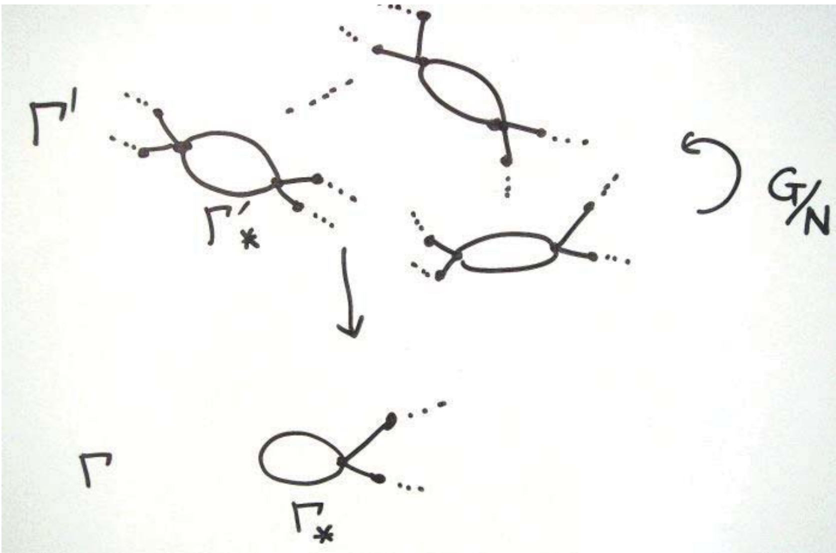
$$\sigma \in H \cdot N$$

を証明すれば十分である。

次に、$N \subseteq G$ に付随する <u>有限次被覆</u> を $\Gamma' \to \Gamma$ と書く。この被覆を Γ_* に制限して得られる被覆の適切な（$= H$ に対応するような）連結成分 Γ'_* をとると、他の連結成分は、

$$\zeta \cdot \Gamma'_*, \quad \zeta \in \mathrm{Gal}(\Gamma'/\Gamma) = G/N$$

のような形に書けて、剰余類集合 $G/H \cdot N$ の元に 1 対 1 に対応する。



一方、N は、グラフ Γ' の基本群の副有限完備化と見ることができ、その中の Γ'_* の分解群の（N 内の！）共役類は

$$[N \bigcap H]$$

となり、$\zeta \cdot \Gamma'_*$ の分解群は

$$\zeta \cdot [N \bigcap H] \cdot \zeta^{-1}$$

となる。特に、$\sigma \mapsto \zeta$ とすると、

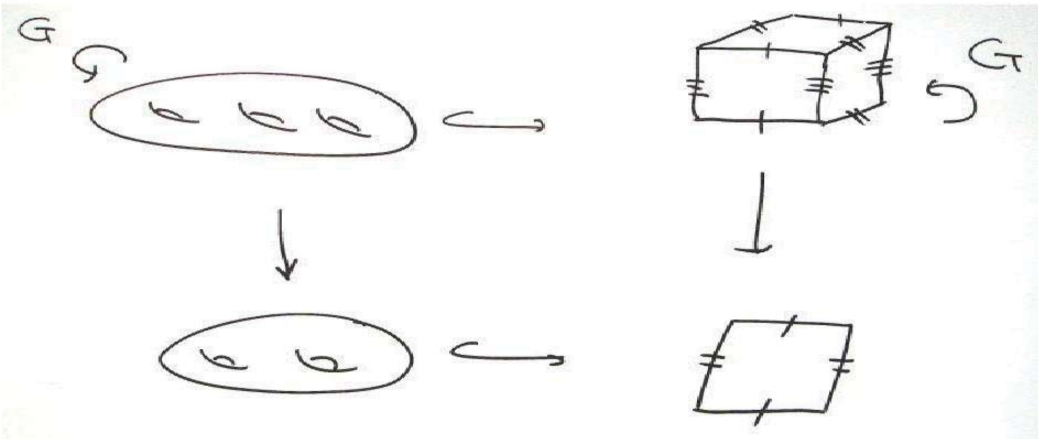
$$\sigma \in Z_G(H)$$

より、$\zeta \cdot \Gamma'_* \neq \Gamma'_*$ の分解群は $[N \bigcap H]$ となる。しかし、相異なるループを最短のパスで結ぶことによって容易に示せるように、相異なるループの分解群（の共役類）が一致することはあり得ない！この矛盾によって、$\sigma \in H \cdot N$ となり、証明は完成する。□

§3. Survey: リーマン面の被覆と基本群

種数＝ genus g の（コンパクトで向き付け可能な）曲面 R は、次元 $2g$ のトーラス J (＝「ヤコビアン」）の中に自然に埋め込むことができる：

$$R \hookrightarrow J \cong \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}$$



この埋め込みが「自然」であるということは、例えば、有限群 G が R に作用するとき、

$$G \curvearrowright R$$

その作用によって、G の J への作用が誘導される

$$G \curvearrowright J$$

ことを意味する。

R と J の 有限次な被覆（＝局所的に下の位相空間の幾つかのコピーになるもの）を考えると、それぞれの 副有限基本群（＝基本群の副有限完備化）

$$\widehat{\Pi}_R, \quad \widehat{\Pi}_J$$

が定義される。また、J の被覆を（分解群の話のときと同様に）R に 制限する ことによって、自然な群準同型 が定義される：

$$\widehat{\Pi}_R \twoheadrightarrow \widehat{\Pi}_J \cong \widehat{\mathbb{Z}}^{2g}$$

この群準同型は、実は 全射 であり、その核は、$\widehat{\Pi}_R$ の 交換子部分群の閉包 になる。つまり、この群準同型は、$\widehat{\Pi}_R$ の アーベル化 と同一視することができる。しかも、「自然」であるということは、準同型は両辺への G の 外作用（＝共役を除いての作用）と 両立 するということである。

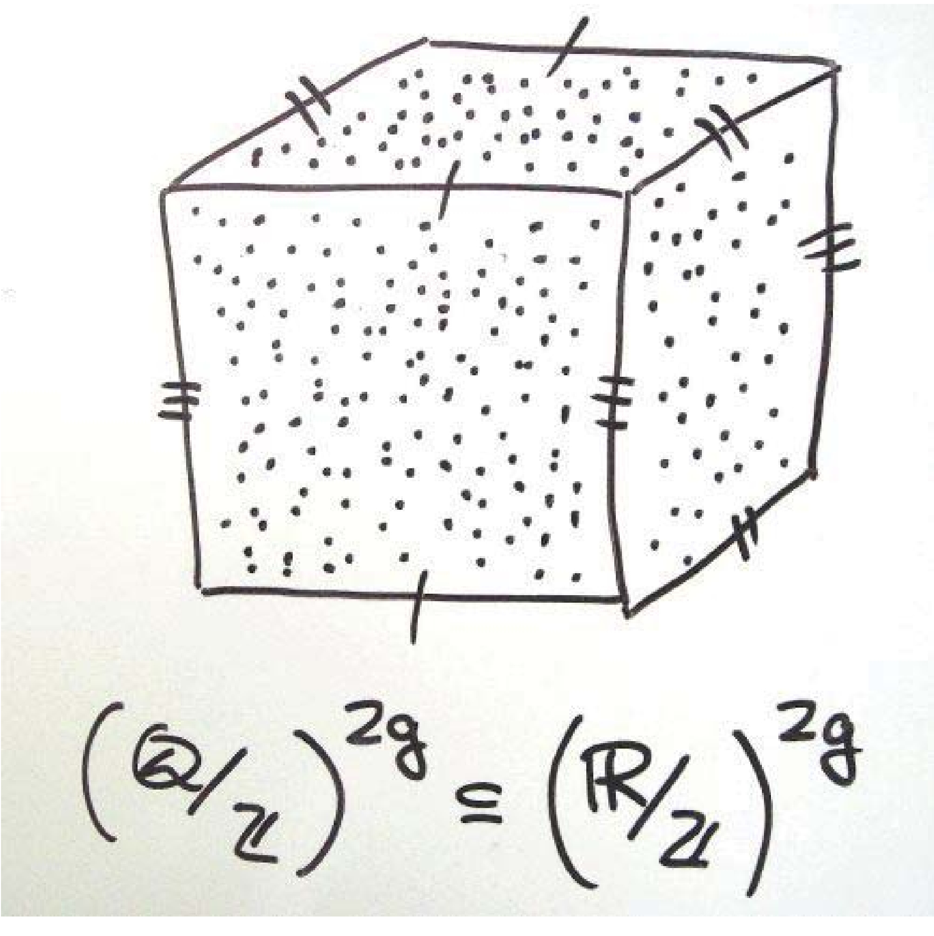
次に、$\widehat{\Pi}_J$ について考えよう。$\widehat{\Pi}_J$ は、実は、J の 等分点 から生じる加群

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, J)$$
$$(\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{2g}/\mathbb{Z}^{2g}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^{2g})$$

と 自然に同型 になる。一方、トーラス J の等分点たち $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, J)$ は、J の中で稠密＝ dense である。従って、

$\widehat{\Pi}_J$ に自明に（外）作用する $g \in G$ は、

$1 \in G$ しかない。



<u>定理</u>: $\widehat{\Pi}_R$ の <u>中心＝ center</u> $Z(\widehat{\Pi}_R)$ は自明である。

<u>証明</u>:

$\sigma \in Z(\widehat{\Pi}_R)$ が、任意の正規開部分群 $N \triangleleft G$ に対して、$\sigma \in N$ を満たすことを示せばよい。N に付随する有限次被覆を

$$R' \to R$$

と書くと、$\widehat{\Pi}_{R'} = N$ となり、「$\sigma \in Z(\widehat{\Pi}_R)$」より、$\sigma$ による共役は、$\widehat{\Pi}_{R'}$ に自明に外作用する。従って、アーベル化をとると、σ は $\widehat{\Pi}_{J'}$ にも自明に（外）作用するため、σ の $\widehat{\Pi}_R/\widehat{\Pi}_{R'}$ 内の像は（上の議論より）自明になり、即ち「$\sigma \in \widehat{\Pi}_{R'} = N$」が成立する。□

<u>統一的な原理＝パターン</u>　(§2 を参照)

「上に上がっても、それで尽きているのではなく、上の幾何が忠実に反映されるだけの (便利な！)‘ <u>自然な残留物</u> ’がある。」

§4. Survey: p 進局所体と類体論

p は 素数 とする。すると、有理数体 $\mathbb{Q}$ に p 進位相 が入る。「p 進位相」とは、

「$a, b \in \mathbb{Q}$ が 近い」$\Longleftrightarrow$
「$a - b$ は p の大きいベキ で割り切れる」

で定義される位相である。有理数体 $\mathbb{Q}$ を p 進位相 で完備化することによって得られる「p 進数体」を、$\mathbb{Q}_p$ と書く。

次に、p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の 代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ が与えられたとする。$\mathbb{Q}_p$ の「絶対ガロア群」を、

$$G_{\mathbb{Q}_p} \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$$

と定義する。すると、$G_{\mathbb{Q}_p}$ の 開部分群 $H \subseteq G_{\mathbb{Q}_p}$ は、$\mathbb{Q}_p$ の 有限次拡大体 $K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$ （＝「p 進局所体」）と 1 対 1 に対応する。このとき、

$$G_K \overset{\text{def}}{=} H, \quad K^\times \overset{\text{def}}{=} K \backslash \{0\}$$

と書く。

このような設定では、「局所類体論」により、G_K の アーベル化 への 自然な埋め込み

$$K^\times \hookrightarrow G_K^{\mathrm{ab}}$$

が定義される。この埋め込みが「自然」であるということは、$K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$ を保つ任意の $\sigma \in G_{\mathbb{Q}_p}$ の 両辺への作用と両立的 であるということである。

つまり、この局所類体論による自然な埋め込みは、§3 の理論における

ヤコビアンと同様な役割を果たす

ということである。

従って、§3 の理論と同様に次の帰結が従う。

定理：G_K の 中心＝center $Z(G_K)$ は自明である。

<u>証明</u>：

$\sigma \in Z(G_K)$ が、任意の正規開部分群 $N \triangleleft G_K$ に対して、$\sigma \in N$ を満たすことを示せばよい。N に付随する有限次拡大体を

$$K \subseteq K' \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p$$

と書くと、$G_{K'} = N$ となり、「$\sigma \in Z(G_K)$」より、σ による共役は、$G_{K'}$ に自明に外作用する。従って、アーベル化をとると、σ は $G_{K'}^{\mathrm{ab}}$、特に $(K')^{\times}$ にも自明に（外）作用するため、σ の $G_K/G_{K'}$ 内の像は（上の議論より）自明になり、即ち「$\sigma \in G_{K'} = N$」が成立する。□