代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想

中村博昭, 玉川安騎男, 望月新一

表題の Grothendieck 予想とは、一言でいうとすれば、双曲的代数曲線の数論的基本群は曲線の代数構造まで完全に決めてしまう、という予想である。この問題の研究は、著者の一人 (中村) により８０年代の末に発端が開かれ、もう一人 (玉川) により９０年代前半から (正標数の場合を含む) 本質的な新展開がもたらされ、つづいて最後の一人 (望月) により、新しい (p 進的な) 解釈を出発点とする最終的な解決が与えられた。

この論説では、問題の背景や歴史について簡単に復習したあと、予想が三人によって次第に解明されていった様子を報告する。

§1. 数論的基本群 — 代数幾何と群論の架け橋 —

§1.1. エタール基本群

通常の「位相幾何的な基本群」は、よく知られているように、図形の連続変形で不変な、いわゆるホモトピー不変量であり、例えばコンパクトな複素代数曲線では基本群で決まるのはたかだか種数のみである。従ってそのままでは個々の代数曲線の代数構造まで決めるほどの繊細な不変量にはなり得ない。実際、上の予想で考えている数論的基本群は、A. Grothendieck により導入された「エタール基本群」の概念をもちいて「ガロア群の延長」として自然に定義されるものである。

この概念は１９６０年代に [SGA1] において代数幾何における「スキームのガロア理論」を統制するものとして導入されたものであり、それによれば、連結なスキーム X とその上の代数閉点 $\bar{x}$ が与えられたとき、エタール基本群 $\pi_1(X,\bar{x})$ は次のような「解集合」の系列の置換群として定義される。即ち X の有限次エタール被覆 (以後しばしば有限次被覆と略す) Y を全て走らせるとき、$\bar{x}$ 上の fiber set $Y(\bar{x})$ たちは有限集合の射影系をなすが、この系列の自己置換全体のなす群が $\pi_1(X,\bar{x})$ である。この群には個々の有限集合 $Y(\bar{x})$ 上の置換群の射影極限として profinite 位相群[1)] の構造が自然に入ることに注意しておく。エタール基本群の位相群としての同型類は定義に現れる基点 $\bar{x}$ の取り方に依存しないことがわかるので、群論的な構造のみが問題となるときしばしば基点を省略し、単に $\pi_1(X)$ のようにも書くことにする。

任意の有限次被覆 $Y \to X$ に対して、$Y(\bar{x})$ は $\pi_1(X,\bar{x})$ の連続な有限置換表現を与えるが、この対応により、Xの有限次被覆の全体と $\pi_1(X,\bar{x})$ の連続有限置換表現の全体が圏同値になる。特に (連結な Y に対して) $Y(\bar{x})$ の各点における安定化群は $\pi_1(X,\bar{x})$ の開部分群[2)] (の共役類) を定め、逆に $\pi_1(X,\bar{x})$ の開部分群 H は左剰余類集合への置換表現に対応する有限次連結被覆 $Y \to X$ (の同値類) を定める。この対応関係 $H \leftrightarrow Y$ は後の議論でもしばしば現れるので、$Y = Y^H$, $H = H_Y$ という記号で対応するものを表すことにする。特に H_Y が Y 自身の基本群 $\pi_1(Y)$ と同型になるという観察は基本的である。

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

空間 X が一点、特に体 K のスペクトラム $\mathrm{Spec}\,(K)$ として与えられたならば、連結な有限次被覆 Y 上の fiber set $Y(\bar{x})$ は Y を定義する代数方程式の解の集合にほかならず、基本群 $\pi_1(\mathrm{Spec}\,(K))$ はあらゆる方程式の「解の置換群」の総体である絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ と同一視される。(ここで $\overline{K}$ は K の分離閉包を表す。)

一般にスキームの射 $f : X_1 \to X_2$ および X_1 上の代数閉点 $\bar{x}_1$ が与えられると、$\bar{x}_1$ の像を $\bar{x}_2$ として自然な準同型$\pi_1(X_1, \bar{x}_1) \to \pi_1(X_2, \bar{x}_2)$ が引き起こされる。実際、有限次エタール被覆 $Y \to X_2$ の引き戻し (ファイバー積) $Y' \to X_1$ はやはり有限次エタール被覆であり、常に $Y(\bar{x}_2) \cong Y'(\bar{x}_1)$ が成り立つ。このことから、対称群系列を制限することによって上の準同型が生じるのである。基点 $\bar{x}_1$ の取り方を変えてもこの準同型は適当な可換図式のもとで同値になってしまうので、以下しばしば基点への言及は省略して、単に $\pi_1(X_1) \to \pi_1(X_2)$ のような書き方をすることにする。

X が体 K 上定義された代数多様体の場合には、自然に与えられている射 $X \to \mathrm{Spec}\,(K)$ および $\mathrm{Spec}\,\overline{K} \to \mathrm{Spec}\,K$ とから射 $X_{\overline{K}} \to X$ ($X_{\overline{K}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} X \times_K \overline{K}$) が誘導され、これらから基本群の完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(X_{\overline{K}}) \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} \mathrm{Gal}(K) \longrightarrow 1 \tag{1.1}$$

が生じる。射影 pr_X の核を与えている群 $\pi_1(X_{\overline{K}})$ は X の「幾何的」基本群と呼ばれ、K が標数 0 の場合には、対応する複素多様体の通常の位相幾何的な基本群の profinite 完備化 (全ての有限商群の射影極限) と同型になるので、特に変形不変量である[3)]。そこで「数論的」基本群 $\pi_1(X)$ の $\mathrm{Gal}(K)$-拡大群としての構造 (1.1) が空間の変形に関してどう変化するかが問題となる。

上の完全列 (1.1) において $\pi_1(X_{\overline{K}})$ は $\pi_1(X)$ の正規部分群であるから、共役をとることによって準同型$\pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$ が定まる。明らかにこの準同型は $\pi_1(X_{\overline{K}})$ をその内部自己同型群に写すから、商をとれば、$\mathrm{Gal}(K)$ から幾何的基本群の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$ への準同型 (外ガロア表現という)

$$\rho_X : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X_{\overline{K}})) \tag{1.2}$$

が生じる。今は $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ から出発して$\rho_X : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$ を群論的な操作によって定義したが、$\pi_1(X_{\overline{K}})$ の中心が自明な場合には、逆に ρ_X から群論的な操作によって pr_X を復元することができる。例えば、標数 0 の体上定義された双曲的代数曲線 (即ち、滑らかな代数曲線で、種数を g、無限遠点の数を n とすれば $(g,n) \neq (0,0),(0,1),(0,2),(1,0)$ であるようなもの) では、幾何的基本群は非アーベルな自由群ないし曲面群の profinite 完備化と同型になり、その中心は自明であることが知られているのでこの場合にあてはまる。このようなときは、「$\pi_1(X_{\overline{K}})$ への外ガロア作用 ρ_X」を考えることと「$\mathrm{Gal}(K)$ の拡大群 $\pi_1(X)$」を考えることは同等となるのである。

§1.2. Grothendieck の遠アーベル予想

Grothendieck([G1-3]) が主張したのは、 代数多様体 X が ‘遠アーベル (anabelian) 代数多様体’ と呼ばれる、双曲的代数曲線を含むある種の代数多様体のクラスに属し、基礎体 K が素体上有限生成ならば、$\mathrm{Gal}(K)$ の拡大群としての $\pi_1(X)$ の構造 (1.1) は X の幾何学をコントロールするであろう、という直感を出発点とする予想群であった。

まず第一に注意をひくのは、Grothendieck が「遠アーベル代数幾何の基本予想」と呼んでいる次の総論的主張であろう。

(GC1) 基本「予想」. 素体上有限生成な体 K 上の遠アーベル代数多様体 X は数論的基本群 $\pi_1(X)$ の位相群構造および付随する全射 $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ の構造から '復元' できる。

ここで「遠アーベル代数多様体」は「アーベル群からほど遠い基本群によってその幾何が統制される」代数多様体というような意味で、Grothendieck により創出された言葉であるが、一般次元における正確な定義を Grothendieck が保留してしまったのと、上の '復元 (reconstitute) する' の意味も曖昧なまま残されたため、現在でも高次元での予想の成立範囲を不確かなものとしている[4)]。しかし標数 0 の代数曲線については Grothendieck 自身により次のような明示的な予想が立てられた。

(GC2) Hom 予想. 有理数体上有限生成な体 K 上の双曲的代数曲線 X, Y に対して

$$\mathrm{Hom}_K(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1(X), \pi_1(Y))/\sim$$

によって支配的な K-射たちと $\mathrm{Gal}(K)$-両立的な開準同型写像の (右からの $\pi_1(Y_{\overline{K}})$ の共役作用による) 同値類たちとの間の一対一対応が与えられる。(つまり、基本群の開準同型は代数幾何的な射に由来するものに限る。)

Grothendieck 自身も注意しているように、上の予想は G.Faltings ([F1]) によって証明されたアーベル多様体の 1 次元エタール・ホモロジー群に関する Tate 予想:

$$\mathrm{Hom}_K(A,B) \otimes \hat{\mathbf{Z}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K)}(H_1(A_{\overline{K}}, \hat{\mathbf{Z}}), H_1(B_{\overline{K}}, \hat{\mathbf{Z}}))$$

(ここで A, B は大域体 K 上定義されたアーベル多様体で、$\hat{\mathbf{Z}}$ は $\mathbf{Z}$ の profinite 完備化) と類似している。また、これと同時に Faltings により解決された isogeny 定理 (や Shafarevich 予想等) を用いれば、ヤコビ多様体を考えることにより、与えられた種数 2 以上の proper 代数曲線とホモロジー群 H_1 がガロア同型となる曲線は高々有限個であることが直ちに従う。H_1 が π_1 のアーベル化であることに注意すれば、基本予想 (GC1) は、ホモロジー群から基本群に情報を強めることによって、同じ不変量を持つ曲線の可能性を有限個から 1 個に縮めることを要請していると見ることができる。ただし、この種の有限性定理の effectivity は (例外的な場合[5)]を除いて) order が途方もなく大きいのが普通であり、一般には双曲的曲線の Grothendieck 予想 (GC1)(GC2) とそのヤコビ多様体の Tate 予想等とはかなりの隔たりがある。Grothendieck は彼の予想の根拠として数論的基本群 $\pi_1(X)$ が「尋常ならざる剛性」を有すること、言いかえればその数論的な '商' $\mathrm{Gal}(K)$ の 幾何的 '部分' $\pi_1(X_{\overline{K}})$ への外作用 (1.2) が「尋常でないほど強い」はずであることを (コホモロジー理論において A.Weil や P.Deligne らにより解明されてきたガロア表現の非自明性と比較して) 挙げている ([G3])。

最後にもう一つ、きちんと定式化できる (未解決) 予想として興味深いものに次の Section 予想がある。体 K 上の代数多様体 X の K-有理点 $x \in X(K)$ は構造射 $X \to \mathrm{Spec}\, K$ に対する section 射 $x : \mathrm{Spec}\, K \to X$ のことであるから、K-有理点 x が与えられるごとに上の基本完全列 (1.1) を分裂させる section 準同型$\alpha_x : \mathrm{Gal}(K) \to \pi_1(X)$ (の$\pi_1(X_{\overline{K}})$-共役類) が誘導される。

(GC3) Section 予想. (GC2) と同じ X/K に対して、$\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ の section 準同型 $\alpha : \mathrm{Gal}(K) \to \pi_1(X)$ は、X の K-有理点に由来するものと、'無限遠 K-有理点' に由来するものに限る[6)]。

無限遠点に由来する (tangential) section については次の節で触れる。また Hom 予想については、Grothendieck ([G2]) は更に X が一般の滑らかな代数多様体で Y が初等的遠アーベル代数多様体 (双曲的曲線族の反復的 smooth fibration として得られる多様体) の場合に拡張する可能性について言及している[7)]。Section 予想は、Hom 予想において X を基礎体のスペクトラムで置き換えた場合の variant である[8)]。更に X や Y が関数体のスペクトラムになった場合についても考慮があり、両方ともそうであるときを「遠アーベル予想の双有理版[9)]」として、これも予想としている。

§1.3. 数論的基本群をめぐって

Grothendieck の文書 ([G1-3]) には、§1.2 で紹介したような予想のほかにも、位相曲面上のグラフ (dessin d'enfant) による数体上の代数曲線の統括の可能性や、曲線のモジュライ空間の数論的基本群たちの間の密接な相互関係の記述、圏論的な新しい視点による空間概念の変革、などの多くの夢が語られている。また、$K = \mathbf{Q}$, $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ に対する外ガロア表現 (1.2) が単射であるという１９７０年代末の G.V.Belyi ([B]) の結果は、ガロア群と基本群の関わりが高度に非自明である典型例として多くの数学者から注目された。その前後から、[G1-3] や他の独立な起源を持つ幾つもの数論的基本群に関する研究課題や未解決問題が少しずつ関連づけられて認識されるようになり、現在もますます活発な研究が行われている (ガロアの逆問題、混合モチーフ、アデール的特殊関数、Grothendieck-Teichmüller 群など)。これら多数の重要な主題や最近の進展などについて、本論説では紙数の都合上、幾つかの参考図書 ([1–6]) および主要報文 ([I2], [H]) を挙げるにとどめ、具体的な内容に立ち入ることのできないことをお詫び申し上げたい。上のような数論的基本群をめぐる数多くの研究課題の大樹の中にあって、本論説で扱う「Grothendieck 予想」は、やや観念論的な色合いの濃い枝の一つということが出来るであろう。

§2. 有限性定理から剛性定理へ (主に X :種数０, K :代数体の場合)

§2.1. Anderson-伊原の定理

Grothendieck 予想へのアプローチは、数論的基本群の拡大構造 (1.1) やそこから生じる外ガロア表現 (1.2) のどこを見れば元の空間の代数構造が良く反映されているか、という問題を考えることから始まる。ところで素数 l を固定したとき、外ガロア表現 (1.2) は $\pi_1(X_{\overline{K}})$ の最大 pro-l 商群[10)] $\pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}})$ の上への外作用

$$\rho_X^{(l)} : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(\pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}}))$$

をも自然に引き起こしている。１９８０年代に伊原康隆 ([I1]) は、それ以前の研究経緯から Grothendieck, Deligne 等とは独立に $X = \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ に対する pro-l 外ガロア表現の研究を創始し、その深い数論性 (ヤコビ和、円単数との関わり) を明らかにした[11)]。そしてこの伊原の成功を契機に、その応用や他のいろいろな曲線への一般化の準備などが主にわが国の研究者を中心に進められた[12)]。

８０年代後半には、既に次のような事実が G.Anderson-伊原 ([AI]) の一定理として知られていた。有限集合 $\Lambda \subset \mathbf{P}^1(K)$ が $0, 1, \infty$ を含むとき、

定理 (Anderson-伊原). 種数０の曲線 $X = \mathbf{P}^1_K - \Lambda$ に対する pro-l 外ガロア表現$\rho_X^{(l)}$ の核の固定体 $K_X^{(l)}$ は集合 Λ から複比と l 乗根を取る操作を繰り返して生じる代数的数を全て基礎体 K に添加して得られる拡大体である。

この定理は、pro-l 外ガロア表現 $\rho_X^{(l)}$ から自然に生ずる $\overline{K}$ の部分体 $K_X^{(l)}$ を、分岐点集合 $\Lambda \subset \mathbf{P}^1(K)$ の座標から一定の手順で生成される「数」の系列によって記述するものであるが、見方を変えると、数論的基本群 $\pi_1(X)$ の $\mathrm{Gal}(K)$-拡大群としての構造から $K_X^{(l)}$ という $\overline{K}$ の部分体に値を持つ群論的不変量を、素数 l ごとに記述的に構成しているともみなせる。中村は、このような $\overline{K}$ の部分体として定義される数論的基本群の不変量をより系統的に構成できれば、それらによって種数 0 の代数曲線を細かく区別するという形で Grothendieck 予想へのアプローチが出来るかもしれない、と考えた。

§2.2. ガロア置換の「群論的」記述

Anderson-伊原の方法は、 $\pi_1(\mathbf{P}^1 - \Lambda)$ における pro-l 外ガロア表現を、 $\mathbf{P}^1 - \Lambda$ の "pro-l 普遍被覆の縁" に分布する Λ 上の "pro-cusp" 点たちのガロア置換の言葉に翻訳し、それを種数 0 (の曲線たちのなす) 被覆塔の情報に帰着するところがポイントになっている。そこでまず、「有限次被覆の cusp 点たちがガロア置換される」という幾何的な現象を「数論的基本群の (拡大) 群構造」のみを用いる群論的な言葉に翻訳することを考える。

一般に X を K 上定義された (任意の種数の) affine 双曲的曲線とし、Y をその有限次被覆、Y^* をその非特異コンパクト化とすれば、Y の cusp 点集合とは$\Sigma_Y \stackrel{\mathrm{def}}{=} Y^* - Y$ のことである。まず、被覆 Y の自然な定義体は、対応する 開部分群 $H_Y = \pi_1(Y)$ の $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ による像の固定体 K_Y として得られる。また、Y の幾何的基本群は共通部分 $H_Y \cap \pi_1(X_{\overline{K}})$ として復元される。これは、Y^* の種数が g_Y、$\Sigma_Y(\overline{K})$ の濃度が n_Y であるとすれば、階数 $2g_Y + n_Y - 1$ の非アーベル自由 profinite 群である。その最大 pro-l アーベル商として l進エタール・ホモロジー群 $H_1(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_l)$ $(= \pi_1^{(l)}(Y_{\overline{K}})^{\mathrm{ab}})$ が得られ、共役を取ることにより、そこには $\mathrm{Gal}(K_Y)$-加群としての構造も入っている。ここに、cusp 点集合における円分置換表現[13)]が (階数 $n_Y - 1$ の部分加群として) ほぼ入っているので、これを群論的に取り出せればよい。それを保証するのが Riemann-Weil 予想である。実際、問題の 'cusp 部分' による $H_1(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_l)$ の商加群は階数 $2g_Y$ となり、Y^* のヤコビ多様体の l-巾分点たちのなす l 進 Tate 加群と同型である。Riemann-Weil 予想は、そこにおける $\mathrm{Gal}(K_Y)$ から生じる Frobenius 作用の固有値半径 (weight) が、円分作用の場合とスケールが異なることをいっているので、$H_1(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_l)$ の cusp 部分が群論的に識別されることになる。

§2.3. 有限性定理 ([N1])

そこで例えば $X = \mathbf{P}^1_K - \Lambda$ $(\Lambda \supset \{0, 1, \infty\})$ の被覆 Y のうち、体 $K(\sqrt[N]{1})$ を定義体とし、$X_{K(\sqrt[N]{1})}$ 上 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^{|\Lambda|-1}$ をガロア群とするガロア被覆となっているものを考える。そして各 $H_1(Y_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_l)$ の cusp 部分におけるガロア表現の核の固定体の、上のような Y と素数 l にわたる共通部分を計算してみると、体 $K((\lambda - \lambda')^{1/N} \mid \lambda, \lambda' \in \Lambda - \{\infty\})$ が出てくる。これは群の全射 $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ から自然数 N を与えるごとに群論的に抽出される不変量である。更に N を動かせば、簡単なクンマー議論 (と単数群の有限生成性) により、乗法群 $K^\times$ のなかで有限集合 $\{\lambda - \lambda' \mid \lambda, \lambda' \in \Lambda - \{\infty\}, \lambda \neq \lambda'\}$ で生成される部分群が不変量になることがわかる。この不変量によって、同じ数論的基本群を与える$\Lambda \subset \mathbf{P}^1(K)$ の取り方が (一次分数変換を法として) 有限通りしかないこと、また K が特別な代数体の場合には基本群 (のメタ・アーベル化) が $\mathbf{P}^1 - \{$ 4 点 $\}$ を決めてしまうことなどが示される。

§2.4. 剛性定理

より効率よく cusp 点たちのガロア置換の情報を利用するために、今度は$\pi_1(X)$ の全ての開部

分群 H をパラメータとして走らせて、対応する被覆 Y^H に付随する cusp 部分 $\subset H_1((Y^H)_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_l)$ の情報を全部集めてくることを考える。この cusp 部分は (§2.2 で述べたように) weight filtration によって特徴づけられているから、全ての開部分群 H および素数 l にわたって $I \cap H$ が常にその cusp 部分に落ちるような$\pi_1(X_{\overline{K}})$ の巡回部分群 I の合併を作れば、Gal(K)-拡大群 $\pi_1(X)$ から群論的に取り出せる $\pi_1(X_{\overline{K}})$ の部分集合が得られる。

この部分集合が 'cuspidal isotropy 部分群' の (共役類) 和集合に相当するもの、いいかえれば X の無限遠点 (即ち X 自身に対する cusp 点) における $\pi_1(X_{\overline{K}})$ 内の惰性群 ($\cong \hat{\mathbf{Z}}$) 全体の合併になることが証明される (遠アーベル weight filtration [N2,4])。各惰性群の正規化群として $\pi_1(X)$ 内の分解群が復元されるが、この分解群の中に像を持つような $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ の section 準同型 $\alpha : \mathrm{Gal}(K) \to \pi_1(X)$ たちを X の無限遠 K-有理点から発する **tangential section** と呼ぶ。Grothendieck の Section 予想 (GC3) で問題とされる section 準同型のうち無限遠 K-有理点に由来するものに関しては、このようにして群論的な特徴づけが与えられる。

さて、惰性群 (や対応する分解群) の集合が群論的に特徴づけられたため、例えば二つの曲線 X_1, X_2/K の数論的基本群の間に Gal(K) 上の同型 $\pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2)$ が与えられたならば、その群同型は自動的に惰性群の集合を保っていなくてはならず、かつ各々に対応する無限遠点の剰余体も (分解群の pr_X による像の固定体として) 保たれることになる。従って X_1 が X_1' に開埋入されるなら、X_2 も$\pi_1(X_1') \cong \pi_1(X_2')$ となる X_2' に開埋入されなくてはならない。特に、種数 0 の曲線 $\mathbf{P}^1 - \{n$ 点$\}$ の復元の問題は $\mathbf{P}^1 - \{$ 4 点 $\}$ の場合に帰着されることになる。更に幾何的な巡回被覆で 2 点でのみ分岐するようなものが基本群と惰性群の言葉で特定できることを利用すると、[N1] の手法を援用して$\pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty, \lambda\})$ の不変量として $K^\times$ の乗法部分群の三つ組 $\langle\lambda\rangle$, $\langle 1-\lambda\rangle$, $\langle \frac{\lambda}{\lambda-1}\rangle$ を取り出せることがわかる。これが実際 $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty, \lambda\}$ の同型類を特徴づける。このようにして $\mathbf{Q}$ 上有限生成な体上の種数 0 の双曲的代数曲線は基本群から '復元' されることを示すことができる ([N2])。

また、惰性群の特徴づけが一般の種数の affine 曲線の pro-l 基本群でも可能なことから、Grothendieck 予想を pro-l 基本群に対して定式化しなおしたものに、群の降中心列などを通して '定量的に' アプローチする可能性が生まれた。特に pro-l 基本群の自己同型群の評価の問題に特殊化すると、高種数の曲線やその配置空間の pro-l 外ガロア表現の知識を種々の filtration の方法で組み合わせて、肯定的結果を幾らか組織的に得ることができる (論説 [N7] や [NTs],[NTa],[MT] などを参照)。このような、基本群の自己同型群から曲線のそれを復元する問題は、(GC2) の Isom 版へのステップの一部分とみなすこともできる。しかし、より本質的な打開を与えるには、まず玉川の仕事 (§3) を待たなければならなかった。

ところで上において、無限遠点から生ずる tangential section に対して行なったような、

> 代数曲線の数論的基本群の拡大群構造 $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ に対し
> 何らかの幾何的な成因を持つような section 準同型 $\alpha : \mathrm{Gal}(K) \to \pi_1(X)$
> を (他の一般の section 準同型から) **群論的に**識別する、

というステップは、以後の玉川や望月の仕事においても共通して行われる部分となっている。その際、$\pi_1(X)$ の開部分群 H をパラメータのように走らせて、対応する被覆曲線 Y^H たちのエタール・コホモロジーに含まれる数論幾何的情報を「遠アーベル的に」集約させる、という手法は、標準的に用いられるようになった。ただし、さまざまな数論的設定のもとで、Y^H のどのような幾何的情報をエタール・コホモロジーの中に見出し、どのようにそれらを集約させて結果に結びつけるかという点は、より精巧な技術と新鮮な発想を要する大きな問題である。以下の各節

において、このような問題に対する玉川・望月の、それぞれの数論的状況におけるアイディアの展開を解説するが、専門外の読者の方にも、その底に流れる共通の問題意識の広がり方を (多少なりとも) 味わって頂けるように、一歩一歩筆を進めることにしよう。

§3. 正標数代数曲線の基本群と Grothendieck 予想

§3.1. 有限体上の Grothendieck 予想

この節では、k を有限体とし、X をその上の (非特異) affine 曲線とする。玉川 ([T1]) の主結果の一つは、スキーム X が $\pi_1(X)$ から復元されること (より正確には (GC2) の Isom 版の類似) を示したことである。その証明の方針は、関数体 $k(X)$ がその絶対ガロア群 $\mathrm{Gal}(k(X))$ から復元されることを示した内田興二の仕事 ([U]) をモデルにしており、大きく三つのステップに分かれる：

(i) X^* の各閉点に対する分解群の群論的特徴づけ；

(ii) 乗法群 $k(X)^\times$ の復元；

(iii) $k(X) = k(X)^\times \cup \{0\}$ の上の加法構造の復元。

ここで、§2 の通り、Xの非特異コンパクト化を X^* と記す。

ステップ (i) では、内田は Brauer 群を用いた Neukirch のアイディアを使ったが、われわれの場合、X 上の閉点に対しては、惰性群が消えて分解群が剰余体 (従って有限体) の絶対ガロア群と同型になり、H^2 が消えてしまうので、代わりに、以下説明するようなアイディアを用いる。

まず、X の上の各閉点 x は、連続群準同型

$$\alpha_x : \mathrm{Gal}(k(x)) = \pi_1(\mathrm{Spec}\,(k(x))) \to \pi_1(X)$$

であって $\mathrm{pr}_X \circ \alpha_x$ が自然な単射 $\mathrm{Gal}(k(x)) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(k)$ に一致するようなものを与え、α_x の像が x の分解群となることに注意する。特に、x が k-有理点の場合には、準同型 α_x は pr_X の section を与える。以下、簡単のため、この場合を考える。問題は、勝手に与えられた pr_X の section 準同型 α が、ある $x \in X(k)$ に対する α_x となるための条件を群論的に記述することである。($\mathrm{Gal}(k) \cong \hat{\mathbf{Z}}$ が自由 profinite 群なので、Section 予想 (GC3) の類似そのものは成立しえないことに注意。) まず最初にわかるのは、問題の条件が、

(∗) α の像 $\mathrm{Im}(\alpha)$ を含むような $\pi_1(X)$ の任意の開部分群 H に対して、対応する X の被覆 Y^H の k-有理点集合 $Y^H(k)$ は空にならない

と同値であるということである。実際、必要性は、分解群の基本的性質から直ちに従い、十分性は、空でない有限集合の射影極限は空にならないという事実により、$\mathrm{Im}(\alpha)$ に対応する X の (pro-) 被覆もまた k-有理点を持つことが従うので、その k-有理点を一つとって X における像を x とすれば、$\alpha = \alpha_x$ となることからわかる。あとは、(∗) が成立するかどうか、あるいは一般に有限体 k 上の曲線が有理点を持つかどうかを、数論的基本群から群論的に判定するという問題が残るが、これは、有理点の個数 (≥ 0) を l 進エタール・コホモロジー群 (l は k の標数と異なる素数) への Frobenius 元の作用で記述する Lefschetz 跡公式によって解決される。無限遠点 $x \in \Sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} X^* - X$ に対しては、惰性群が消えないので、分解群の中への section 準同型 α_x は一意には決まらず、また、α_x の像は分解群の真の部分群になってしまう。しかし、この場合にも、

上の議論を若干修正して適用すると、各 $x \in \Sigma$ に対して無限個の (おこりうる全ての) α_x が群論的に復元されるので、それらの像で生成される $\pi_1(X)$ の部分群として、 x の分解群が復元される。

ステップ (ii) は [U] とほぼ同様で、関数体 $k(X)$ の類体論の相互律を使う。類体論は、もともと乗法群によってガロア群のアーベル化を記述するものだが、逆にこれをガロア群の中に乗法群の情報が入っていると見るのである。ステップ (i) で X^* の各閉点 x に対する分解群が復元できたので、局所類体論により、そのアーベル化の「Weil 群部分」として、$x \in X$ ならば $\widehat{K}_x^\times/\widehat{O}_x^\times$ ($\cong \mathbf{Z}$)、$x \in \Sigma$ ならば $\widehat{K}_x^\times$ が、自然な射 $\widehat{K}_x^\times/\widehat{O}_x^\times \to \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ ないし $\widehat{K}_x^\times \to \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ とともに復元されたことになる。(ここで、$\widehat{O}_x$ は局所環 $\mathcal{O}_{X^*,x}$ の完備化、$\widehat{K}_x$ はその商体を表す。) そこで、Artin 写像

$$\prod_{x\in X}{}' \widehat{K}_x^\times/\widehat{O}_x^\times \times \prod_{x\in\Sigma} \widehat{K}_x^\times \longrightarrow \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$$

もまた $\pi_1(X)$ のみから群論的に復元され、この核として乗法群 $k(X)^\times$ が復元される。(ここで、X が affine であることを初めて用いる。 $X = X^*$ だと主因子群 $k(X)^\times/k^\times$ しか復元できない。)

ステップ (iii) は、技術的にはもっとも難しいステップである。まず、ステップ (ii) で、乗法群だけではなく、X^* の各閉点 x に付随する離散付値 $\mathrm{ord}_x : k(X)^\times \to \mathbf{Z}$ や、$x \in \Sigma$ ならば更に reduction 写像 $\mathrm{Ker}(\mathrm{ord}_x) = \mathcal{O}_{X^*,x}^\times \to k(x)^\times$ (の核) が復元されることに注意する。さて、[U] においては、基礎体 k (あるいは$\bar{k}$) の加法構造をまず復元し、次に、(“$\Sigma = X^*$” なので) 無限個の点に対する reduction 写像を用いて、関数体の加法を剰余体の加法から復元することができた。われわれの場合には、(Σ が有限集合のため) 最後の部分がうまくいかないので、代わりに、($X = \mathbf{P}_k^1 - \{0, 1, \infty\} = \mathrm{Spec}\,(k[t, t^{-1}, (t-1)^{-1}])$ における t のような)「よい」関数 $f \in k(X)$ を「たくさん」取り、有理関数体の特殊性を用いて $k(f) \subset k(X)$ の加法構造を復元し、それらを「はり合わせて」$k(X)$ の加法構造を復元する。

§3.2. 有限体から有限生成体へ

§3.1 で説明した結果および証明は、X が更に双曲的な場合には、(数論的) 基本群 $\pi_1(X)$ をその商である tame 基本群 $\pi_1^{\mathrm{tame}}(X)$ に変えても成り立つ。この節では、有理数体上有限生成な体の上の affine 双曲的曲線に対する Grothendieck 予想 (GC2) の Isom 版が、有限体上の affine 双曲的曲線の tame 基本群に関するこの結果から導けることを説明する。§1.2 で Tate 予想と Grothendieck 予想の類似を指摘したが、Tate 予想の有限体版である Tate の定理から、真に大域的な考察を含まない単純な議論によって Faltings の定理が導けるとは考えにくい。Tate 予想と Grothendieck 予想の数論的性質の一つの違いがここにある。(§4.1 も参照。)

数体の場合から有理数体上有限生成な体の場合を導くのは容易なので、以下では、K を数体とし、K 上の affine 双曲的曲線 X を扱う。問題は、K の各有限素点における X の reduction の tame 基本群を、X の数論的基本群から群論的に復元することである。ここでは、局所体上の双曲的曲線が good reduction を持つかどうかを pro-l 基本群 (l は剰余体の標数と異なる素数) への惰性群の外作用が自明かどうかで判定できるという事実 (アーベル多様体の good reduction の Serre-Tate 判定法の類似) が鍵となる。(この、双曲的曲線の good reduction の群論的判定法は、proper な場合は織田孝幸 ([O1,2]) による。)

今、v を K の有限素点とし、K_v を K の v 進完備化、O_v をその整数環、k_v をその剰余体としよう。K_v の絶対ガロア群は自然に K の絶対ガロア群の部分群とみなされ、また、X の幾何的基本群と X_{K_v} の幾何的基本群は一致するので、X_{K_v} の数論的基本群 $\pi_1(X_{K_v})$ は、(1.1)

の記号で $\mathrm{pr}_X^{-1}(\mathrm{Gal}(K_v))$ として直ちに復元される。これに上記の判定法を適用すれば、X_{K_v} が good reduction を持つかどうかが群論的に判定されるので、以下では、X_{K_v} が good reduction を持つと仮定し、X_{O_v} を X_{K_v} の O_v 上の「よい」モデル、X_{k_v} をその reduction とする。このとき、$\pi_1^{\mathrm{tame}}(X_{k_v})$ と $\pi_1(X_{O_v})$ の間に自然な同型があることが知られているので、$\pi_1^{\mathrm{tame}}(X_{k_v})$ を、$\pi_1(X_{K_v})$ の商群 $\pi_1(X_{O_v})$ と同一視することができる。この商を群論的に復元するためには、X_{K_v} の各有限次エタール (ガロア) 被覆に対し、その被覆が X_{O_v} のエタール被覆にまで延長できるかどうかを群論的に判定できればよいが、これは、双曲性により、実は、被覆の曲線もまた good reduction を持つという (一見弱い) 条件と同値になるので、先の判定法により群論的に判定できる。以上により、数体 K 上の双曲的曲線 X が素点 v で good reduction を持つ場合に、その reduction X_{k_v} の tame 基本群が、(X の数論的基本群の部分商として) 群論的に復元されたことになる。

さて、数体 K 上の二つの affine 双曲的曲線 X_1, X_2 の数論的基本群の間に、$\mathrm{Gal}(K)$ 上の同型 $\pi_1(X_1) \cong \pi_1(X_2)$ が与えられると、上の議論により、(X_1, X_2 がそこで good reduction を持つような) ほとんど全ての K の素点 v において$\pi_1^{\mathrm{tame}}((X_1)_{k_v}) \cong \pi_1^{\mathrm{tame}}((X_2)_{k_v})$ が誘導され、従って有限体上の affine 双曲的曲線の tame 基本群に関する上記の結果により、同型 $(X_1)_{k_v} \cong (X_2)_{k_v}$ が導かれる。ところが今、曲線の双曲性 (による Isom スキームの有限性) から

$$\mathrm{Isom}(X_1, X_2) \cong \mathrm{Isom}((X_1)_{k_v}, (X_2)_{k_v})$$

がほとんど全ての v に対して成り立つので、$X_1 \cong X_2$ が従う。こうして、有限体上の affine 双曲的曲線の tame 基本群に関する上記の結果から数体上の affine 双曲的曲線に対する (GC2) の Isom 版を導く証明が完結する。

なお、[M1] では、有限体上の affine 双曲的曲線の tame 基本群に関する上記の結果から、数体上の proper な双曲的曲線に対する (GC2) の Isom 版を導いている。ここで、二つの結果を結ぶ鍵は、有限体上の (滑らかでない) 安定曲線の「log 基本群」 に対する (GC2) の Isom 版の類似である。

§3.3. 正標数代数曲線の幾何的基本群

標数 0 の場合、曲線の幾何的基本群の同型類は、種数 g と無限遠点の数 n のみで決まるが、正標数の場合はそうではない。実際、[T2] では、$\overline{\mathbf{F}}_p$ 上の種数 0 の曲線のスキームとしての同型類が、その基本群によって完全に決定されることが証明されている。このような結果が、正標数代数閉体上の (双曲的) 代数曲線に対して一般に成り立つのかどうか、あるいは tame 基本群についても類似の結果が成り立つのかどうか、興味が持たれる。

§4. 局所体版に至る経緯

§4.1. 大域体と局所体

§1 では Grothendieck 予想を、有理数体上有限生成な体、即ち素点を豊富に持つような「大域的な体」上の対象に関するものとして紹介したが、望月の一連の論文 ([M1-4]) は、この予想を大域体よりもむしろ本質的に局所体上の p 進解析的現象として捉える、という新しい視点を導入した。この視点を基に得られた局所体版の Grothendieck 予想 (§5.1) は、有理数体上有限生成な体上に定式化されていた元の予想 (GC2) を含む、より一般的な結果となっているが、この新しい視点や結果の説明に入る前に、まず望月以前の段階で、基礎体に大域的な体をとることが自然と思われていた背景を検証してみよう。

(A) アーベル多様体の Tate 予想：§1 でも触れたように、Grothendieck が遠アーベル予想を定式化するにあたって指摘したことの一つとして、Faltings ([F1]) によって証明された Tate 予想との類似が有ったが、Faltings のその証明では、数体上の height の理論や、アーベル多様体の間の同種の際に生じる、有限素点による寄与と無限素点による寄与がちょうど相性良く消去しあっているという事実など、本質的に大域的な状況が有効に使われている。一方で数体 (や有限体) と違って、$\mathbf{Q}_p$のような局所体の上では、Tate 予想はただ成立しないのみならず、同型が予想される二つの加群の差が場合によっては非常に大きくなってしまう。従って、

「Grothendieck 予想=Tate 予想の双曲的曲線版」

という視点に立てば、(GC2) のような予想の成立をまず大域体上でのみ考察しようとする方向が自然といえよう。

(B) Diophantus 幾何への応用：遠アーベル哲学の揺籃期に立ち会った数学者の間では、Grothendieck 予想は、Diophantus 幾何、即ち**大域的**な体上の多様体の有理点の研究への新しいアプローチとして認識されていたようである。そのアプローチを代表するものとして、次のような議論がある。ある代数多様体が有限個の有理点しか持たないことを証明する方法として、もし仮に無限個有ったとしたら、その「極限」として発生する有理点が様々な「良過ぎる」性質を持たざるを得ないことから矛盾を導きたいとしよう。ただし、その議論を実行するためには、「極限」が存在しないといけない。ところが、数体のような体は如何なる (非自明な) 位相に関しても完備にはならないので、そのような極限の存在は決して直ちには分からない。一方で、(式 (1.2) のような) ガロア表現はある意味では「解析的」なものなので、そのようなガロア表現の列に対して、極限を持つ部分列が必ず存在することは比較的容易に証明できる。そこで、Section 予想 (GC3) が主張しているように、 有理点と (ある条件を満たす) ガロア表現が実は同値な対象である、ということが分かれば、ガロア表現の列の極限の存在からそれに対応する有理点の列の極限の存在が導かれることになる。上述のような筋道の議論をより精密化すれば、例えば、高種数の代数曲線に対する「Mordell 予想[14)]」の別証明が Section 予想 (GC3) から導ける可能性がある。 このような本質的に大域的な応用を念頭に置いてみると、Grothendieck 予想を大域体上でのみ考察しようとするのがやはり自然な流れといえよう。

このような状況の中で、「大域体から p 進体へ」という発想の転換が望月の仕事によってもたらされた。そのきっかけとなった観点について、以下で解説してみることにする。

§4.2. 双曲型リーマン面の一意化理論との類似

Grothendieck 予想の主旨は、一言で言えば、双曲的曲線に付随する外ガロア表現 (1.2)、即ち

曲線の幾何的基本群＋それに入る自然な「数論的付加構造」

から曲線自身を復元できるであろうというものである。ところが、体の大域性を犠牲にし、「数論的付加構造」という表現を広義に解釈すれば、これに類似する現象が既に十九世紀中に知られていたことに気付く。その現象とは、双曲型リーマン面の一意化理論のことである。

複素数体 $\mathbf{C}$ 上の双曲的曲線 Xが与えられたら、Xから双曲型リーマン面 $\mathcal{X}$ が定まり、その$\mathcal{X}$の普遍被覆$\tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ にもリーマン面の構造が自然に入る。ところが、リーマン面の一意化定理から、$\tilde{\mathcal{X}}$が、上半平面 $\mathfrak{H} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ に正則に同型になることが分かる。従って、

$\mathrm{Aut}(\tilde{\mathcal{X}}) \cong \mathrm{Aut}(\mathfrak{H}) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\{\pm 1\}$ を使うと、$\mathcal{X}$の (普通の位相幾何学的な) 基本群$\pi_1(\mathcal{X})$ の $\tilde{\mathcal{X}}$ への作用から

$$\rho_{\mathcal{X}} : \pi_1(\mathcal{X}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\{\pm 1\} \tag{4.1}$$

という ($\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})/\{\pm 1\}$ による共役を除いて) 標準的な表現が決まる。逆に、$\rho_{\mathcal{X}}$が与えられれば、$\pi_1(\mathcal{X})$ の上半平面 $\mathfrak{H}$ への作用が定まり、$\mathfrak{H}$ をその作用で割ることによって、リーマン面 $\mathcal{X}$、ひいては元の代数曲線の Xまで、いとも造作なく復元される。望月は複素解析の世界における以上の状況に着目し、更に (1.2) のρ_Xと (4.1) の$\rho_{\mathcal{X}}$が、いずれも「曲線の幾何的基本群＋それに入る自然な数論的付加構造」というパターンに該当するとの観察に触発され、

表現 $\rho_{\mathcal{X}}$ から (かくも直接かつ自然に) X を (再) 構成できる
という現象の p 進版はないか？

と設問するに至った。実際、以下 (§5) で紹介する Grothendieck 予想の p 進版 (定理 5.1) は、この問いに対して一種の肯定的な解答を提示しているものと見ることが出来る[15)]。

幾何的基本群$\pi_1(\mathcal{X})$ の $\mathfrak{H}$ への作用から代数曲線 Xを具体的に構成するためには、古典的によく用いられる手法として、$\pi_1(\mathcal{X})$ の作用の下で不変な $\mathfrak{H}$ 上の微分形式を作るというものがある。そのような微分形式を充分に沢山作れれば、上半平面 $\mathfrak{H}$ から、何らかの射影空間 $\mathbf{P}_{\mathcal{X}}$への射

$$\phi : \mathfrak{H} \to \mathbf{P}_{\mathcal{X}}$$

が定義され、その射の像が、一般論から代数多様体になることはすぐ分かるのだが、この場合、(Xに対して、ある弱い技術的な条件を課せば) X自身になることが従う。この論法は志村多様体を対称空間の商として構成する際に、その商が代数多様体になることを証明するのに使われるのと同様なものである。少し整理すれば、この手の議論の要点は、ϕを定義するのに使う微分形式は勿論最終的には X上代数的なものになるのだが、構成の段階においては、$\mathfrak{H}$ 上解析的なものでしかないということである。この 「代数的な微分形式の解析的な表示を扱う」という観点は以下で紹介する定理 5.1 の証明においても重要な役割を果たしている。

§4.3. p 進 Hodge 理論との関係

さて、定理 5.1 を証明するにあたって、前節で紹介した複素数体上の理論との類似は一つの手掛かりにはなるが、その類似を p 進の世界において実際に実現するためには高度な技術が必要になる。その技術を与えてくれているものは Faltings の p 進 Hodge 理論 ([F2]) である。「p 進 Hodge 理論」と呼ばれるものには、１９６０年代半ばの Tate の先駆的な仕事に遡る長い歴史が有るが、ここで重要なことは、その理論と Grothendieck 予想との深い類似性である。p 進 Hodge 理論の主なテーマは、p 進体 (例えば、$\mathbf{Q}_p$の有限次拡大体) 上の多様体の (ガロア作用付きの) エタール・コホモロジーと、ド・ラーム・コホモロジーとの間のいわゆる比較定理である。即ち、この二種類のコホモロジー不変量を、互いに変換しあうような「謎の関手」(mysterious functor) が存在するであろう、という感覚ないし予想が p 進 Hodge 理論の原点である。ここで、ド・ラーム・コホモロジーは X上の多項式関数やその関数の微分の性質を旨く一つの複合体にまとめることによって得られる不変量であるが、(GC2) の左辺に出てくる代数多様体の間の射といったものも同じ代数幾何 (＝多項式) の世界の住人である。一方で (GC2) の右辺に出てくる外ガロア

作用付きの基本群は、アーベル・非アーベルの差こそあれ、エタール・コホモロジーと同じく、問題の多様体 Xのエタール・サイトの重要かつ自然な不変量である。このように考えてみると、mysterious functor 予想にしても、(GC2) に代表される遠アーベル予想[16) にしても、いずれも

「代数幾何的構造 $\Longleftrightarrow$ エタール位相＋ガロア作用」

という標語に則った「比較定理」の成立をうたっているものと見ることが出来よう。ただし、p 進 Hodge 理論と Grothendieck 予想の間にこのような「圏論的類似性」は有っても、アーベルと非アーベルの差には非自明なものが有り、その差を埋めることが、定理 5.1 を証明する上では大きな技術的課題となった。

§5. 局所体上の Grothendieck 予想

§5.1. 主定理の紹介

以下では、素数 p を固定し、$\mathbf{Q}_p$の有限生成拡大体の部分体として実現可能な体を「劣 p 進体」(sub-p-adic field) と呼ぶことにする。劣 p 進体の代表的な例として、$\mathbf{Q}$ 又は $\mathbf{Q}_p$の有限生成な拡大体の他に、正整数 Nに対して有理数体 $\mathbf{Q}$ の全ての N次代数拡大体を合成することによって得られる ($\mathbf{Q}$ の無限次代数拡大) 体等が挙げられる。望月 ([M3]) の主な結果は次の定理である。

定理 5.1. 劣 p 進体 K上の任意の滑らかな代数多様体 Sと双曲的曲線 Xに対して、

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{dom}}(S,X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K)}^{\mathrm{open}}(\pi_1(S),\pi_1(X))\\ &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K)}^{\mathrm{open}}(\pi_1^{(p)}(S),\pi_1^{(p)}(X))\end{aligned}$$

という自然な写像たちは全単射になる。ただし、ここで、$\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{dom}}$は「支配的な K上の射たち全体」、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K)}^{\mathrm{open}}$は「$\mathrm{Gal}(K)$ への射影と両立する開準同型の (右からの$\pi_1(X_{\overline{K}})$ の共役作用に関する) 同値類たち全体」を意味し、また、$\pi_1^{(p)}(V)$ は$\pi_1(V)$ の自然な pro-p 対応物 ($\pi_1(V)$ の $\mathrm{Ker}(\pi_1(V_{\overline{K}}) \to \pi_1^{(p)}(V_{\overline{K}}))$ による商群) を表すとする。

この定理は予想 (GC2) を強い形で解決しているものである。§4.2 で紹介した一意化理論との類似で言えば、左辺が Xの S値有理点、即ち代数曲線 Xの「物理的な実体」であるのに対して、右辺が数論的付加構造付きの幾何的基本群から直接生じる「解析的な点」である。つまり、リーマン面の一意化理論と同様に、定理 5.1 は双曲的代数曲線の物理的な実体と、その数論的付加構造付きの幾何的基本群から直接生じる解析的な幾何的対象の同値性を訴えているわけである。

尚、定理 5.1 の若干の一般化 (= [M3] の定理 A) の系として次の Grothendieck 予想の双有理版が有る。

系 5.2. 劣 p 進体 Kを定数体とする任意次元の正則な関数体 L と Mに対して、

$$\mathrm{Hom}_K(M,L) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K)}^{\mathrm{open}}(\mathrm{Gal}(L),\mathrm{Gal}(M))$$

という自然な写像は全単射になる。ただし、ここで、Hom_Kは「K上の環準同型たち全体」、$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K)}^{\mathrm{open}}$は「$\mathrm{Gal}(K)$ への射影と両立する開準同型の (右からの $\mathrm{Gal}(M \otimes_K \overline{K})$ の共役作用に関する) 同値類たち全体」を意味するとする。

基礎体 Kが有理数体上有限生成な体のとき、この系の Isom 版を F.Pop が [M3] 以前に全く違う方法によって証明している ([P2])。

注。(i) 定理 5.1 は体 K上の多様体や双曲的曲線に関するものだが、base として劣 p 進体の代わりに劣 p 進体上滑らかな代数多様体 Bを取り、Sと Xがそれぞれ B上の多様体、双曲的曲線の滑らかな族となることを仮定すれば、定理 5.1 と同様な定理が成り立つ。実際、そのような結果は (B の関数体が再び劣 p 進体になることに注意すれば) 定理 5.1 から直ちに従うのである。

(ii) 定理 5.1 のもう一つの帰結として、双曲的曲線上の smooth な双曲的曲線族の全空間として得られるような代数曲面に関する (GC2) の Isom 版が導ける。詳しくは [M4] を参照のこと。

§5.2. 定理 5.1 の証明の方針

体 Kが $\mathbf{Q}_p$の有限次拡大になるというもっとも本質的な場合に制限して話を進めることにする。 更に、簡単のために、X(および S) が proper かつ non-hyperelliptic な双曲的曲線であるとする。実際、これらの諸々の条件は証明の本質には一向に触れないので、一般の場合はこれらの条件を仮定した場合に直ちに帰着されるのである。最後に、定理 5.1 では、三つの「Hom」が出てくるが、(もっとも本質的なものである) 一個目と三個目の Hom の間の写像に集中することにする。問題は如何にして$\pi_1^{(p)}(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ から Xを復元するかということである。

まず、$T \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi_1^{(p)}(X_{\overline{K}})^{\mathrm{ab}}$とする。従って、$X$ が種数 g の曲線だとすると、T は $\mathbf{Z}_p$ 上の階数 $2g$ の自由加群となり、$\mathrm{Gal}(K)$-加群としての自然な構造も入る。ところが、「p 進 Hodge 理論」の、Tate にまで遡るもっとも古い部分の帰結として、$\overline{K}$の p 進完備化を $\mathbf{C}_p$で表すとすると、

$$(T \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{C}_p)^{\mathrm{Gal}(K)} \cong D_X \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^0(X, \omega_{X/K})$$

という自然な同型が成り立つ。ここで、左辺は、括弧内の加群の $\mathrm{Gal}(K)$-不変部分で、右辺は、X上いたるところ正則な微分全体からなる K 上の g次元ベクトル空間である。次に、D_Xに対応する射影空間を $\mathbf{P}_X$で表すとすると、Xが non-hyperelliptic であるという仮定から、Xが $\mathbf{P}_X$の中に標準的に埋め込まれることが、初等的代数幾何によりすぐ分かる。つまり、X の標準的な「入れもの」となる $\mathbf{P}_X$ を ρ_Xから完全に「群論的に」復元することに成功している。従って問題は如何にして $\mathbf{P}_X$の或る特別な部分多様体 (つまり、X) を群論的に復元するか、ということになる。

ここで、§4.2 で登場した解析的な射$\phi : \mathfrak{H} \to \mathbf{P}_{\mathcal{X}}$を思い出して頂きたい。そこで詳述した様に、この射は代数的な微分形式を解析的な対象として構成することによって定義されるものである。これをヒントに、当の p 進的な設定で (或る意味で) 類似的な構成を行いたいのだが、そこでポイントとなるのは、$\mathfrak{H}$ に取って代わるものは何か、ということである。[M2] や [M3] の証明では、その役目を演じてくれるものは、Xの関数体を或る「よい」性質を持った p 進付値で完備化し、その完備化の最大 tame 拡大を取り、更にその最大 tame 拡大を p 進完備化することによって得られる体である。この体を以下では L と書くことにする17)。この体 L は、$\mathbf{Q}_p$の有限次拡大と同様、完備な p 進付値の入った付値体ではあるが、$\mathbf{Q}_p$の有限次拡大と違って、「幾何的な次元」を一個含有しているものである。例えば、そのことの現れの一つとして、L の剰余体は有限体上の一変数関数体の最大分離拡大となる。そして、L のもう一つの重要な性質として、定義から直ちに分かるように、自然な射

$$\xi : \mathrm{Spec}(L) \to X$$

が存在する。更にもう一つの注目すべき性質として、L という体の同型類は X のモジュライには依存しない。この性質には、$\mathfrak{H}$ のリーマン面としての同型類が $\mathcal{X}$ のモジュライに依存しないという事実を連想させるものがある。

L の幾何的な次元の存在が保証してくれることの一つとして、X 上の零でない微分を (ξ でもって) L に引き戻すことによって得られる $\mathrm{Spec}(L)$ 上の微分は必ず零でないものになる。従って、X 上の微分を $\mathrm{Spec}(L)$ に引き戻すという操作は忠実な操作であり、その引き戻した微分を、元の微分の「解析的な表示」と見ることが出来る。複素解析的な場合との類似で言えば、この操作はコンパクトなリーマン面 $\mathcal{X}$ 上の微分を上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の微分に引き戻すという操作に対応している。

さて、$\mathbf{P}_X$ の部分多様体としての X の群論的復元の問題に戻りたいが、Faltings の p 進 Hodge 理論の帰結の一つとして、(或る弱い群論的な条件を満たす) 任意の連続な準同型 $\alpha : \mathrm{Gal}(L) \to \pi_1^{(p)}(X)$ に対して、K 上の射

$$\phi_\alpha : \mathrm{Spec}(L) \to \mathbf{P}_X$$

が定義される。つまり、「解析的な L-有理点」に対して、§4.2 の複素解析の話に出てきた $\phi : \mathfrak{H} \to \mathbf{P}_{\mathcal{X}}$ という射に類似的な、p 進解析的な射 ϕ_α が定まる。問題は、ϕ_α の像がどうなるかということである。例えば、α が ξ のような「幾何的な」L-有理点 (つまり、$X(L)$ の元) から生じる[18] 場合には、ϕ_α のスキーム論的な像の閉包が X とぴったり一致する。従って、

「α が幾何的に生じる」という条件を、X に付随する様々な対象のうち
$\pi_1^{(p)}(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ だけしか表舞台に出てこないような表現に書き直す

ことさえ出来れば、証明は完成する。

そこで、玉川の証明[19] にヒントを得た次の論法が有効になる。準同型 α は、X の基礎体を K から L に base-change することによって得られる曲線 X_L の数論的基本群 $\pi_1^{(p)}(X_L) \to \mathrm{Gal}(L)$ の section $\alpha_L : \mathrm{Gal}(L) \to \pi_1^{(p)}(X_L)$ を定義している。その section 準同型 α_L の $\pi_1^{(p)}(X_L)$ の中での像 $\mathrm{Im}(\alpha_L)$ は、 $\mathrm{Gal}(L)$ に同型な、$\pi_1^{(p)}(X_L)$ の閉部分群になるが、その部分群を含む各開部分群 $H \subseteq \pi_1^{(p)}(X_L)$ に対して、$Y^H \to X_L$ という有限次エタール被覆が定まる。ここで、Y^H は L 上幾何的に連結な双曲的代数曲線になるが、注目すべきことは、このように生じる被覆たち $\{Y^H \to X_L\}$ 全体からなる「被覆の族」が α に依存しているということである。従って、準同型 α から引き起こされる section 準同型 α_L に対する条件として、次のものが定式化できる：

$$(*) \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Im}(\alpha_L) \text{ を含む } \pi_1^{(p)}(X_L) \text{ の各開部分群 } H \text{ に対して、} \\ Y^H \text{ の } L\text{-有理点の集合 } Y^H(L) \text{ は空にならない。} \end{array}$$

仮にこの条件が成立することが言えたとしよう。そうすると、開部分群 H を適当に走らせたとき、$Y^H(L) \neq \emptyset$ なので、$Y^H(L)$ の像として、$X_L(L)$ に様々な点たちが落ちてくる。ところが、[F2] の mod p^N 版を適用することによって、このように生じる $X_L(L)$ の各点に対して、先程の写像 ϕ_α の mod p^N 版を構成でき、その写像たちを用いることによってこの $X_L(L)$ の点たちが、或る特定の点 $x_\infty \in X_L(L)$ に収束することが証明できる。しかも、この点 x_∞ から生じる準同型 $\mathrm{Gal}(L) \to \pi_1^{(p)}(X)$ が元の準同型 α と必ず一致することは、この構成から直ちに従う。つまり、α の幾何性が言えたことになる。従って、少し整理すると、α に対する条件 $(*)$ が純に「群論的」であることさえ言えれば、証明は終わる。

問題は要するに Y^H の L-有理点の存在を「群論的」に判定できるかどうかだが、この問題は、玉川が扱った有限体の場合のように、有理点の個数の勘定等による直接的なアプローチには馴染まず、解決には多少間接的な議論を必要とするものである。即ち、L 上有理な点の代わりに、L 上有理な (p と素な次数の) **line bundle** の存在を考えるのである。その理由として、line bundle の方は、その Chern 類をとることによって、曲線 Y^H のエタール・コホモロジー類として見ることが出来、しかも双曲的曲線のエタール・コホモロジーはその数論的基本群の群コホモロジーと自然に同型になるので完全に「群論的」な対象となる。すると、コホモロジー群の中で、p と素な次数の line bundle の Chern 類として生じる類たちの群論的特徴づけが問題になるが、この問題は [BK] の p 進 exponential map の理論を適用することによって充分に対処可能な問題に帰着される[20)]。つまり、Y^H 上の、 L 上有理な点と違って、L 上有理な (p と素な次数の) **line bundle** の存在は、比較的直接的な群論的判定法を許すわけである。ところが、初等的代数幾何からすぐ分かるように、Y^H 上で p と素な次数の L 上有理な line bundle の存在が言えれば、p と素な次数の L-有理な **ample** な line bundle の存在が言え、その line bundle を effective な因子として書くことによって、Y^H が、p と素な次数の L の拡大体の上で有理点を持つことが分かる。しかし、そのような拡大体が必ず L の tame な拡大になることと、L がその定義より非自明な tame 拡大を持たないことから、Y^H が既に L 上の有理点を持っていることが帰結される。つまり、以上の条件を満たす line bundle の存在判定法は自動的に L-有理点の存在判定法にもなるということである。従って、この判定法の確立によって、定理 5.1 の証明は首尾良く完結を見ることとなる。

注

1) 有限群の射影極限として表せる位相群を profinite 群 (副有限群) という。コンパクトな完全不連結ハウスドルフ位相群といっても同値。

2) profinite 群においては開部分群であることと指数有限な閉部分群であることは同値。

3) 最近の玉川の研究では、正標数の場合には、変形に本質的に依存する情報が幾何的基本群の中にも含まれていることが解明されつつある。[H] および §3.3 を参照のこと。

4) Grothendieck は双曲的曲線のほか、それらの反復的 smooth fibration として表せる空間やモジュライ空間などを遠アーベル多様体の候補として示唆している。最近の研究では、遠アーベル的となるための必要条件として、幾何的基本群が '行列群的' というより '自由群的' なものであることなどが挙げられている。[IN] 参照。

5) 例えば、虚数乗法を持たない楕円曲線では Faltings の結果を組み合わせて 1 個にする議論も可能である。[N6] 5.4 参照。

6) 基礎体 K に 1 の巾根を全て添加した体を K_∞ と書くとき、X の K-有理点に由来するものは $\alpha(\mathrm{Gal}(K_\infty))$ の $\pi_1(X_{\overline{K}})$ への共役作用が非自明な固定点を持たないものとして特徴づけられることも予想されている。

7) これより、 Grothendieck は X を変数的に考えて遠アーベル多様体 Y の X-有理点の集合 $Y(X) = \mathrm{Hom}(X, Y)$ を基本群により復元するという圏論的理想を思い描いていたと考えられる。この理想を初めて (部分的に) 実現し得たのは望月 ([M3]) である。§5 参照。

8) 相異なる有理点に対しては共役でない section 準同型が対応する、ということは、Mordell-Weil の定理の応用として Grothendieck ([G3]) により示されている。このことの応用として、複素双曲幾何学における「砂田予想」の代数幾何的類似をある種の双曲多様体について示すことが出来る ([N5], [N7]2.2 参照)。なお、望月は、定理 5.1 から、「相異なる有理点に対応する section 準同型が共役にはならない」という事実の pro-p 版を導いている ([M3], Theorem C を参照)。

9) これについては F.Pop ([P1,2])、望月 (§5 参照) による貢献がある。なお、Pop の研究は、その手法も含めて、１９６０年代後半の J.Neukirch ([Ne]) の独創に始まり、池田正験、岩澤健吉らの仕事を経て７０年代後半に内田興二によって完成された「代数体の絶対ガロア群からの復元」という研究の流れを汲むものである。

10) profinite 群 G の位相的な商群で有限 l 群の射影極限として書けるもののうち最大のものを G の最大 pro-l 商群という。

11) [I1] の序文に示唆されているように、伊原は１９６０年代より独自の観点から有限体上の modular 関数体に対する非アーベル類体論の建設を始め、７０年代初頭までには $\mathbf{F}_{p^2}$ 上の $\mathbf{P}^1_\lambda - \{0,1,\infty\}$ の tame 被覆のうち $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}[\frac{1}{p}])$ の (合同) 部分群で統制される族が、'supersingular な λ-素点集合の完全分解' という数論的な条件で特徴づけられることなどを示している。このような射影直線の３点分岐基本群に含まれる深い数論性の研究は、§1.1 で述べたような Grothendieck の代数幾何的なガロア理論建設の動機とは全く異質な起源を持つ、伊原独特の (非アーベル) 類体論的な観点から生まれている。なお、[2] 所収の Deligne の論文は、モチーフ哲学の流れの中でこの３点分岐基本群の「巾単代数群化」を取り上げているが、これもまた独立の観点を起源としているといえる。

12) この時期の進展については主に [I2] および [1] 所収の諸論文を参照。

13) ここではガロア群の１の巾根への作用から生じる自然な一次元 l 進表現 $\mathbf{Z}_l(1)$ を簡単に円分作用と呼び、これと cusp 点の集合における置換表現とのテンソル表現を '円分置換表現' と呼んでいる。

14) 数体上の種数 2 以上の曲線の有理点が有限個しかないという予想。Faltings によって Tate 予想と同じ論文 ([F1]) で証明された。

15) 実は、この問いに対しては、もう一つの、多少違う性質の肯定的解答も得られている (詳しくは [M5-8] を参照)。

16) 実は、mysterious functor の存在を予言したのも他でもない Grothendieck だが、二つの予想の関係については、大雑把な形の類似性はともかく、§5.2 で紹介するような証明につながる程密接なものだという認識を本人が持っていた形跡はない。そういった状況の背景については、§4.1 を参照。

17) 実は、L の定義としてこれを採用すると、以下の議論が少しは不正確になるが、余り本質的でない技術的な話を最小限にとどめるために、このようなことは御容赦頂くことにする。

18)「幾何的な有理点 $\mathrm{Spec}(L) \to X$から生じる」とはつまり、射 $\mathrm{Spec}(L) \to X$に対して、π_1 という関手を施すことによって得られる射 $\mathrm{Gal}(L) = \pi_1(\mathrm{Spec}(L)) \to \pi_1(X) \to \pi_1^{(p)}(X)$ として生じるという意味である。

19) 詳しくは、§3.1 (i) を参照。

20) 詳しくは、[M3] を参照。

文　献

[AI] G.Anderson, Y.Ihara, *Pro-l branched coverings of* $\mathbf{P}^1$ *and higher circular l-units, Part 1*, Ann. of Math. **128** (1988), 271–293; *Part 2*, Intern. J. Math. **1** (1990), 119–148.

[B] G.V.Belyi, *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Izv. Akad. Nauk. SSSR **8** (1979), 267–276 (Russian); English transl. in Math. USSR Izv. **14** (1980), no. 2, 247–256.

[BK] S.Bloch, K.Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift, Volume I, Birkhäuser, 1990, pp. 333–400.

[F1] G.Faltings, *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[F2] ———, *p-adic Hodge theory*, J. of the Amer. Math. Soc. **1** (1988), 255–299.

[SGA1] A.Grothendieck, M.Raynaud, *Revêtement Etales et Groupe Fondamental (SGA1)*, Lecture Note in Math., vol. 224, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1971.

[G1] A.Grothendieck, *La longue marche à travers de la théorie de Galois, 1981*, in preparation by J.Malgoire (first few chapters available since 1996).

[G2] ———, *Esquisse d'un Programme, 1984*, in [6] vol.1, 7–48.

[G3] ———, *Letter to G.Faltings, June 1983*, in [6] vol.1, 49–58.

[H] D.Harbater, *Fundamental groups of curves in characteristic p*, Proc. ICM, Zürich (1994), 654–666.

[I1] Y.Ihara, *Profinite braid groups, Galois representations, and complex multiplications*, Ann. of Math. **123** (1986), 43–106.

[I2] ———, *Braids, Galois groups and some arithmetic functions*, Proc. ICM, Kyoto (1990), 99–120.

[IN] Y.Ihara, H.Nakamura, *Some illustrative examples for anabelian geometry in high dimensions*, in [6] vol.1, 127–138.

[MT] M.Matsumoto, A.Tamagawa, *Mapping-class-group action versus Galois action on profinite fundamental groups*, Preprint 1997.

[M1] S.Mochizuki, *The profinite Grothendieck conjecture for hyperbolic curves over number fields*, J. Math. Sci., Univ. Tokyo **3** (1996), 571–627.

[M2] ———, *The local pro-p Grothendieck conjecture for hyperbolic curves*, RIMS Preprint 1045, Kyoto Univ. (1995).

[M3] ———, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, RIMS Preprint 1097, Kyoto Univ. (1996).

[M4] ———, *A Grothendieck conjecture-type result for certain hyperbolic surfaces*, RIMS Preprint 1104, Kyoto Univ. (1996).

[M5] ———, *A theory of ordinary p-adic curves*, Publ. of RIMS **32** (1996), 957–1151.

[M6] ———, *The generalized ordinary moduli of p-adic hyperbolic curves*, RIMS Preprint 1051, Kyoto Univ. (1995).

[M7] ———, *Combinatorialization of p-adic Teichmüller theory*, RIMS Preprint 1076, Kyoto Univ. (1996).

[M8] ———, *Correspondences on hyperbolic curves*, J. Pure Appl. Algebra (to appear).

[N1] H.Nakamura, *Rigidity of the arithmetic fundamental group of a punctured projective line*, J. reine angew. Math. **405** (1990), 117–130.

[N2] ———, *Galois rigidity of the étale fundamental groups of punctured projective lines*, J. reine angew. Math. **411** (1990), 205–216.

[N3] ———, *On galois automorphisms of the fundamental group of the projective line minus three points*, Math. Z. **206** (1991), 617–622.

[N4] ———, *Galois rigidity of pure sphere braid groups and profinite calculus*, J. Math. Sci., Univ. Tokyo **1** (1994), 71–136.

[N5] ———, *Galois rigidity of algebraic mappings into some hyperbolic varieties*, Intern. J. Math. **4** (1993), 421–438.

[N6] ———, *On exterior Galois representations associated with open elliptic curves*, J. Math. Sci., Univ. Tokyo **2** (1995), 197–231.

[N7] ———, 副有限基本群のガロア剛性, 数学 **47** (1995), 1–17; English translation to appear in *Sugaku Exposition* (AMS).

[NTa] H.Nakamura, N.Takao, *Galois rigidity of pro-l pure braid groups of algebraic curves*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[NTs] H.Nakamura, H.Tsunogai, *Some finiteness theorems on Galois centralizers in pro-l mapping class groups*, J. reine angew. Math. **441** (1993), 115–144.

[Ne] J.Neukirch, *Kennzeichnung der p-adischen und der endlichen algebraischen Zahlkörper*, Invent. math. **6** (1969), 296–314.

[O1] T.Oda, *A note on ramification of the Galois representation on the fundamental group of an algebraic curve*, J. Number Theory **34** (1990), 225–228.

[O2] ———, *A note on ramification of the Galois representation on the fundamental group of an algebraic curve, II*, J. Number Theory **53** (1995), 342–355.

[P1] F.Pop, *On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry*, Ann. of Math. **138** (1994), 145–182.

[P2] ———, *On Grothendieck's conjecture of birational anabelian geometry II*, Preprint (June 1995).

[T1] A.Tamagawa, *The Grothendieck conjecture for affine curves*, Compositio Math. **109** (1997), no. 2, 135–194.

[T2] ———, *On the fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, Preprint 1997.

[U] K.Uchida, *Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields*, Ann. of Math. **106** (1977), 589–598.

---

[1] Y.Ihara (ed.), *Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry*, Advanced Studies in Pure Math., vol. 12, Kinokuniya Co. Ltd., North-Holland, 1987.

[2] Y.Ihara, K.Ribet, J.-P.Serre (eds.), *Galois Groups over* $\mathbf{Q}$, Math. Sci. Res. Inst. Publications, vol. 16, Springer, 1989.

[3] J.-P.Serre, *Topics in Galois Theory*, Jones and Bartlett Publ., 1992.

[4] L.Schneps (ed.), *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfants*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 200, Cambridge Univ. Press, 1994.

[5] M.Fried et al. (eds.), *Recent Developments in the Inverse Galois Problem*, Contemp. Math., vol. 186, AMS, 1995.

[6] L.Schneps, P.Lochak (eds.), *Geometric Galois Actions; 1.Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme, 2.The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping Class Groups*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 242-243, Cambridge Univ. Press, 1997.