

数体と位相曲面に共通する「二次元の群論的幾何」

望月 新一（京都大学数理解析研究所）

要約

有理数体 \mathbb{Q} のような「数体」と、複数のドーナツの表面を合体させたような形をしたコンパクトな「位相曲面」は一見して全く異質な数学的対象であり、初等的な可換環論、つまり、「加減乗除」が可能な数学的対象としての構造の理論から見ても直接的に関連付けることは難しい。しかし数体の拡大体の対称性を記述する「絶対ガロア群」と、コンパクトな位相曲面の有限次の被覆の対称性を統制する「副有限基本群」を通して両者を改めて眺めてみると、「二次元的な群論的絡まり合い」という形で大変に興味深い構造的な類似性が浮かび上がってくる。本稿では様々な側面におけるこの種の類似性に焦点を当てながら、数体と位相曲面の基礎的な理論について解説する。

目次

§1. 数体の付値と拡大

§1.1. 数体の定義

§1.2. 素数等に付随する様々な距離の概念

§1.3. 拡大体とガロア群

§2. 位相曲面上の輪体と被覆

§2.1. コンパクトな位相曲面の定義と種数

§2.2. 位相曲面の基本群

§2.3. 位相曲面の被覆と被覆変換群

§3. コホモロジーによる「次元」の定義

§3.1. 位相幾何におけるコホモロジー次元

§3.2. 位相曲面のコホモロジー次元

§3.3. 数体のコホモロジー次元

§4. 数体と位相曲面の「絡まり合いの現場」：数体上の代数曲線

§4.1. 数体上の双曲的代数曲線

§4.2. 副有限基本群への絶対ガロア群の忠実な外作用

§1. 数体の付値と拡大

§1.1. 数体の定義

整数論では、

$$\begin{aligned} \text{自然数 } \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} \\ \text{整数 } \mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ \text{有理数 } \mathbb{Q} &= \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} \quad \left(\subseteq \mathbb{R} = \{a \mid a \text{ は実数} \} \right) \end{aligned}$$

のような「普通の数」の他にも、代数的数

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{Q}} &= \{x \in \mathbb{C} \mid x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0; c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Q}\} \\ &\left(\subseteq \mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \right) \end{aligned}$$

が研究の対象になる。上記の式では、実数体 \mathbb{R} や複素数体 \mathbb{C} のような「入れ物」は本当は導入する必要はなく、抽象的な形で $\overline{\mathbb{Q}}$ を定義したり、構成したりすることは可能であるが、ここでは、簡単のため、入れ物を用いることにする。視野を有理数に限定せずに代数的数まで広げる（＝広げざるを得ないとでもいうべきだろうか）ことには様々な理由や背景があるが、恐らく一番基本的な理由は、例え有理数の性質にしか興味がないという立場に立っても、その性質の中には、

代数的数全体を考察することによって初めて論じることが可能になる

ものが沢山存在することにある。こういった現象は、本稿で取り上げる予定の「群論的な」理論の中でもかなり本質的な形で現れるのである。

代数的数全体（＝ $\overline{\mathbb{Q}}$ ）だと、構造が複雑過ぎて手に負えないところがあるため、その中の「有限的な部分」を取り出して論じることが多い。このような「有限的な部分」のことを「数体」と呼ぶが、その定義を述べる前に、まず「部分体」の定義を述べる必要がある。体 $\overline{\mathbb{Q}}$ （あるいは、 \mathbb{C} や \mathbb{R} 等）の中の「部分体」とは、その体の中の部分集合 K であってかつ加減乗除で閉じているもののことをいう。「数体」

$$F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$$

とは、 $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体であってかつある有限集合 $E \subseteq F$ を含む $\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体の中では最小のものである体のことをいう。このような状況では、 F は（ \mathbb{Q} の上で） E によって生成されるといい、また E の元のことを「生成元」と呼ぶ。

数体の「具体例」は無数にあるが、例えば

$$\mathbb{Q}; \quad \mathbb{Q}(\sqrt{-1}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$$

（ただし、括弧内で列挙されている数は生成元である）はすべて数体である。一方、円周率 π を生成元とするような \mathbb{R} の部分体

$$\mathbb{Q}(\pi) \subseteq \mathbb{R}$$

は数体にはならない。なぜなら、よく知られているように π は「超越数」であるため、代数的数の定義にあらわれるような有理数係数の多項式の根にはなりえないからである。

数体の研究では、数体の様々な性質を問題にするが、恐らく最も基本的な性質の一つは、(例えば有理数体 \mathbb{Q} 上で) 「ガロア」 (Galois) であるかどうかという性質である。数体 F が (\mathbb{Q} 上) ガロアであるとは、 F の任意の元 $x \in F$ に対して、代数的数の定義にあらわれるような有理数係数の多項式 $f(T) = T^n + c_{n-1}T^{n-1} + \dots + c_1T + c_0 = 0$ として、 x を根に持つものの中で次数 n が最小になるようなもの = 「 x の \mathbb{Q} 上の最小多項式」を採ったとき、

その多項式の根のすべてが F に入る

という条件を満たすもののことをいう。実は、この $x \in F$ に対する条件は、すべての生成元に対して確認すれば十分であることは容易に証明できる。

先程の「具体例」のうち、

$$\mathbb{Q}; \quad \mathbb{Q}(\sqrt{-1}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$$

はガロアであるが、 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ はガロアではない。この事実は、 \mathbb{Q} の場合には明らかであるが、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の場合、生成元 $i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$ が満たす多項式 $f(T) = T^2 + 1$ の根の集合は $\{\pm i\}$ となるため、条件が成立することが直ちに分かる。また、数体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$ の場合、

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = e^{2\pi i/3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$$

と置くと、 $\sqrt{-3}$ が満たす多項式 $f(T) = T^2 + 3$ の根の集合は $\{\pm\sqrt{-3}\}$ であり、 $\sqrt[3]{2}$ が満たす多項式 $f(T) = T^3 - 2$ の根の集合は

$$\{\sqrt[3]{2}, \omega \cdot \sqrt[3]{2}, \omega^2 \cdot \sqrt[3]{2}\} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$$

となるため、この数体についても所望の条件が成立するのである。一方、 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ は実数体 \mathbb{R} の部分体であるため、 $f(T) = T^3 - 2$ の根の一つである $\omega \cdot \sqrt[3]{2}$ (=虚部はゼロではないため、実数にはならない!) が数体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ には含まれないことは直ちに確認できる。即ち、数体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ はガロアにはならないということである。

これまで出てきた数体の例では、複数の生成元で特定されたものもあったが、実は、任意の数体 F に対して、その中の「適切」な元 $\alpha \in F$ を選ぶと、 F は α だけで生成される、つまり

$$F = \mathbb{Q}(\alpha)$$

となることが知られている。このとき、 α の \mathbb{Q} 上の最小多項式 $f(T)$ の次数を

$$[F : \mathbb{Q}]$$

と表し、数体 F の次数と呼ぶのである。このように定義された「 $[F : \mathbb{Q}]$ 」は一見して α や $f(T)$ の選択に依存するようにも見えるが、実は依存しないことが知られている。

§1.2. 素数等に付随する様々な距離の概念

二つの有理数 $a, b \in \mathbb{Q}$ の間の「距離」を考えたとき、恐らく真っ先に読者の頭に浮かぶのは、普通の絶対値 $|\cdot|_\infty$ による距離の定義

$$|a - b|_\infty$$

ではないだろうか。しかし、整数論では、この $|\cdot|_\infty$ 以外にも、素数 p に付随する「 p 進距離」 $|\cdot|_p$ を考察することも重要である。この p 進距離の定義だが、まず $|0|_p = 0$ と定義する。有理数 $a \in \mathbb{Q}$ がゼロではないと仮定すると、適切な整数 $l, n, m \in \mathbb{Z}$ (ただし n と m は $\neq 0$ かつ p と素であると仮定する) に対して、 $a = p^l \cdot n \cdot m^{-1}$ と書けることは直ちに分かるが、そのとき、 $|a|_p$ は

$$|a|_p = |p^l \cdot n \cdot m^{-1}|_p \stackrel{\text{def}}{=} p^{-l}$$

と定義する。つまり、 l を大きな正の整数に採ったとき、 $|p^l|_p = p^{-l}$ は非常に小さくなるという、通常の $|\cdot|_\infty$ を基にした感覚からすれば、「常識外れ」な現象が起こる。この

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} p^l = 0$$

という現象の他にも、例えば、 $p = 2$ のとき、

$$-1 = \frac{1}{1-2} = \sum_{l=0}^{+\infty} 2^l = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

のように、負の整数を正の整数の無限和として表示することができる等、 p 進距離を用いた数学では通常の $|\cdot|_\infty$ の常識では考えられないような現象が多数見られるのである。

実は、上述の $|\cdot|_\infty$ と $|\cdot|_p$ のいずれも特別な場合に該当するようなもっと一般的なものとして「付値」という概念がある。ここでは、一般の付値とはどういうものかという詳しい説明はしないが、実は、

有理数体上の付値は、先程紹介した $|\cdot|_\infty$ と $|\cdot|_p$ に限る

ことが知られている。有理数体上の付値を用語で特定するときは、 $|\cdot|_\infty$ はアルキメデス付値と呼び、 $|\cdot|_p$ は非アルキメデス付値と呼ぶ。

付値という概念の一般性を活用すると、有理数体 \mathbb{Q} だけでなく、任意の数体 F に対しても「付値」を考察することが可能になる。そのような F 上の付値 v を $\mathbb{Q} \subseteq F$ に制限すると、有理数体 \mathbb{Q} 上の付値 w 、即ち (先程紹介した事実を適用すると) $|\cdot|_\infty$ か $|\cdot|_p$ が出てくる。この制限によって定まる付値 w がアルキメデス付値のとき、元の F 上の付値をアルキメデス付値と呼び、 w が非アルキメデス付値のとき、元の F 上の付値を非アルキメデス付値と呼ぶ。なお、 w を固定し、その w を発生するような v の集合を考えると、

w を発生するような F の付値 v の集合は有限であり、
しかも、その濃度は $[F : \mathbb{Q}]$ 以下である

ことが知られている。つまり、この有理数体の付値 w の、 F における「分解」の様子は、

$$\begin{array}{ccc} v & \dots & v' \\ \backslash & | & / \\ & w & \end{array}$$

のような「ツリー」(tree)を描いているということである。実は、古典的な代数的整数論の様々な深い定理 (詳しくは [NSW], Theorem 12.2.5 を参照) を適用すると、

この付値の分解の様子によって、数体 F が (殆ど) 決定されてしまう

ことが知られている。「殆ど」とは、「ある比較的珍しい例外的場合を除いて」という意味である。

先に進む前に具体例を見てみよう。数体を $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ としたとき、有理数体 \mathbb{Q} の付値 w の F における分解の様子には、次のような二種類しかなく、

$$\begin{array}{ccc} v & v' & v \\ \backslash & / & | \\ & w & w \end{array}$$

前者の「型」は、ちょうど $w = | - |_p$ で

$$p \equiv 1 \pmod{4}$$

のときに発生するのである。これは、 F の生成元 $i = \sqrt{-1}$ が根となる多項式 $f(T) = T^2 + 1$ が、 p を法として計算したとき、整数根を持つかどうかということと、ちょうど対応しているのである。例えば、 $p = 5$ を法として計算すると、 $f(T) = T^2 + 1$ は ± 2 という整数根を持つことが直ちに分かる。

本稿の大きなテーマの一つは、数体と（コンパクトな）位相曲面の類似性であるが、その類似で考えると、

数体の元は位相曲面上の関数に対応していて、
数体の付値たちはちょうど位相曲面の点に対応している

のである。つまり、数体の元が、ある付値に関して大きかったり小さかったりするという現象は、ちょうど位相曲面上の関数が、ある点に近づくにつれ、どの位の「勢い」でゼロに収束したり、あるいは無限に発散したりするか、ということと対応しているのである。このように数体を幾何的な対象として捉える（図1を参照）と、先程紹介した事実、つまり「付値の分解の様子によって、数体 F が（殆ど）決定されてしまう」という現象が、より自然な響きを帯びてくるという見方もできる。

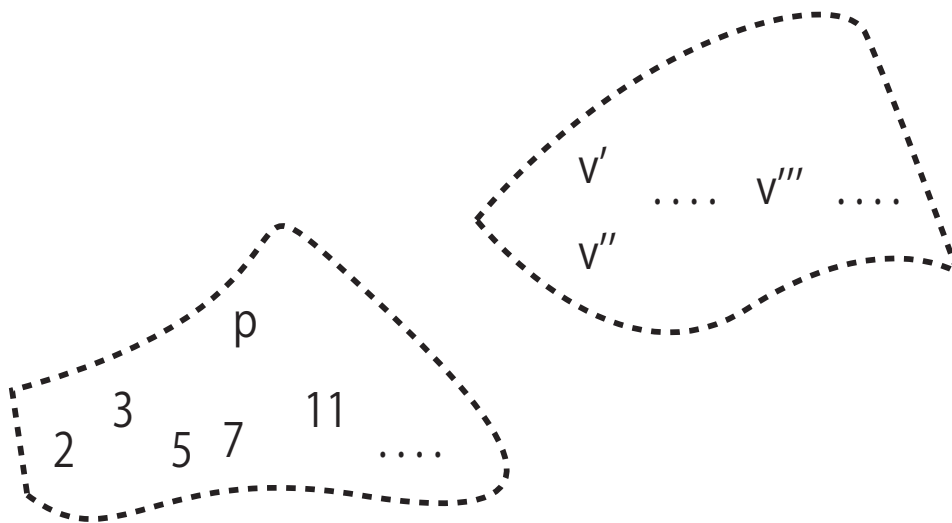


図1：付値たちを「点」と見做すことによって、数体を一種の幾何的な対象として捉える

§1.3. 拡大体とガロア群

これまで個別の数体に対して様々な概念や性質について論じてきたが、本節 (§1.3) では、包含関係

$$F \subseteq K \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$$

が成立するような二つの数体 F と K について考察したい。このような状況のとき、 K を F の拡大体と呼び、その「拡大次数」

$$[K : F] \stackrel{\text{def}}{=} [K : \mathbb{Q}] / [F : \mathbb{Q}]$$

が整数になることは簡単に証明できる。§1.1 では、個別の数体に対して「(\mathbb{Q} 上で) ガロアである」という性質について考えたが、その定義の中で「有理数係数の多項式」を「 F 係数の多項式」に置き換えることによって、「 K が F 上でガロアである」という性質を定義することができる。また、同様にして「数体 K の F 上の生成元」という概念を定義することが可能である。

以下の議論では、 K が F 上でガロアであると仮定しよう。そうすると、整数論の中でも中心的な概念の一つである「 K の F 上のガロア群」

$$\text{Gal}(K/F)$$

を定義することができる。この集合 $\text{Gal}(K/F)$ の元 σ は、加減乗除 = 「体の構造」と両立的な K から K への写像

$$\sigma : K \rightarrow K$$

で、 $F \subseteq K$ に制限すると「恒等写像」になる (=つまり、任意の $x \in F$ に対して、 $\sigma(x) = x$ が成立する) ものである。写像 $\text{Gal}(K/F) \ni \sigma : K \rightarrow K$ は、実は、

K の F 上の生成元たちの行先だけで完全に決定されてしまう

ことは簡単に証明できる。なお、このように定義した集合 $\text{Gal}(K/F)$ は、

有限集合になり、しかもその濃度はちょうど拡大次数 $[K : F]$ と一致する

ことも簡単に証明できる。名称からも推測される通り、 $\text{Gal}(K/F)$ という集合に自然な「群構造」が入る。一般に集合 G の上の「群構造」とは、結合法則を満たす「群演算」を定める写像

$$\begin{aligned} G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

で、更に、単位元 $e \in G$ の存在 (=つまり、 $g \cdot e = e \cdot g = g, \forall g \in G$) と逆元の存在 (=つまり、 $\forall g \in G, g \cdot h = h \cdot g = e$ を満たす $h \in G$ の存在) を仮定する。 $\text{Gal}(K/F)$ の場合、 $\sigma, \tau \in \text{Gal}(K/F)$ に対して、写像の合成

$$\sigma \cdot \tau : K \xrightarrow{\tau} K \xrightarrow{\sigma} K$$

によって群構造を入れるのである。

次に具体例を幾つか見てみよう。まず、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1}) = \mathbb{Q}(i)$ だが、複素共役写像を

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{Q}(i) &\rightarrow \mathbb{Q}(i) \\ i &\mapsto -i \end{aligned}$$

と表すと、(容易に確認できるように)

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}) = \{\text{id}, \sigma\}$$

(ただし、 id は恒等写像) となる。次に、 $K \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$; $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\omega)$ と置くと、 K が F 上でガロアであることは直ちに確認でき、

$$\begin{array}{ccc} \sigma: K & \rightarrow & K & & \tau: K & \rightarrow & K \\ \sqrt[3]{2} & \mapsto & \sqrt[3]{2} & & \sqrt[3]{2} & \mapsto & \omega \cdot \sqrt[3]{2} \\ \omega & \mapsto & \omega^2 & & \omega & \mapsto & \omega \end{array}$$

と定めると、

$$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \{\text{id}, \sigma, \tau, \tau \cdot \sigma, \tau^2, \tau^2 \cdot \sigma\}$$

$$\text{Gal}(K/F) = \{\text{id}, \tau, \tau^2\}$$

(ただし、 id は恒等写像) となることは簡単な計算によって確認することができる。

これまで見てきたような有限なガロア群 $\text{Gal}(K/F)$ の他にも、無限なガロア群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ を定義することも可能である。つまり、集合 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の元 σ は、加減乗除 = 「体の構造」と両立的な $\overline{\mathbb{Q}}$ から $\overline{\mathbb{Q}}$ への写像

$$\sigma: \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$$

で、 $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ に制限すると「恒等写像」になるものである。また、有限なガロア群のときと同様に、写像の合成を考えることによって、集合 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ に自然な群構造を入れることができる。このように定義すると、写像 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \ni \sigma: \overline{\mathbb{Q}} \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ を K に制限することによって、自然な準同型 (= 定義域と値域のそれぞれの群演算と両立的な写像)

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) \twoheadrightarrow \text{Gal}(K/F)$$

を定義することができる。この準同型は (「 \twoheadrightarrow 」という記号が示しているように) 全射 (= 値域のすべての元が像に入る) になるため、 $\text{Gal}(K/F)$ を、 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ の商 (quotient)、つまり、何らかの意味において $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ を「ぶつつぶす」ことによって構成されたものと同じと見ることができる。逆に、 F の (ガロア) 拡大体 K を動かすことによって、 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ を、一種の「群の極限」 = 「逆極限」

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F) = \varprojlim_K \text{Gal}(K/F)$$

とすることができる。一方、 K と F という「対」に定義が本質的に依存する有限なガロア群 $\text{Gal}(K/F)$ と違って、 $G_F \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ という群は、(事実上) 数体 F だけで定義できるものである。即ち、

G_F という群は、数体 F に付随する「不変量」

と見ることができる。この「不変量」 G_F は、その重要性から F の「絶対ガロア群」と呼ばれ、整数論では中心的な研究対象の一つとなっている。ただ、 G_F を定義するためには、特定の拡大体「 K 」を指定する必要がなくても、

概念の上において「拡大体」やその「ガロア群」が必要不可欠である

ことを忘れてはならない。最後に、これまでの極めて初等的なガロア群の話と違って（Neukirch-内田の）難しい定理（詳しくは [NSW], Theorem 12.2.1 を参照）ではあるが、実は、同型を除いて考えると、

数体 F は、その絶対ガロア群 G_F によって完全に決定されるのである。

§2. 位相曲面上の輪体と被覆

§2.1. コンパクトな位相曲面の定義と種数

本節 (§2.1) から位相曲面の幾何について考察する。まず定義から始めたいが、「位相曲面」とは、初等的な言葉でいうと、局所的に単位円盤と同型な「幾何学的対象」（＝正確にいうと、位相空間）のことである（図2を参照）。別の言い方をすると、

沢山の単位円盤のコピーを連続に貼り合わせてできた幾何学的対象である。

本稿では、直感的な言葉でいうと、基本的には無限に広がるような位相曲面ではなく、何らかの意味において「有限な＝有界な広がり」しか持たないような位相曲面を中心に話を進めたい。数学用語に翻訳すると、これは、「コンパクト」な位相曲面に話を限定するということである。「コンパクト」な位相曲面 S とは、無限な点列

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots \in S$$

が必ず（少なくとも1つの）集積点を持つような位相曲面のことである。言い換えれば、上記の点列の適切な部分列 $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots \in S$ を採れば、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$$

が t に収束ような点 $t \in S$ が存在するということである。

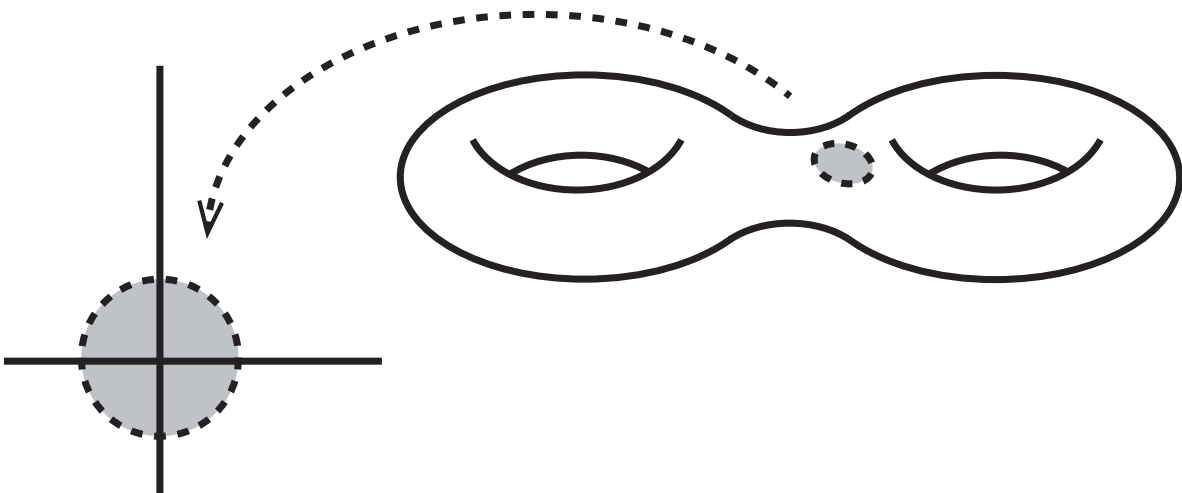


図2：単位円盤と局所的に同型な位相曲面

本稿で取り扱う位相曲面に対しては、コンパクト性の他にももう一つの技術的な条件を課したい。それは、「向き付け可能である」という条件である。「向き付け可能」(orientable)な位相曲面は、「観察者」が曲面のどの点に立っていても、その点から見ての「時計回り」(あるいは「反時計回り」)という概念を、点を連続に動かしたとき矛盾を来すことなく定義できる曲面のことである。これはやや技術的な条件だが、整数論・数論幾何関係では、少なくとも通常の設定では、自然に発生する位相曲面は必ず向き付け可能になるため、この条件については本稿ではこれ以上論じないことにする。簡単のため、以下では「位相曲面」と書いたときは、向き付け可能な位相曲面を意味するということにする。

位相幾何学のかなり古典的な定理になるが、実は、コンパクトかつ連結 (= 共通部分が空になるような二つの空でない開集合の和集合として表示することができない) な位相曲面は「種数」($\in \mathbb{N}$) と呼ばれる不変量によって完全に分類されている。つまり、同型を除いて考えると、(コンパクトかつ連結な)

位相曲面はその種数によって完全に決定される

ということである。種数 0 の (コンパクトかつ連結な) 位相曲面は (初等的幾何でお馴染みの) 球面である (図 3 を参照)。種数 $g \geq 1$ の (コンパクトかつ連結な) 位相曲面の例は次のように帰納的に構成することができる：

- (ア) 種数 $g-1$ の曲面に二つの穴を開け、
- (イ) (別の) 種数 0 の曲面に二つの穴を開け、
- (ウ) (ア) と (イ) の曲面を、それぞれの穴の淵に沿って縫い合わせる。

細かい話だが、実は「縫い合わせる」とき、それぞれの曲面の「向き付け」と両立的な形で縫合しないとイケないが、本稿ではこのような技術的な点に関する詳しい説明は省略する。「適切」な技術的な条件の下で縫合を実行すると、図 3 で示したように、種数 1 の場合にはドーナツの表面のような形をした曲面が出来上がり、種数 g の場合には g 個のドーナツの表面を数珠繋ぎに貼り合わせたような形をした曲面が出来上がる。

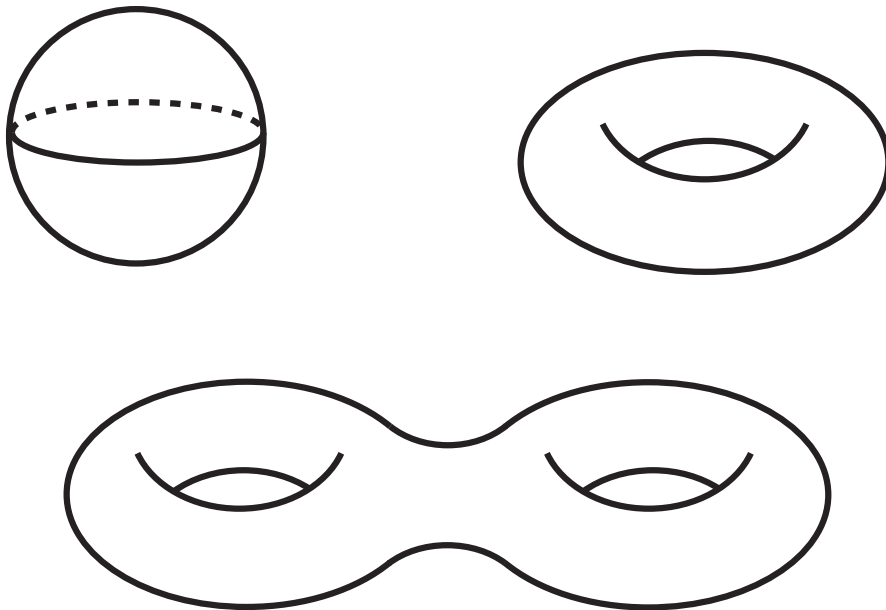


図 3 : 種数 0 (= 球面) , 1, 2 の (コンパクトで向き付け可能な) 位相曲面

§2.2. 位相曲面の基本群

位相曲面の幾何を調べる上において最も重要な道具の一つは基本群である。(コンパクトかつ連結な) 位相曲面 S の基本群を定義するためには、まず S の点 $s \in S$ を一つ選んで固定する必要がある。すると、 s を基点 (basepoint) とする S の基本群 (fundamental group)

$$\pi_1(S, s)$$

の下部集合は、始点も終点も s になるような閉路=閉道 (closed path) を、「連続な変形」 (=数学用語でいうと、ホモトピー (homotopy)) を除いて考えることによってできる同値類の集合として定義する。その下部集合の元 α, β に対して、路の合成

$$\alpha \circ \beta$$

(つまり、路 β に沿って移動してから、路 α に沿って移動することによってできる路) を対応させることによって $\pi_1(S, s)$ 上に群構造を入れる。これが基本群の (群としての) 定義である。

一般に、 G が群だとすると、 G の群構造と両立的な G から G への写像

$$\sigma: G \xrightarrow{\sim} G$$

で全単射になるもののことを群 G の自己同型 (automorphism) と呼び、 G の自己同型全体を

$$\text{Aut}(G)$$

という記号で表す。自己同型の合成を考えることによって、 $\text{Aut}(G)$ という集合にも自然な群構造が入る。群 G の元 $h \in G$ を一つ採ると、 h による「共役」 (conjugation)

$$G \ni g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1} \in G$$

によって、 $\text{Aut}(G)$ の元 $\gamma_h \in \text{Aut}(G)$ が一つ定まるわけだが、このような自己同型 γ_h として生じる $\text{Aut}(G)$ の元のことを内部自己同型と呼び、 G の内部自己同型全体を

$$\text{Inn}(G) \subseteq \text{Aut}(G)$$

という記号で表す。また、 $\sigma, \tau \in \text{Aut}(G)$ に対して、 $\sigma = \tau \cdot \gamma$ となるような内部自己同型 $\gamma \in \text{Inn}(G)$ が存在するとき、 σ と τ は、 G の同一の外部自己同型 (outer automorphism) を定めるといふ言い方をする。 G の外部自己同型全体は

$$\text{Out}(G)$$

という記号で表す。この $\text{Out}(G)$ という集合には、外部自己同型の合成により自然な群構造が入り、また任意の自己同型に対してそれによって定まる外部自己同型 (=自己同型の一種の同値類) を対応させることによって ($\text{Inn}(G)$ を「核 (kernel)」とするような) 自然な準同型

$$\text{Aut}(G) \twoheadrightarrow \text{Out}(G)$$

が定まる。

さて S の基本群の話に戻ろう。 $\pi_1(S, s)$ の定義は基点 s の選択に依存するわけだが、実は、

内部自己同型を除いて考えるようにすると、 $\pi_1(S, s)$ は基点 s の選択に依存しないことは簡単に示せる。従って、内部自己同型を無視して作業しても構わないような、多くの設定では、基点の特定に言及しなかったり、記号の上においても

$$\pi_1(S)$$

と書いたりすることがある。

最後に、 $\pi_1(S)$ という群の構造についてももう少し詳しく説明したい。定義上、 S 上の任意の閉路は（基点の問題を無視すれば） $\pi_1(S)$ の元を定めるが、自分自身と交わったりしない、「適切」な意味において「きれい」な輪体（図4を参照）を採ることによって、 $\pi_1(S)$ という群の生成元の系 (system of generators)

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g$$

（ただし、 g は S の種数を表すとす）を構成することができる。このような「きれい」な生成元の系だと、一つの（比較的簡明な）関係式

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \beta_1^{-1} \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \beta_2^{-1} \cdot \dots \cdot \alpha_g \cdot \beta_g \cdot \alpha_g^{-1} \cdot \beta_g^{-1} = 1$$

だけで $\pi_1(S)$ の群としての構造が完全に決まることが知られている。

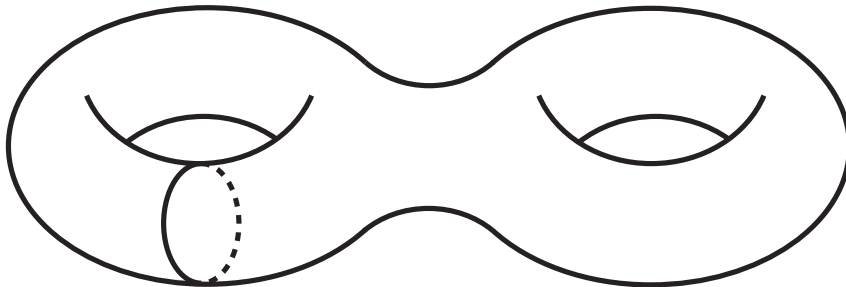


図4：位相曲面上の代表的な輪体

§2.3. 位相曲面の被覆と被覆変換群

前節 (§2.2) では、閉路による基本群の定義について解説したが、その定義だと、基本群と整数論の深い関係がどのようにして生じるか、少なくとも直接的に説明することはかなり困難である。一方、本節 (§2.3) で解説する被覆による基本群の定義を用いると、非常に透明な形で

基本群と整数論（＝具体的には、§1 で紹介したガロア群の理論）を関連付ける

ことが可能になる。

まず、被覆の定義から始めよう。 S が (コンパクトとは限らない) 連結な位相曲面だとすると、 S の被覆

$$f: T \rightarrow S$$

とは、位相曲面 T から S への連続写像で、次の (「局所自明性」の) 条件を満たすものである: S の任意の点 $s \in S$ とその点 s の十分に小さい開近傍 U に対して、 $U \subseteq S$ への制限によって得られる連続写像

$$f|_U: T|_U \rightarrow U$$

は U の (幾つかの) コピーの直和によって定まる「自明な被覆」

$$\coprod U \rightarrow U$$

と同型になる。 U のコピーの個数が有限なとき、被覆を「有限次被覆」と呼び、無限なときは、被覆を「無限次被覆」と呼ぶ。また、被覆 $T \rightarrow S$ に対して、それに付随する「被覆変換群」

$$\text{Aut}(T/S)$$

は次のように定義される: $\text{Aut}(T/S)$ の元 σ

$$\sigma: T \rightarrow T$$

は、定義域と値域のそれぞれの T の位相と両立的な全単射で、 $f = f \circ \sigma$ という条件を満たすものである。この定義は、 (§1.3 で解説した)

ガロア群の定義と形式的によく似ている

が、実際、 T が連結かつ次の条件を満たすとき、被覆 $f: T \rightarrow S$ を「ガロアな被覆」と呼ぶのである: 上述の被覆の定義に出てきた U のコピーの直和 $\coprod U$ に対して $\text{Aut}(T/S)$ を作用させたとき、コピーたちへの作用が推移的 (transitive) になる、つまり、任意の二つのコピー “ U' ” と “ U'' ” に対して、 U' を U'' に写す

$$\coprod U \supseteq U' \xrightarrow{\sim} U'' \subseteq \coprod U$$

ような $\sigma \in \text{Aut}(T/S)$ が必ず存在する。

一般の S の上では様々な連結な被覆があらわれることがあるが、その中でも特筆すべきものとして、「普遍被覆」と呼ばれる特別かつ (同型を除いて) 一意に決まる被覆がある。普遍被覆

$$\tilde{S} \rightarrow S$$

が満たす特別な性質は次の通りである: 任意の連結な被覆 $T \rightarrow S$ は、普遍被覆 $\tilde{S} \rightarrow S$ の中間被覆として生じる、つまり、 $\tilde{S} \rightarrow S$ は、

$$\tilde{S} \rightarrow T \rightarrow S$$

のような形の合成写像として表示することができる (図5を参照)。このとき、 T がガロアであると仮定すると、この中間被覆としての表示により、それぞれの被覆変換群の間に全射な準同型

$$\text{Aut}(\tilde{S}/S) \twoheadrightarrow \text{Aut}(T/S)$$

が引き起こされる。実は、内部自己同型を除いて考えるようにすると、

普遍被覆の被覆変換群 $\text{Aut}(\tilde{S}/S)$ は基本群 $\pi_1(S)$ と自然に同型になる。

この自然な同型

$$\text{Aut}(\tilde{S}/S) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S)$$

は次のように定義される（図5を参照）： $\pi_1(S)$ の元を定める S 上の閉路 α が与えられると、 α は、 \tilde{S} 上の（一般には閉じていない！）路 $\tilde{\alpha}$ に持ち上がるが、その $\tilde{\alpha}$ の始点を終点に写すような $\sigma \in \text{Aut}(\tilde{S}/S)$ （注： σ の存在は上述の推移性より直ちに従う！）は、上記の自然な同型によって α に対応している

$$\sigma \mapsto \alpha$$

のである。

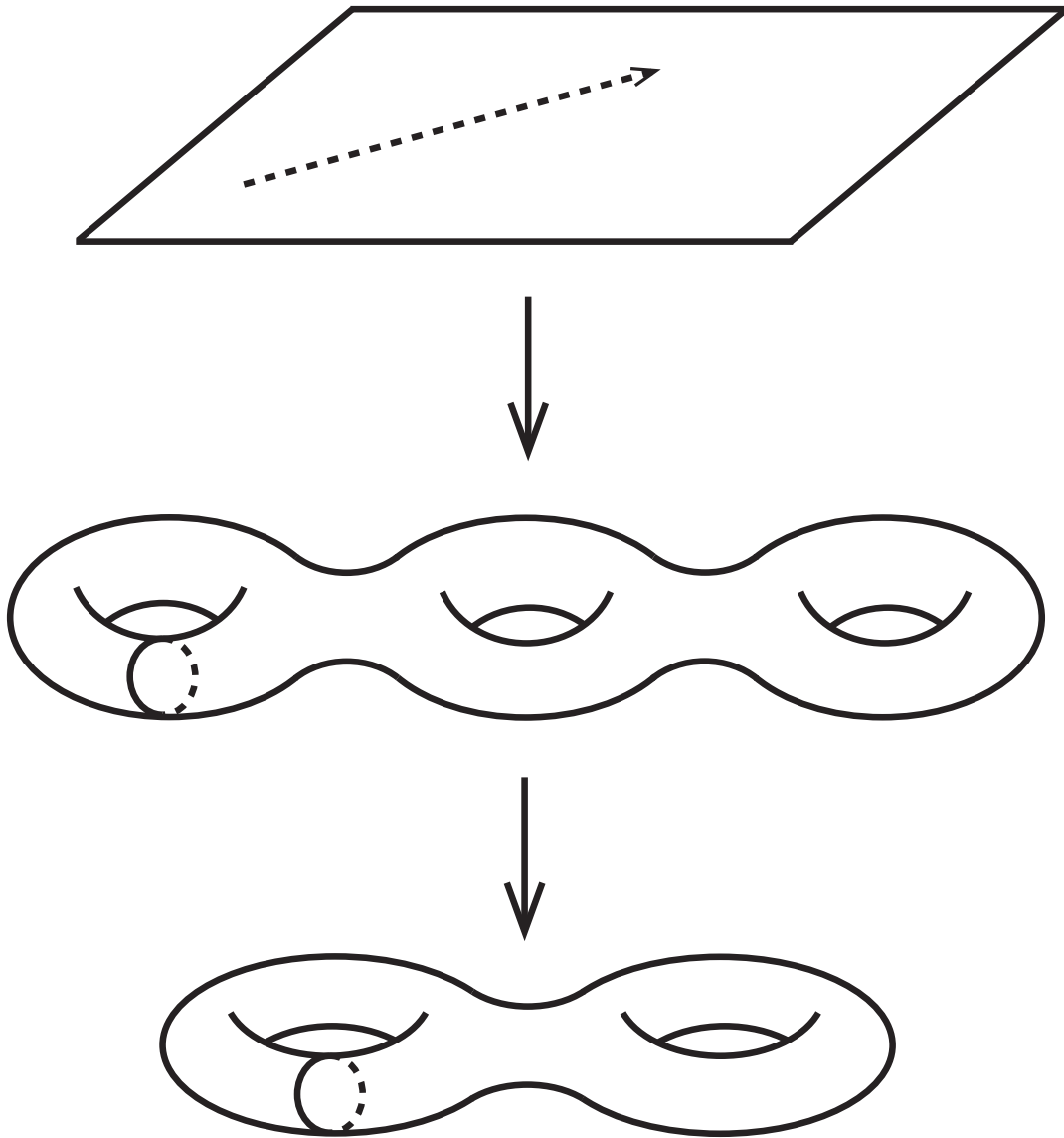


図5：位相曲面の有限次被覆とその上にある（無限次の）普遍被覆

普遍被覆 $\tilde{S} \rightarrow S$ は、一般には（例えば S が（コンパクトかつ連結な）種数 $g \geq 1$ 位相曲面のとき等）、無限次被覆になる。一方、数論幾何的な設定では、実は、有限次被覆しか扱うことができない。従って、数論幾何的な設定では、位相幾何的な設定で用いられる基本群 $\pi_1(S)$ や被覆変換群 $\text{Aut}(\tilde{S}/S)$ の代わりに、その副有限完備化と呼ばれる次のような「逆極限」（＝ §1.3 に出てきた「逆極限」の話参照！）

$$\hat{\pi}_1(S) \stackrel{\text{def}}{=} \varprojlim_{Q_{\pi_1}} Q_{\pi_1} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{Q_{\text{Aut}}} Q_{\text{Aut}}$$

（ただし、 Q_{π_1} は群 $\pi_1(S)$ の有限な商 $\pi_1(S) \rightarrow Q_{\pi_1}$ を、 Q_{Aut} は群 $\text{Aut}(\tilde{S}/S)$ の有限な商 $\text{Aut}(\tilde{S}/S) \rightarrow Q_{\text{Aut}}$ を走るとする）を用いることが多い。このように定義された $\hat{\pi}_1(S)$ は、 S の副有限基本群と呼ぶ。先程の中間被覆の話で考えると、 $\text{Aut}(\tilde{S}/S)$ の場合、有限な商 $\text{Aut}(\tilde{S}/S) \rightarrow Q_{\text{Aut}}$ はちょうど T が有限次被覆になる場合に対応している。

§3. コホモロジーによる「次元」の定義

§3.1. 位相幾何におけるコホモロジー次元

数学では、「空間の次元」という直感的な概念に対して様々な定式化の仕方があるが、位相幾何学では、コホモロジー加群による手法が最も基本的なアプローチである。一般に、（適切な技術的条件を満たす）位相空間 X と自然数 n に対して、 n 次コホモロジー加群 (n -th cohomology module)

$$H^n(X)$$

と呼ばれる加群 (module)、つまり、可換な群演算を持つ群を対応させることができる。本稿では、この $H^n(X)$ の厳密な定義の詳しい説明は省略するが、代表的な例を挙げると、 X として m 次元球面

$$\mathbb{S}^m = \{ (x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m+1}^2 = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$$

を採用すると、そのコホモロジー加群は次のようになる：

$$H^n(\mathbb{S}^m) = \mathbb{Z} \quad \forall n \in \{0, m\}$$

$$H^n(\mathbb{S}^m) = \{0\} \quad \forall n \notin \{0, m\}$$

つまり、ごく雑な言い方をすると、

n 次コホモロジー加群はちょうど空間 X の中に「 n 次元の穴」がどの位あるかを測っているものと見ることができる。このような例を踏まえて考えると、一般の（例えば、簡単のため、コンパクトかつ連結な） X の場合、その次元 d を、

$$H^d(X) \neq \{0\}; \quad H^n(X) = \{0\} \quad \forall n > d$$

を満たすような d として定義することは至って自然である。

では、§2 で考察した（コンパクトかつ連結な）種数 g 位相曲面 S の場合に先程の議論を適用するとどうなるか、考えてみたい。まず、 $g = 0$ の場合、 S は（2次元）球面になるため、先程の議論を適用すると、その「次元」は確かに（直感通りの）2になる。一方、種数 $g \geq 1$ の S だと、§2.1 で見てきたように、（複数の）球面から出発して様々な「貼り合わせ」の操作によって構成することができる。細かく計算すると、この貼り合わせの操作によって、「1次元の穴」が沢山追加されることになるが、「2次元の穴」は、球面の場合と全く変わらない。なお、 $n \geq 3$ に対して、「 n 次元の穴」を追加するような操作は全く見当たらないことに注目したい。つまり、先程紹介したコホモロジー加群による次元の定義を適用すると、任意の自然数 $g \geq 0$ に対して、

種数 g 位相曲面の次元は、2になる

ことが帰結される。

§3.2. 位相曲面のコホモロジー次元

前節 (§3.1) では、コホモロジー加群は（位相）空間 X に対して対応させられるものとして紹介したが、実は、適切な幾何的条件を満たす空間 X の場合、コホモロジー加群は X の基本群 $\pi_1(X)$ という抽象的な群のみによって定まるものとして定義することは可能である。このような定義を用いると「 n 次群コホモロジー加群」(n -th group cohomology module) $H^n(\pi_1(X))$ と呼ばれるものが出来上がり、(X が適切な幾何的条件を満たすとき)

$$H^n(\pi_1(X)) \xrightarrow{\sim} H^n(X)$$

のような形の自然な同型も定まる。前節では、通常のコホモロジー加群がどの範囲で消えるかを見ることによって、空間 X の「次元」を定義することができたが、 X が適切な幾何的条件を満たすときは、上述の議論を踏まえて考えると、

X の基本群 $\pi_1(X)$ のみによって定まる「次元」を定義することが可能

であることが分かる。

前節の議論では、 n 次コホモロジー加群 $H^n(X)$ に対して、「 n 次元の穴」による解釈について説明したが、群コホモロジーの場合、そこまで直感的かつ幾何的な解釈ができなくても、極めて雑なレベルで考察すると、

1次群コホモロジー加群 $H^1(G)$ は、群 G の生成元たちを抽出しているものと見ることができるのに対して、

2次群コホモロジー加群 $H^2(G)$ は、
その生成元たちの間に成り立つ代表的な関係式を抽出しているもの

として捉えることができる。

さて、位相曲面の話に戻ろう。実は、本稿では詳細な説明、証明等はしないが、§2 で考察した（コンパクトかつ連結な）

種数 $g \geq 1$ 位相曲面 S の場合、先程説明した群コホモロジーの理論は適用可能である。つまり、 S のコホモロジー加群や次元は、 S の基本群 $\pi_1(S)$ のみを用いて捉えることができるということである。

§2.2 では、位相曲面 S 上の代表的な輪体やそれによって定まる $\pi_1(S)$ の生成元について解説したが、そのような生成元たちは、実は

$$H^1(\pi_1(S)) \xrightarrow{\sim} H^1(S)$$

の元をも定めているのである。そのように考えると、§2.2 で取り上げた $\pi_1(S)$ の生成元たち

$$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_g, \beta_g$$

はちょうどそのまま $H^1(S)$ の生成元の族を定めていることを簡単に示すことができる。また、§2.2 で考えた生成元の間関係式

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \beta_1^{-1} \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \beta_2^{-1} \cdot \dots \cdot \alpha_g \cdot \beta_g \cdot \alpha_g^{-1} \cdot \beta_g^{-1} = 1$$

はちょうどそのまま、

$$H^2(\pi_1(S)) \xrightarrow{\sim} H^2(S) \cong \mathbb{Z}$$

の生成元を定めているのである。

一般に、(位相)空間や群のコホモロジーの理論では、「カップ積」

$$\cup: H^n(-) \times H^m(-) \rightarrow H^{n+m}(-)$$

と呼ばれる「掛け算のような」操作が定義されるが、例えば、空間のコホモロジーの場合、このカップ積は大雑把にいうと、「 n 次元の穴」と「 m 次元の穴」の共通部分に発生する幾何的な状況を勘定することによって計算されるものと見ることができる。

先程の位相曲面 S の場合、 α_1 と β_1 という代表的な輪体 (図6を参照) は、一回のみ交わり、しかもその交わり方は「きれいな十字形」 (= 数学用語でいうと「横断的な交差」、または「重複度1の交差」) によるものである。つまり、別の言い方をすると、輪体 α_1 と β_1 は絡まり合っているが、その絡まり合い方は、最も単純な種類の絡まり合い方である。このような状況を、カップ積を用いて表現すると、次のようなことが帰結できる: カップ積

$$\alpha_1 \cup \beta_1 \in H^2(S) \cong H^2(\pi_1(S))$$

はちょうど上述の関係式によって定まる $H^2(-)$ の生成元と一致するのである。つまり、カップ積 $\alpha_1 \cup \beta_1$ はちょうど上述の関係式の中の「 α_1 と β_1 が関係する部分」を抽出していると見ることができる。

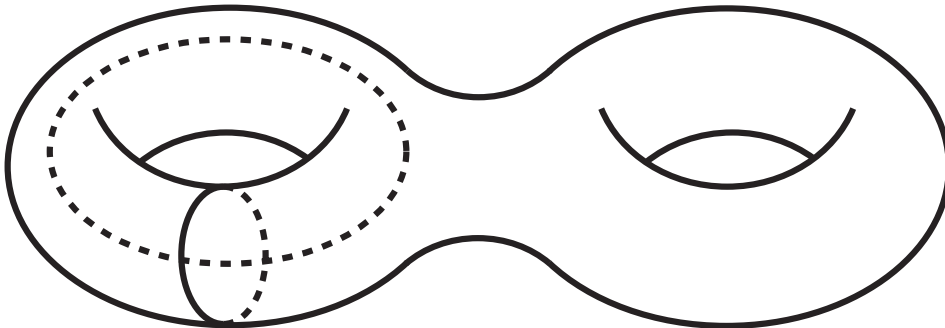


図6: 「重複度1」で絡まり合う、位相曲面上の代表的な輪体

§3.3. 数体のコホモロジー次元

群コホモロジーは、前節 (§3.2) で取り上げたような位相曲面の基本群だけでなく、§2.3 で解説したような副有限基本群や §1.3 で紹介したような数体の絶対ガロア群に対しても定義することは可能である。また、そのようにすることによって副有限基本群や数体の絶対ガロア群についても、群コホモロジーによる「次元」の定義が可能になる。位相曲面の場合、その「次元」は通常の基本群の群コホモロジーで定義しようが、副有限基本群の群コホモロジーで定義しようが、全く同じ数になる。つまり、例えば (コンパクトかつ連結な) 種数 $g \geq 1$ 位相曲面の場合、次元は 2 になる。

一方、難しい定理 (詳しくは [NSW], Proposition 8.3.17 を参照) ではあるが、 $i = \sqrt{-1}$ の特殊性の関係で素数 2 において発生するある軽微な「技術的障害」を除けば、実は、数体 F に付随する

絶対ガロア群 G_F のコホモロジー次元も 2 になる

のである。つまり、少なくとも次元という「やや粗雑な不変量」を通して見る限りにおいて、数体の絶対ガロア群と種数 $g \geq 1$ の位相曲面は類似しているということである。

一方、種数 $g \geq 1$ の位相曲面の (通常) の基本群と違って、§2.2 で紹介したような「きれいな輪体」による簡単かつ明示的な生成元の族や関係式は、数体の絶対ガロア群の場合には、残念ながら知られていない。しかし、種数 $g \geq 1$ の位相曲面の基本群との定性的な類似性 (= §3.1 の後半に出てきた「1次元の穴」や「2次元の穴」に関する議論を参照!) を示す代表的なものとしてクンマー拡大 (Kummer extension) のガロア群という簡単かつ初等的な具体例があるのでこれについて詳しく説明したい。

まず、数体 F と素数 p を固定する。また、 $f \in F$ は、 F 内に p 乗根を持たない元とする。このとき、

$$K = F(\sqrt[p]{f}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$$

のような拡大体は F のクンマー拡大と呼ぶ。一方、1 の原始 p 乗根

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\pi i/p} \in \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{C}$$

を F に添加することによって得られる拡大体

$$L = F(\omega) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$$

は F の円分拡大 (cyclotomic extension) と呼ぶ。円分拡大は必ずガロアになるが、一般にはクンマー拡大はガロア拡大にならないこともある。しかし、円分拡大に上がってから定義されたクンマー拡大、つまり

$$M = F(\omega, \sqrt[p]{f}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$$

のような拡大体は必ず F のガロア拡大になる。例えば、§1.3 で取り上げた拡大 ' K/\mathbb{Q} ' (= 本節の記号では、 $p = 3, f = 2, F = \mathbb{Q}$ の場合に相当) は正にこのような形のガロア拡大の特別な場合に該当する。

一般の p と $f \in F$ の話に戻ろう。この場合、 $\text{Gal}(L/F)$ は一つの元で生成され、かつその元の位数 (= その元を n 乗すれば単位元になる最小の整数 $n \geq 1$) が $p-1$ を割る数になることは簡単に示せる。例えば、 F を固定し、素数 p を動かすと、有限個の例外的な p を除けば、この位数 (= $[L:F]$) は必ずちょうど $p-1$ になる。位数がどのようになろうと、

このような $\text{Gal}(L/F)$ の生成元は、「 K に制限したとき、恒等写像 id になる」という条件を課すと、 $\text{Gal}(M/F)$ の位数 $[L:F]$ の元

$$\sigma \in \text{Gal}(M/F)$$

に一意に持ち上げられることは簡単に示すことができる。一方、 f に課した条件より、 $\text{Gal}(M/L)$ は必ず位数 p の元

$$\tau \in \text{Gal}(M/L) \quad (\subseteq \text{Gal}(M/F))$$

で生成される群になることは直ちに従う。簡単のため、 $[L:F] = p-1$ で、整数 $n \in \{1, \dots, p-1\}$ が、 p を法とした掛け算によって定まる群

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$$

の生成元になっていると仮定しよう。すると、(σ を n に対応するように採れば) ガロア群 $\text{Gal}(M/F)$ はちょうど生成元

$$\sigma, \tau$$

と関係式

$$\sigma^{p-1} = \tau^p = \text{id}, \quad \sigma \cdot \tau \cdot \sigma^{-1} = \tau^n$$

で定義される位数 (=濃度) $p(p-1)$ の有限群になる。群 $\text{Gal}(M/F)$ 、あるいは G_F の群コホモロジーに関連付けて整理すると、

生成元 σ と τ は正にその $H^1(-)$ に関する元

であり、また

σ と τ の絡まり合い方を記述している (最後の) 関係式は、ちょうど $H^2(-)$ の生成元に対応している

のである。

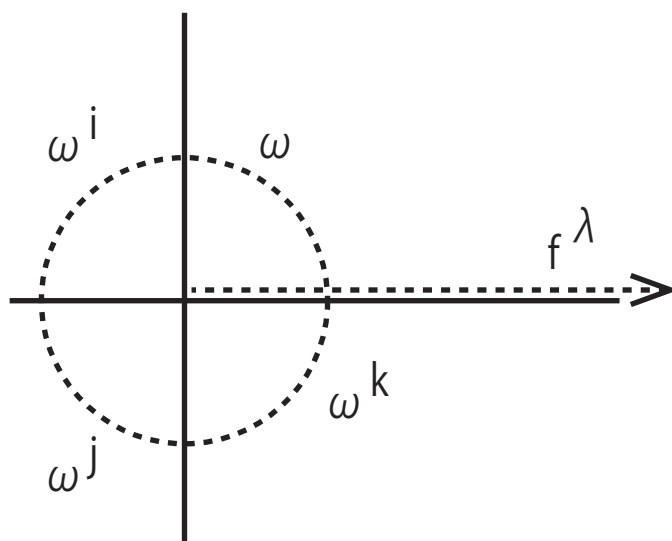


図7：円分拡大とクンマー拡大が織り成す「数論的な重複度1の絡まり合い」

つまり、種数 $g \geq 1$ 位相曲面の理論（前節 §3.2 の後半を参照）との類似でいうと、
生成元 σ, τ はちょうど生成元 α_i, β_i に対応していて、

また

σ と τ の絡まり合い方を記述した関係式は
ちょうど α_i, β_i たちの絡まり合い方を記述した関係式に対応している

というふうに解釈することができる（＝様々な 1 のベキ乗根や f の「 λ ベキたち」を示した図 7 を参照）。

§4. 数体と位相曲面の「絡まり合いの現場」：数体上の代数曲線

§4.1. 数体上の双曲的代数曲線

これまで本稿では数体と位相曲面のそれぞれの基礎的な理論について解説したが、抽象的な類似性はともかく、それぞれの理論については個別のものとしての位置付けで取り上げた。一方、数論幾何の中心的な研究対象の一つである数体上で定義された代数曲線（＝略して「数体上の代数曲線」）について考察すると、数体の理論と位相曲面の理論の両方が極めて厳密かつ明示的な形で深く関わり合っていて、その関わり合いの様子を研究し解明することによって両者の構造に関する様々な新しい知見が得られる。

まずは「(射影) 代数多様体」について説明する必要がある。整数 $n \geq 1$ に対して、複素数体 \mathbb{C} 上の「 n 次元射影空間」(n -dimensional projective space) は次のような同値類の集合として定義することができる：

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \} / \sim$$

(ただし、同値関係 ' \sim ' は

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n)$$

$$\iff 0 \neq \exists \lambda \in \mathbb{C} \text{ s.t. } (x_0, x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot y_0, \lambda \cdot y_1, \dots, \lambda \cdot y_n)$$

というふうに定義される)。「射影代数多様体」(projective algebraic variety) X とは、幾つかの、($n+1$ 個の不定元に関する) 複素数係数の斉次多項式 (homogeneous polynomial)

$$\{ f_i(T_0, T_1, \dots, T_n) \}_{i \in I}$$

(ただし、 I は任意の集合で、「斉次多項式」とは、すべての項の次数が一致する多項式のこと) の共通の零点全体からなる $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ の (閉) 部分集合である。本稿では、「特異点」を持たない、いわゆる「滑らか」な (射影) 代数多様体しか登場しない。(射影) 代数多様体に対して、その「次元」という概念を定義することは可能だが、これを正しく定義するためにはやや高級な「可換環論」が必要になるため、本稿では詳しく説明しない。ただ、本稿では基本的には次元 1 の滑らかかつ連結な射影代数多様体、つまり「代数曲線」(algebraic curve) しか登場しない。次に、 \mathbb{C} の部分体 $F \subseteq \mathbb{C}$ が与えられたとしよう。先程の定義に出てきた斉次多項式たち $\{ f_i \}_{i \in I}$ がすべて F に係数を持つ多項式に採れるとき、(射影) 代数多様体 X に対して「 F 上で定義される」という言い方をする。

例えば、 $n = 2$ のとき、 $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ を「射影平面」と呼ぶこともあるが、射影平面の場合、一つの（適切な条件を満たす）斉次多項式

$$f(T_0, T_1, T_2)$$

によって代数曲線が定まる。この場合、「滑らか」という性質は、その多項式の偏微分たち

$$\frac{\partial f}{\partial T_0}, \quad \frac{\partial f}{\partial T_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial T_2}$$

と f の共通の零点は $(0, 0, 0)$ しかないという条件に対応している。例えば、有名な「フェルマの方程式」

$$f(T_0, T_1, T_2) = T_0^d + T_1^d - T_2^d$$

（ただし、 $d \geq 1$ は整数）は（簡単に確認できるように）この条件を満たしているため、 $(\mathbb{Q}$ 上で定義される！）滑らかな代数曲線を定めている。

一般の n の話に戻ろう。代数曲線

$$X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$$

が与えられたとしよう。この代数曲線の「代数構造」（ $= \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ の中への埋め込みや、 X の定義に用いられた斉次多項式たち）を忘れて、下部の位相空間のみ考えるようにすると、

その位相空間が（コンパクトかつ連結な）種数 $g \geq 0$ 位相曲面になること

は比較的簡単に示すことができる。種数 g が 2 以上になる場合は特に重要で、その場合には代数曲線 X を双曲的代数曲線 (hyperbolic algebraic curve) と呼ぶ。例えば、射影平面の場合、 X の定義方程式 f の次数が d だとすると、次のような公式

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

は初等的代数幾何学を用いることによって簡単に証明することができる。つまり、 X の双曲性は $d \geq 4$ という条件と同値になる。

位相曲面の場合、§2.3 で解説した普遍被覆のような（一般には無限次の）被覆等、様々な被覆が存在するわけだが、

多項式で定義される「代数的な世界」に留まろうとすると、
有限次の被覆しか扱うことができない。

つまり、代数曲線 X によって定まる位相曲面の（連結な）有限次被覆は、元の X と同様、代数曲線として自然に定義されるが、無限次被覆については同様な性質は成立しない。

代数曲線 X の有限次の被覆が代数的に定義されるということは、§2.3 で取り上げた「副有限基本群」 $\hat{\pi}_1(-)$ は X によって定まる位相曲面に対して定義でき、しかもそれを、

ある代数曲線の族に出てくる
それぞれの代数曲線の（有限な！）被覆変換群たちの成す
系の逆極限として扱うことができる

ということである。この副有限基本群を

$$\hat{\pi}_1(X)$$

と表すことにする。

次に、 X が数体 F 上で定義されているとしよう。すると、先程の「代数曲線の族」に登場する各々の代数曲線たちも、(F 上で定義されるとは限らないが) F の適切な有限次拡大 ($\subseteq \overline{\mathbb{Q}}$) 上で定義されることは簡単に示せる。従って、 F の絶対ガロア群 G_F を、これらの代数曲線の定義方程式たちにあられる係数たち (= $\overline{\mathbb{Q}}$ の元!) に作用させることによって、 G_F を上述の「代数曲線の族」に作用させることができる (図 8 を参照)。

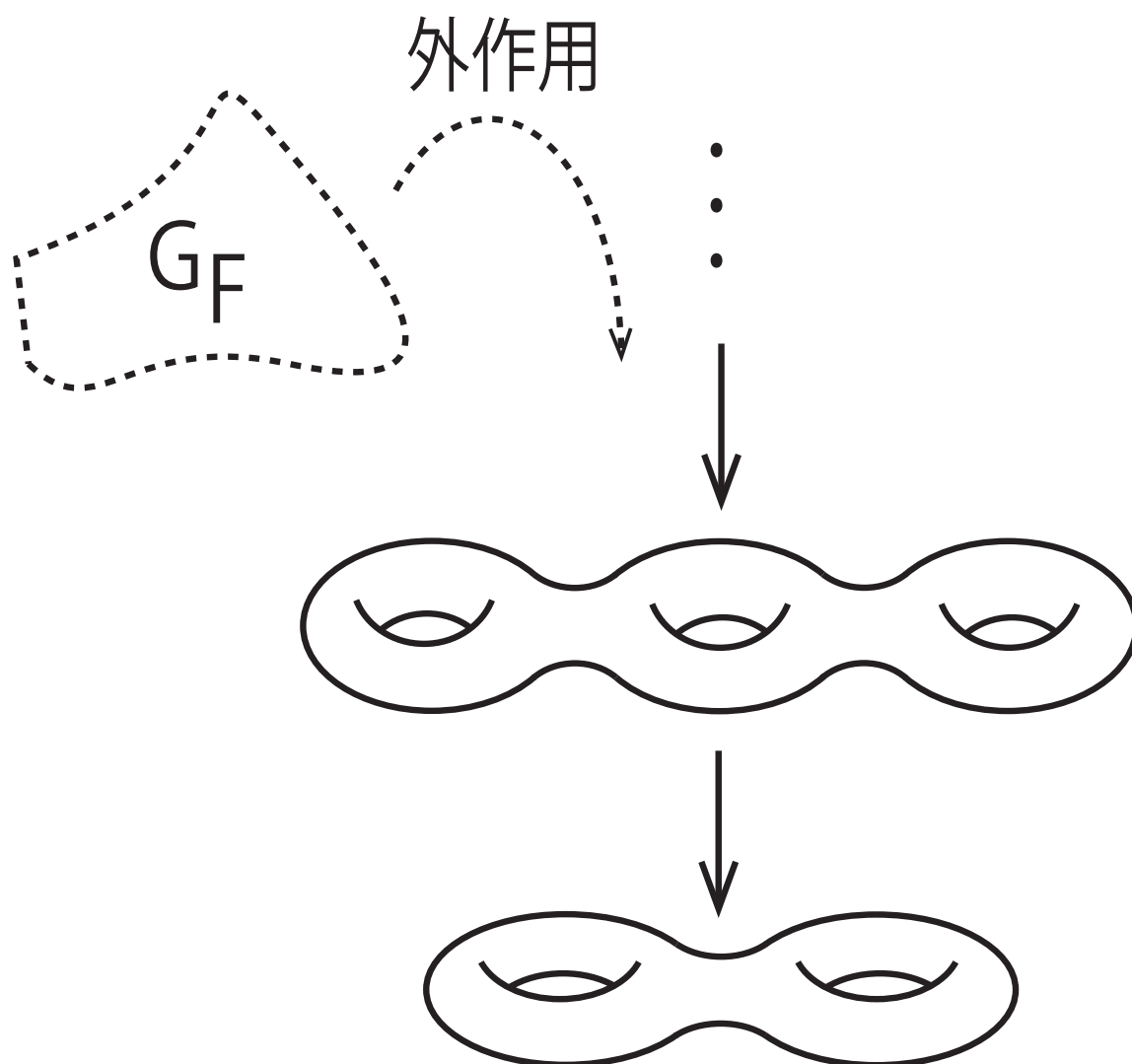


図 8 : 数体の絶対ガロア群は位相曲面の副有限基本群に自然に外作用する

副有限基本群 $\hat{\pi}_1(X)$ は、厳密にいうと内部自己同型を除いてしか定義されないものなので、このような G_F の「外作用」(outer action) によって

$$\rho_X : G_F \rightarrow \text{Out}(\hat{\pi}_1(X))$$

のような形の自然な準同型 = 「外部表現」(outer representation) が定まる。この G_F の $\hat{\pi}_1(X)$ への外作用は、

数体の数論 (= G_F) と位相曲面の位相幾何 (= 副有限基本群 $\hat{\pi}_1(X)$) という、
一見全く異質な二種類の数学的構造を関連付ける

重要な研究対象である。

§4.2. 副有限基本群への絶対ガロア群の忠実な外作用

前節 (§4.1) の外部表現 ρ_X については様々な角度から多種多様な研究が行なわれているが、 ρ_X について知られている最も基本的な事実の一つは次の結果 ([HM], Theorem C を参照) である。

定理 : 数体 F 上で定義される双曲的代数曲線 X に付随する自然な外部表現

$$\rho_X : G_F \rightarrow \text{Out}(\hat{\pi}_1(X))$$

は単射になる。

同種の「単射性」に関する定理は、「穴が開いている」=「コンパクトでない」双曲的代数曲線の場合には、既に [Mtm] で証明されていて、[Mtm] も [HM] も、一番最初に Belyi 氏によって発見された、射影直線 \mathbb{P}^1 から三点を抜いて得られる双曲的曲線の場合の単射性に帰着させることによってより一般的な双曲的代数曲線の場合の単射性を証明している。一方、上記の 定理 のようにコンパクトな双曲的代数曲線の場合にこの種の単射性を示すことの意義は、§3.2 及び §3.3 で解説したように、

コンパクトな種数 g の位相曲面と数体の絶対ガロア群には、

「二次元的な群論的絡まり合い」という

深い構造的類似性があり、そのような類似性を持つ、一見全く異質な
数論的な対象と位相幾何学的な対象を関連付けていることにある。

つまり、上記の 定理 は、数論的な方の「二次元的な群論的絡まり合い」が、その自然な外作用によって位相幾何学的な方の「二次元的な群論的絡まり合い」に忠実に表現されていることを言っているのである。別の言い方をすると、純粋に「可換環論」の視点 (=つまり、もっと具体的な言葉でいうと、初等的な加減乗除の範疇) で考察すると、数体と双曲的代数曲線はいずれも次元 **1** の対象であり、しかもその環論的な構造 (=つまり、正に「加減乗除」の構造) は全く異質であるが、ガロア群や副有限基本群の「二次元的な群論的絡まり合い」を通して両者を考察することによって、(§3.2 及び §3.3 で解説したような) 深い構造的な類似性が浮かび上がり、また上記の 定理 の単射性によってその両者の繋がりを極めて明示的な形で定式化することが可能になる。

参考文献

- [Mtm] M. Matsumoto, Galois representations on profinite braid groups on curves, *J. Reine Angew. Math.* **474** (1996), pp. 169-219.
- [NSW] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **323**, Springer-Verlag (2000).
- [HM] Y. Hoshi, S. Mochizuki, On the combinatorial anabelian geometry of nodally nondegenerate outer representations, *Hiroshima Math. J.* **41** (2011), pp. 275-342.