不変式の話
数学セミナー連載，2005 年 12 月号，2006 年 1,2,4 月号

向井 茂

目次

第 1 回

対称式からヒルベルトの第 14 問題へ

不変式論は 19 世紀以来の豊富な具体例の蓄積とヒルベルト (Hilbert) の天才的な着想を含む代数学の美しい分野の一つである．4 回にわたってこれらを紹介したい．まずは彼の第 14 問題を初等的に定式化して，その経緯や背景を説明し，最後はそれに対する反例（不変式論における無理数の発見とでもいうべきもの）で締めくくる予定である．

§1　はじめに

不変式は数学のいろんなところに顔をだす．なかでも群とは鶏と卵のように切っても切れない関係にあるが，幾何とも相性がいいのでここから入ってみよう．

「図形等の性質で変換（群）で不変なものを研究する」という幾何学の一つの見方がそれである．この関連では「物理法則とは観測者の座標系によらないものである」という言明もある．

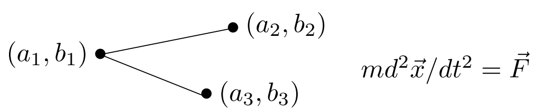

図 1.1　幾何と物理法則

例えば，線分の端点の座標自身は不変ではないが，

$$\begin{aligned}&(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2,\\ &(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (b_1 - b_2)(b_1 - b_3)\end{aligned} \tag{1.1}$$

等は平面のユークリッド変換に関して不変である．また，xy 平面内の２次曲線

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \tag{1.2}$$

に対して，比

$$(a + c)^2 : ac - b^2 \tag{1.3}$$

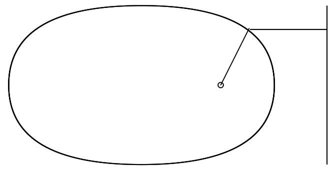

図 1.2　離心率 ＝ （焦点からの距離）/(準線との距離)

もユークリッド変換に関して不変である．

実際，この比は２次曲線の離心率 ϵ を用いて

$$\frac{(a+c)^2}{ac - b^2} = 2 + (1 - \epsilon^2) + \frac{1}{1 - \epsilon^2}$$

と表される．

離心率	0	< 1	1	> 1
$\frac{(a+c)^2}{ac-b^2}$	4	> 4	∞	≤ 0
２次曲線	円	楕円	放物線，２重直線	双曲線，２直線

表 1.1　不変式と離心率

この比以外にも，(4.2) の判別式を

$$D := \det \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

とおくとき，比 $D^2 : (ac - b^2)^3$ もユークリッド変換に関して不変である．実際，曲線 (4.2) が楕円のとき，その面積は $\pi\sqrt[4]{D^2/(ac - b^2)^3}$ で与えられる．

不変量は図形の座標や定義式の係数から計算される．その計算式が多項式になっている場合が代数幾何的な意味での不変式である．(1.1) はもちろんであるが，比 (1.3) に現れる多項式 $a+c, ac-b^2$ や判別式 D

も不変式である．実際，ユークリッド変換（の行列）

$$g = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & r \\ -\sin\theta & \cos\theta & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の導く係数の変換

$$\begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \mapsto {}^t g \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} g \tag{1.4}$$

に関してそれらは不変である．

近代数学史における不変式論で主に扱われたのは二つの超曲面（より正確にはそれらの定義多項式）が変換で移り合うかどうかを判定するための不変式であるが，そのような不変式の生成系を求めることが自然と問題になる．例えば上の判別式 D は射影変換

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{a_{10} + a_{11}x + a_{12}y}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}y}, \frac{a_{20} + a_{21}x + a_{22}y}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}y} \right)$$

（ただし，$\det(a_{ij}) = 1$）に関しても（4.2）の不変式になっている．さらに，このような不変式はすべて判別式 D の多項式で表される．また，ユークリッド変換（4.3）で不変な多項式はすべて $a + c, ac - b^2$ と D の多項式で表される．

代数的には群とその表現さえあれば不変式が定義できるが，ヒルベルトはその数学の問題の中の一つで，この代数的に一般化された状況でも，不変式の全体にはいつも有限個の生成系があるのではないかという期待を述べた．これは否定的に解決されたが，このあたりを目標にゆっくりと解説していきたい．今回は，まず概念になれるために置換不変式の話から始めよう．

§2　対称式

集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ から自分自身への全単射を置換といい，それらの全体を（$n!$ 個ある）をドイツ文字 $\mathfrak{S}_n$ で表す．$x_1, \ldots, x_n$ の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は変数の置換に対して不変，すなわち，

$$f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

がすべての置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して成立するとき，対称式という．ただし，$\sigma(x_i)$ は $x_{\sigma(i)}$ の略記である．たとえば，$x^3 + y^3 + z^3$ や $xyz - 3$ などは x, y, z の対称式である．

例 1． 3 変数 x, y, z の 4 次斉次[*1]対称式は，4 個の定数 a, b, c, d でもって

$$a(x^4+y^4+z^4)+b(x^3y+xy^3+x^3z+xz^3+y^3z+yz^3)$$
$$+c(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)+d(x^2yz+xy^2z+xyz^2)$$

と表される．

対称式にはいろいろと特別なものが知られているが，積

$$\prod_{i=1}^{n}(t + x_i) = (t + x_1)(t + x_2)\cdots(t + x_n)$$

を t に関して展開したときの係数

$$\begin{cases} s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ s_2 = \sum_{i<j} x_i x_j \\ s_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k \\ \cdots \\ s_n = x_1 x_2 \cdots x_n \end{cases}$$

が最も基本的である．s_r は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ から r 個をとって掛け合わせた単項式の総和で，r 次基本対称式と呼ばれる．

定理 2 (対称式の基本定理)． $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の対称式は基本対称式 $s_1, s_2, \ldots, s_n$ の多項式として表される．

証明　例えば，3 変数 4 次対称式

$$f = x^3y + x^3z + xy^3 + xz^3 + y^3z + yz^3$$

の場合を考えよう．まず次に注目する．

☆ f に出てくる単項式を英単語とみたとき，辞書に最初に現れるのは $xxxy = x^3y$ である．

基本対称式の単項式 $s_1^a s_2^b s_3^c$ を展開したとき辞書に最初に現れる単項式は $x^a(xy)^b(xyz)^c = x^{a+b+c}y^{b+c}z^c$ である．そこで☆の x^3y を打ち消すために $s_1^2 s_2$ を引く．次に

$$f - s_1^2 s_2 = -x^2yz - xy^2z - xyz^2 - 2(xy + xz + yz)^2$$

に対して同じことをする．ここに現れる単項式で辞書に最初に現れるのは $xxyy$ で係数は -2 なので，これを消すために $2s_2^2$ を加える．

$$f - s_1^2 s_2 + 2s_2^2 = -x^2yz - xy^2z - xyz^2$$

より，$f = s_1^2 s_2 - 2s_2^2 - s_1 s_3$ をえる．◇

[*1] 同次多項式ともいう．それに含まれる単項式 $x^p y^q z^r$ の総次数 $p + q + r$ が一定値である多項式のこと．

§3 交代式

多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ は変数の互換でもって符号を替える，すなわち，すべての $1\le i<j\le n$ に対して

$$\begin{aligned} &f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)\\ &=-f(x_1,\dots,\overset{i}{\check{x}_j},\dots,\overset{j}{\check{x}_i},\dots,x_n)\end{aligned} \tag{1.5}$$

が成立するとき，交代式と呼ばれる．たとえば，$x_1^2-x_2^2$ は x_1,x_2 の交代式である．最も重要な交代式は

$$\begin{aligned}\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n) &:= \prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j)\\ &=(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)\\ &\quad\times(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)\\ &\quad\times(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_n)\\ &\quad\cdots\\ &\quad\times(x_{n-1}-x_n)\end{aligned}$$

で，$x_1,x_2,\dots,x_n$ の差積と呼ばれる．

命題 3. 交代式は差積 $\Delta(x)$ と対称式の積である．

証明 定義式 (1.5) より，$x_i=x_j$ とおくと，$f(x_1,\dots,x_n)$ は（恒等的に）零である．よって，因数定理より，交代式 $f(x)$ は x_i-x_j で割り切れる．よって，$\Delta(x)$ で割り切れる．商 $f(x)/\Delta(x)$ が対称式なのは明らか．♢

例 4. $x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)$ は x,y,z の交代式である．これは $(x-y)(x-z)(y-z)(x+y+z)$ と因数分解される．

二つの交代式の積は対称式である．とくに，差積の平方 $\Delta(x)^2$ が対称式であることが重要である．

§4 置換不変式

よく知られているように，置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ には偶奇の別がある．差積に変数変換を施したとき

$$\Delta(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))=\pm\Delta(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

が成立するが，ここで符号が $+$ であるとき，σ を偶置換とよぶ．これら全体の集合を $\mathfrak{A}_n$ で表そう．これは置換の積（写像の合成）でもって閉じている．

定義 5. 多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ は変数の偶置換に対して不変，すなわち，

$$f(\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_n))=f(x_1,\dots,x_n) \tag{1.6}$$

がすべての偶置換 $\sigma\in\mathfrak{A}_n$ に対して成立するとき，半対称式という．

対称式や交代式，そしてそれらの和は半対称式であるが，これの逆も成立する．

補題 6. 半対称式は対称式と交代式の和に表される．

証明 半対称式 $f=f(x_1,\dots,x_n)$ で，x_1 と x_2 を入れ替えたものを f_1 で表す．このとき，f_1 も半対称式で，$(f+f_1)/2$ と $(f-f_1)/2$ はそれぞれ対称式，交代式である．♢

この補題と命題 3 より，半対称式は二つの対称式 $f(x),g(x)$ でもって，$f(x)+\Delta(x)g(x)$ として表される．よって，定理 2 と合わせて次をえる．

定理 7. 半対称式は基本対称式 $s_1,s_2,\dots,s_n$ と差積 $\Delta(x)$ の多項式として表される．

対称式や半対称式は置換の集合 $S\subset\mathfrak{S}_n$ に一般化される．

定義 8. 多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ は (1.6) が S に属するすべての置換 σ に対して成立するとき，S 不変式という．

S が $\mathfrak{S}_n$ 全体のときが対称式，偶置換の全体 $\mathfrak{A}_n$ のとき半対称式である．

例 9. S が二つの置換 $(12)(34),(14)(23)$ によりなるとする[*2]．（4 変数）S 不変式とは

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_2,x_1,x_4,x_3)=f(x_4,x_3,x_2,x_1)$$

をみたすものであるが，このような f は基本対称式 s_1,s_3 と $x_1x_2+x_3x_4$，$x_1x_4+x_2x_3$，$x_1x_3+x_2x_4$ の多項式である．

[*2] 恒等置換，(13)(24) と合わせて Klein の 4 元群と呼ばれる群になる．

§5　置換から線形変換へ

置換の全体 $\mathfrak{S}_n$ から n 次正則行列の全体 $GL(n)$ に考察を進めよう．正則行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ とそれの定める変数変換を

$$x_i \mapsto x_iA := \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_j, \quad 1\le i\le n$$

を同一視する．多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ は

$$f(x_1A,\dots,x_nA)=f(x_1,\dots,x_n)$$

をみたすとき，A 不変という．また，正則行列の集合 $S\subset GL(n)$ に対する S 不変式も置換のときと同様に定義する．

例 10. 2 変数多項式 $f(x,y)$ が $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ で不変とは $f(x,y)=f(x,-y)$ をみたすことである．そのような多項式はそれに含まれる各項の y のべき指数が偶数であるものに他ならない．よって，A 不変な多項式は x と y^2 の多項式である．

例 11. $f(x,y)$ が $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ で不変とは $f(x,y)=f(-x,-y)$ をみたすことで，それに含まれる各項の総次数が偶数ということである．よって，A 不変な多項式は x^2,xy と y^2 の多項式で表される．

例 12. S が二つの行列

$$\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$$

よりなるなるとき，S 不変な多項式 $f(x,y,z)$ は x^2,y^2,z^2 と xyz の多項式で表される．

置換による不変式は特別な線形変換（置換行列）による不変式である．こう見る方が自由度が増えて考えやすい．

例 13. 例 9 の不変式

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=f(x_2,x_1,x_4,x_3)=f(x_4,x_3,x_2,x_1)$$

を調べるために，新しい変数

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3+x_4\\ y_2=x_1+x_2-x_3-x_4\\ y_3=x_1-x_2+x_3-x_4\\ y_4=x_1-x_2-x_3+x_4\end{cases}$$

を導入する．このとき，置換 $(12)(34),(14)(23)$ は y_1 を保つ．また，y_2,y_3,y_4 のうち一つは固定して他の二つの符号を入れ替える．よって，例 12 より，置換不変式は y_1 と y_2^2,y_3^2,y_4^2 と $y_2y_3y_4$ の多項式で表される．

§6　ヒルベルトの第 14 問題

今まで多項式の係数の範囲をはっきりさせなかったが，有理数の全体 $\mathbb{Q}$，実数の全体 $\mathbb{R}$，複素数の全体 $\mathbb{C}$ のどれかで考えている．このような数の体系[*3]の一つを以下では k で表す．k の元を係数とする多項式 $f(x_1,\dots,x_n)$ の全体の集合を $k[x_1,\dots,x_n]$ で表す．これは代数学で「環」と呼ばれるものの一つの典型例である．[*4]その意味するところは

「多項式どうしでもって足し算と引き算ができ，かけ算もでき，結合律や分配律等が成立している.」

である．k の元を成分とする n 次正則行列の集合 $S\subset GL(n,k)$ に対して，S 不変式全体のなす集合を $k[x_1,\dots,x_n]^S$ で表す．

「S 不変式どうしでもって足し引きしたものやかけ算した結果はまた S 不変式である」

が，このことを専門用語では

$$\boxed{k[x_1,\dots,x_n]^S \text{ は } k[x_1,\dots,x_n] \text{ の部分環である}}$$

という．

定義 14. すべての S 不変式 $f(x)$ が

$$f_1(x),\dots,f_N(x)\in k[x_1,\dots,x_n]^S$$

の（N 変数）k 係数多項式で表される，すなわち，

$$f(x)=F(f_1(x),\dots,f_N(x))$$

となるとき，$k[x_1,\dots,x_n]^S$ は（k 上）$f_1(x),\dots,f_N(x)$ で生成されるという．

k を含む部分環 $R\subset k[x_1,\dots,x_n]$ の生成も同様に定義される．

次は不変式環に関する基本的な問題である．歴史的な背景は後回しにして，ともかく問題を述べよう．

[*3] 専門用語では体という．これらの他に有限体 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ や正標数の体があるがここでは扱わない．

[*4] もう一つの典型例として整数全体のなす環 $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ がある．

■ヒルベルトの第 14 問題（線形作用版）　S 不変式環 $k[x_1,\dots,x_n]^S$ は有限個の不変式で生成されるか？

有限個の多項式で生成されない部分環 $R \subset k[x_1,\dots,x_n]$ の例を二つ挙げておこう．

例 15. $y=0$ を代入して定数になる 2 変数多項式 $a+yg(x,y)$ （$a \in k$） の全体を R とする．R は多項式環 $k[x,y]$ の部分環で，無限個の単項式 $x^n y, n \geq 0$, で生成されるが，有限個の多項式では生成されない．

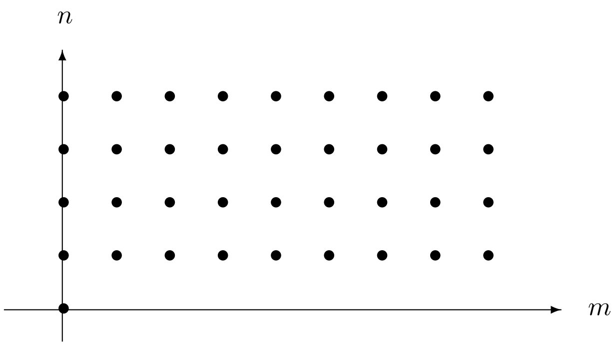

図 1.3　R 内の単項式 $x^m y^n$

例 16. $k[x,y]$ の中で $n \geq \sqrt{3}m$ をみたす単項式 $x^m y^n$ で生成される部分ベクトル空間 R は部分環である．しかし，有限個の多項式で生成されない．

次は定理 2 や定理 7 を一般化する，第 14 問題への肯定的結果である．

命題 17. S が置換の集合のとき，不変式環 $k[x_1,\dots,x_n]^S$ は有限個の不変式で生成される．

多項式が正則行列 A に関しても B に関しても不変なら，行列の積 AB に関しても不変である．また，逆行列 A^{-1} に関しても不変である．$S \subset GL(n,k)$ が与えられたとき，S の元とそれらの合成や逆行列の操作の繰り返しでもって得られる行列すべてよりなる部分集合を $G(S)$ とする．このとき，$G(S) \subset GL(n,k)$ は合成と逆行列に関して閉じている．これを専門用語では

$G(S)$ は $GL(n,k)$（正則行列全体のなす群）の部分群になっている

という．

多項式が S 不変であるということと $G(S)$ 不変であることは同値である．よって，S から $G=G(S)$ に移行することにより，最初から部分群 $G \subset GL(n,k)$ に限って G 不変式を考えても一般性を失わない．ただし，S が有限集合であっても $G(S)$ はそうとは限らないことに注意しよう．$G(S)$ が有限というのは強い制約条件である．次は §5 の例を一般化し，命題 17 を特殊な場合として含む．

命題 18. 線形変換の有限部分群 $G \subset GL(n,k)$ に対して G 不変式環 $k[x_1,\dots,x_n]^G$ は有限個の不変式[*5]で生成される．

－－－－－－

ヒルベルトの第 14 問題はいくつかの種類があるが，1901 年にヒルベルトがパリでの国際数学者会議で提出したのは上の形ではない．これについては次回に説明しよう．

－－－－－－

演習問題 1. $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$ は x_1,x_2,x_3,x_4 の対称式か？もしそうなら，基本対称式の多項式で表せ．

演習問題 2. 例 9 を証明せよ．

演習問題 3. 4 次巡回置換 (1234) の不変式環 $k[x_1,x_2,x_3,x_4]^{(1234)}$ を生成する有限個の多項式系を求めよ．

演習問題 4. 非負整数 l に対して，$(2+\sqrt{3})^l = n_l + m_l\sqrt{3}$ でもって非負整数対 (m_l,n_l) を定める．このとき，例 10 の部分環 R は単項式 $x^{m_l}y^{n_l}$，$l \geq 0$, で生成されることを示せ．

[*5] 生成系の不変式はその次数をすべて $|G|$ の元の個数（位数）以下にすることができる（Noether の定理）．

第 2 回

方程式の不変式

前回は対称式や半対称式から不変式に進んだ．今回は方程式の方から攻めてみたい．こちらの方がより不変式の歴史に沿っている．２次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ を解くときに

$$a\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}=0 \tag{2.1}$$

という変形を行う．これと同じように 3 次方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ も未知数を x から $y=x+b/a$ に移行することによって最高次の次の項がない標準形

$$ay^3+\frac{3(ac-b^2)}{a}y+\frac{a^2d-3abc+2b^3}{a^2}=0 \tag{2.2}$$

に帰着できる．(1) や (2) の係数に現れる多項式 $ac-b^2$ や $a^2d-3abc+2b^3$ は n 次式

$$F_n(x)=ax^n+nbx^{n-1}+\binom{n}{2}cx^{n-2}+\binom{n}{3}dx^{n-3}+\cdots$$

に $x=-b/a$ を代入して a^{n-1} 倍してえられる多項式 $a^{n-1}F_n(-b/a)$ の $n=2,3$ の場合である．読者はこの多項式列の意味を考えたことがあるだろうか？数学史における不変式論はこういうところから出発する．

§1　不変の双子

これは E.T. ベルの名著 “Men of Mathematics” (邦訳「数学を作った人びと」) のある章のタイトルである．この章では二人の数学者シルベスタ (Sylvester, 1814–1897)，ケイリー (Cayley, 1821–1895) の人物像と彼らの数学的業績が紹介されている．すこし引用しよう．

「不変式の概念の多様な拡張は，代数的不変式の理論から自然に導きだされるものであるが，その代数的不変式論は，きわめて単純な観察から生み出された．ブール（Boole, 1815–1864) についての章でも指摘するが，その考えの例はラグランジュ (Lagrange, 1736–1813) の業績のなかに見いだされる．そしてラグランジュからガウス (Gauss, 1777–1855) の整数論上の業績へと通じている．しかし，これら二人の学者は，この単純であるが代数学的に注目に値する現象を，自分たちの眼前にしながら，それがより遠大な理論への芽を有しているということには気づかなかったのである．ブールにしても，ラグランジュの業績を研究しつづけ，大幅に拡張してゆく途上でそれを発見したのだが，そのことの意義を完全には理解していなかったように思われる．」

§2　半人前だが…

引用文にある単純な観察の準備として，最初に述べた多項式列 $ac-b^2, a^2d-3abc+2b^3, \cdots$ の性質を説明しよう．（代数）方程式 $F_n(x)=0$ の変数 x を定数分 q だけ平行移動して新しい方程式 $F_n(x+q)=0$ を作ることを考えよう．２次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ の場合だと $a(x+q)^2+2b(x+q)+c=0$ を整理して新しい方程式 $ax^2+2(aq+b)x+(aq^2+2bq+c)=0$ がえられる．最高次係数はもちろん変化しないが，

$$a(aq^2+2bq+c)-(aq+b)^2=ac-b^2$$

となって，$ac-b^2$ も変化しない．よく知られているようにこれの -4 倍は判別式である．前回で説明した言葉で述べると，$a, ac-b^2\in k[a,b,c]$ は正則行列の集合

$$H(2):=\left\{\begin{pmatrix}1&q&q^2\\0&1&2q\\0&0&1\end{pmatrix}\mid q\in k\right\}\subset GL(3,k) \tag{2.3}$$

に関する不変式である．ただし，k は前回と同様で，例えば，複素数の全体 $\mathbb{C}$ と思っておいて問題ない．上の行列の集合は積や逆に関して閉じている．すなわち，部分群になっている．しかし，有限群ではない．

n 次方程式 $F_n(x)=0$ に対しても同様で，

$$a,\quad aF_2(-b/a)=ac-b^2,\cdots,a^{n-1}F_n(-b/a) \tag{2.4}$$

達は $F_n(x)\mapsto F_n(x+q)$ に伴う変換でもって不変である．

定義 1. 方程式 $F_n(x)=0$ の係数の多項式 $f(a,b,c,\ldots)$ は

$$f(a,b,c,\cdots)=f(a,aq+b,aq^2+2bq+c,\cdots)$$

がすべての $q\in k$ に対して成立するとき $F_n(x)=0$ の半不変式という．[*1]

言い換えると $(n+1)$ 次正則行列のなす群

$$H(n):=\left\{\begin{pmatrix}1&q&\ldots&q^n\\0&1&\ldots&nq^{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}\mid q\in k\right\}$$

に関する不変式のことである．説明は省くが，(2.4) は半不変式全体 $k[a,b,c,\ldots]^{H(n)}$ の中で「最も端にある」半不変式である．2 次方程式のとき，それら（すなわち，a と $ac-b^2$）は環 $k[a,b,c]^{H(2)}$ を生成する．しかし，端にありすぎるため，これは $n\geq 3$ では $k[a,b,c,\ldots]^{H(n)}$ を生成しない．実際，

$$\begin{vmatrix}a&2b&c&\\&a&2b&c\\b&2c&d&\\&b&2c&d\end{vmatrix}=\frac{4(ac-b^2)^3+(a^2d-3abc+2b^3)^2}{a^2}$$

は半不変式であるが，(2.4) の多項式では表されない．[*2]

方程式の半不変式は「不変の双子」で引用されている不変式ではない．しかし同じ精神のより簡単なものである．まだ半人前のような名前だが，共変式 (covariant) との対応もあって，それに劣らず重要である．

[*1] semi-invariant の訳．相対不変式 (relative invariant) とは別物です．混同しないよう注意してください．

[*2] ただし，有理的には $k(a,b,c,\ldots)^{H(n)}$ を生成している．

§3 ブールの発見

きわめて単純な観察というのは 2 次方程式の判別式より強い不変性のことである．前節の平行移動 $x+q$ よりも一般に，2 次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ の変数 x にその 1 次分数変換 $(px+q)/(rx+s):=y$ を代入してみよう．分母を払うことによって

$$a(px+q)^2+2b(px+q)(rx+s)+c(rx+s)^2=0$$

をえる．これを整理した新しい方程式 $Ax^2+2Bx+C=0$ の係数 A,B,C は，前の係数 a,b,c によって次のように表される．

$$\begin{cases}A=ap^2+2bpr+cr^2\\B=apq+b(ps+qr)+crs\\C=aq^2+2bqs+cs^2\end{cases}$$

このように係数は大きく変化するが，判別式（の 1/4 倍である）b^2-ac に対しては

$$B^2-AC=(ps-qr)^2(b^2-ac)$$

という簡明な式が成立する．したがって，次のことが示された．

> 変換後の方程式の判別式は，もとの方程式の判別式に，因数 $(ps-qr)^2$ をかけたものに等しく，このかけられる因数は，1 次分数変換の係数 p,q,r,s にしか関係しない．

「不変の双子」からの引用を続けよう．

「このささいな事実のなかに，注目すべき何物かがあることに最初に気付いたのはブールであった（1841 年）．すべての代数方程式は，判別式をもっている．それは，方程式の係数から作られる一定の形の式（例えば 2 次方程式に対しては，b^2-ac）であって，方程式の二つまたはそれ以上の解が等しい場合に，またそのときにかぎって 0 となる．ブールは，はじめに次のような疑問をもった．どんな方程式においても，x を，前述の 2 次方程式の場合と同じような関係にある新変数 y で置き換える場合，変換の際に用いられた係数だけからなる因数を除外すれば，判別式に変化がないのではないだろうか，と．彼は，実際にそれが変化しないことを発見した．次に彼は，こういう疑問

をもった．すなわち，係数からできている式で，1次（分数）変換のもとで不変という特性をもっているものが，判別式以外にはないものだろうか，と．彼は，一般4次方程式に対して，そのような式が二つあることを見いだした.」

補足しよう．n 次方程式 $F_n(x)=0$ の解を $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ とするとき，それらの差積

$$\Delta(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) := \prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j) \tag{2.5}$$

の平方 $\Delta(\alpha)^2$ は解の対称式である．よって，解と係数の関係と対称式の基本定理より，$b/a, c/a, d/a,\ldots$ の多項式で表される．これに a^{2n-2} をかけたものは係数 $a,b,c,\ldots$ の多項式である．これが，上で判別式と呼んでいるものである．以下，$D(a,b,c,\ldots)$ で表そう．

$a^{2n-2}\Delta(\alpha)^2$ が多項式になることを見るには，次に注意すればよい．

命題 2 (対称式の基本定理への補足). $x_1,x_2,\ldots,x_n$ の対称式はどの変数 x_i に関しても高々 e 次だとする．このとき，それを基本対称式 $s_1,s_2,\ldots,s_n$ の多項式として表したときの総次数は e 以下である．

方程式の判別式はシルベスタ行列式でもって表される．3次，4次の場合は次のとおりである．

$$-3^3\begin{vmatrix} a & 2b & c & \\ & a & 2b & c \\ b & 2c & d & \\ & b & 2c & d \end{vmatrix},\ 4^4\begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & & \\ & a & 3b & 3c & d & \\ & & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & & \\ & b & 3c & 3d & e & \\ & & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix}$$

なお文中で「一般の4次方程式」と言っているのは係数に出てくる a,b,c,d,e 等を数値ではなく独立な変数（不定元）とみているということである．

前回説明した言葉で上の引用文を読みなおそう．まず，因子 $ps-qr$ は目障りなので1次分数変換 $x\mapsto (px+q)/(rx+s)$ は $ps-qr=1$ なるものだけを考えることにする．

定義 3. 方程式 $F_n(x)=0$ の係数の多項式 $f(a,b,c,\ldots)$ は

$$F_n(x)\mapsto (rx+s)^n F_n\left(\frac{px+q}{rx+s}\right) \tag{2.6}$$

に伴う変換でもって不変であるとき $F_n(x)=0$ の不変式という．

2次方程式の場合だと，3変数 a,b,c の多項式 $f(a,b,c)\in k[a,b,c]$ でもって，すべての $p,q,r,s\in k$（$ps-qr=1$）に対して，

$$f(ap^2+2bpr+cr^2, apq+b(ps+qr)+crs, aq^2+2bqs+cs^2)$$

がもとの $f(a,b,c)$ に恒等的に等しいもののことである．言い換えると，3次正則行列の集合

$$G(2) := \left\{\begin{pmatrix} p^2 & pq & q^2 \\ 2pr & ps+qr & 2qs \\ r^2 & rs & s^2 \end{pmatrix} \mid ps-qr=1\right\}$$

に関する不変式である．これも (2.3) と同様に $GL(3,k)$ の（無限）部分群である．一般の n に対しても部分群 $G(n)\subset GL(n+1,k)$ が同様に定義され，それに関する不変式が方程式の不変式にほかならない．

ブールの発見をまとめよう．

- 判別式 $D(a,b,c,\ldots)=a^{2n-2}\Delta(\alpha)^2$ は不変式である．
- 2次，3次方程式の不変式環 $k[a,b,c]^{G(2)}$, $k[a,b,c,d]^{G(3)}$ はどちらも判別式で生成される．
- 4次方程式の不変式環 $k[a,b,c,d,e]^{G(4)}$ は二つの元で生成される．

方程式の不変式論は精力的に研究されたが，次はその一般論において二つの頂点を占める．後者はゴルダン (P. Gordan, 1837–1912) による．

定理 4 (ケーリー・シルベスタの個数公式). n 次方程式の不変式 $f(a,b,c,\ldots)$ でもって $a,b,c,\ldots$ に関して斉次かつ e 次のもの全体のなすベクトル空間の次元は

$$\frac{(1-U^{n+1})(1-U^{n+2})\cdots(1-U^{n+e})}{(1-U^2)\cdots(1-U^e)}$$

を U のローラン多項式に展開したときの $U^{ne/2}$ の係数に等しい．（$ne/2$ が整数でないときは零と解する．）

定理 5. 方程式の不変式環 $k[a,b,c,\ldots]^{G(n)}$ は有限生成である．

§4　判別式は不変式である

このブールの観察をまず証明しよう．判別式は，$F_n(x) = a\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i)$ とおいて

$$D(a,b,c,\ldots) = a^{2n-2}\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2 \tag{2.7}$$

でもって定義された．$F_n(x)$ の 1 次分数変換 (2.6) は

$$a\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i) \mapsto a\prod_{i=1}^n \{px+q-\alpha_i(rx+s)\}$$

と表される．これの最高次係数は $a\prod_{i=1}^n(-r\alpha_i+p)$ に等しく，解は $(s\alpha_i-q)/(r\alpha_i-p) =: \alpha_i'$, $1\le i\le n$, である．よって，変換後の判別式は

$$a^{2n-2}\prod_i(-r\alpha_i+p)^{2n-2}\prod_{i<j}(\alpha_i'-\alpha_j')^2$$

に等しい．解の差については

$$\alpha_i'-\alpha_j' = \frac{(ps-qr)(\alpha_i-\alpha_j)}{(r\alpha_i-p)(r\alpha_j-p)} \tag{2.8}$$

が成立するので，上は $F_n(x)=0$ の判別式に一致する．

§5　不変式と正則グラフ

ブールの発見の残りの二つは不変式の個数に関する定理 4 を用いて証明できるが，これは別の場所で説明した（例えば，数学セミナー別冊「数学のたのしみ」の 2001 年 12 月号）．ここでは違ったアプローチを考える．

判別式に関する考察は解の差の単項式

$$\prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^{m_{ij}}, \quad m_{ij}\in \mathbf{Z}_{\ge 0} \tag{2.9}$$

に一般化できるというのがその出発点である．このような式で，次をみたすものを考えよう．

(☆)　どの α_i に関しても次数が e である．

このとき，変数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ に関する総次数は $ne/2$ である．（判別式の場合は m_{ij} がすべて 2 で $e=2n-2$ である．）このような単項式で対称式になっているものは差積 (2.5) の偶数次ベキしかない．しかし，それらの線形結合 $\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ でもって対称式になるものは外にもたくさん作れる．そうだとすると $\Phi(\alpha)$ は $b/a, c/a, d/a, \ldots$ の多項式である．命題 2 より

$$f(a,b,c,\ldots) = a^e\Phi(\alpha) \tag{2.10}$$

をみたす多項式 f が存在する．このとき，f は前節の判別式と同じ理由でもって不変式である．[*3]実際，変換後の

$$a^e\prod_i(-r\alpha_i+p)^e\prod_{i<j}(\alpha_i'-\alpha_j')^{m_{ij}}$$

は，条件 (☆) と等式 (2.8) より，もとの $a^e\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^{m_{ij}}$ に一致する．

例として 4 次方程式 $F_4(x)=0$ の解差の積

$$\begin{cases} A = (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) \\ B = (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_2) \\ C = (\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_3) = -A-B \end{cases} \tag{2.11}$$

を考えよう．これらの生成する 2 次元ベクトル空間への 4 次対称群 $\mathfrak{S}_4$ の作用（解の置換）は 3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ を経由している．実際、後者が A^2, B^2, C^2 の置換として，また，$A-B, B-C, C-A$ の置換として作用する．よって，$A^2+B^2+C^2$ と $(A-B)(A-C)(B-C)$ は解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ の対称式である．これらは $e=2,3$ として（☆）をみたす．よって，

$$a^2(A^2+B^2+C^2) = ae-4bd+3c^2 =: g_2$$

と

$$a^3(A-B)(A-C)(B-C) = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} =: g_3$$

は 4 次方程式の不変式である．判別式 $D(a) = a^6A^2B^2C^2$ は $g_2^3-27g_3^2$ に等しい．

このアプローチの利点は方程式の不変式がすべてこの方法でえられる点にある．使うと述べやすいので，まずグラフとの関係を説明する．各解 α_i に対して頂点 i を用意して，解差単項式 (2.9) に対しては i と j を m_{ij} 本の辺で結ぶ．これによって，n 頂点グラフがえられるが，条件（☆）はこれが e 価正則グラフであることにほかならない．例えば完全差積 (2.5) は完全グラフに対応し，(2.11) の A, B, C は次の 1 価正則グラフに対応している．

[*3] （☆）を仮定しない解の対称式からは半不変式がえられる．

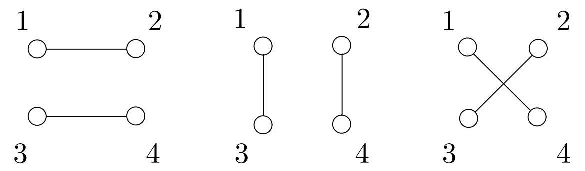

図 2.1　4 人が握手をする方法

$n=6$ では $15(=\dfrac{6!}{(2!)^3 3!})$ 個の 1 価正則グラフに対応して，(☆)$_{e=1}$ をみたす 15 個の差積，例えば $(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_5-\alpha_6)$，がえられる．(2.11) の $A+B+C=0$ のような線形関係がたくさんあって，これらは 1 次従属である．実際，生成するベクトル空間は 5 次元で，[*4]その基底としては辺の交叉しないものの全体がとれる．

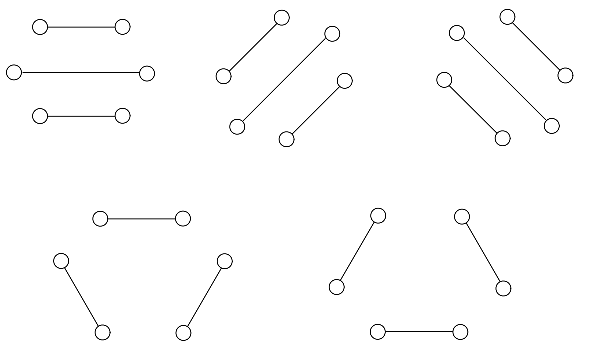

図 2.2　6 人が手を交差しないで握手をする方法

次はケンペ (Kempe) による．

定理 6. 偶数次方程式の不変式は 1 価正則グラフに対応する (2.9) の多項式として表される $\Phi(\alpha)$ でもって解の対称式になっているものから (2.10) の対応でもって構成できる．

奇数頂点の 1 価正則グラフは存在しないが，奇数次方程式に対しては，上で 1 価を 2 価に替えたものが成立する．

この定理より，3 次方程式の不変式環が判別式で生成され，4 次方程式のそれが g_2, g_3 で生成されることが簡単に示せる．さらに，元々の証明ではないが，ゴルダンの定理（定理 2）もこの定理から証明できる．

[*4] $n=8$ では 14 次元になる．この数列 2, 5, 14, ⋯ はカタラン数と呼ばれるものである（参：コンウェイ・ガイ著「数の本」第 4 章）．

§6　挑戦者たち

方程式 $F_n(x)=0$ の不変式は 2 変数 n 次斉次式

$$F_n(x,y)=ax^n+nbx^{n-1}y+\binom{n}{2}cx^{n-2}y^2+\cdots$$

を使っても定義できる．すなわち，それは x, y の線形変換

$$F_n(x,y)\mapsto F_n(px+qy, rx+sy),\quad ps-qr=1$$

に伴う係数 $a, b, c, \ldots$ の線形変換に関する不変式である．よって，自然に m 変数 n 次斉次式の変換

$$F_n(x_1,\ldots,x_m)\mapsto F_n(\sum_i a_{1i}x_i,\ldots,\sum_i a_{mi}x_i)$$

に伴う係数の線形変換に関する不変式に拡張できる．これは文献では m 元 n 次形式の不変式と呼ばれる．ただし，ここでも行列 $(a_{ij})_{1\le i,j\le m}$ の行列式は 1 に限定する．これらの行列の全体は群をなしているが，それは特殊線形群と呼ばれる．

ヒルベルトは 1890 年の論文においてゴルダンの定理を拡張（ただし証明はまったく違う）して，特殊線形群に関する多くの不変式環に対してその有限生成性を証明した．それには m 元 n 次形式の不変式の有限性が特別な場合として含まれている．そして次の問題に到達した．

■ヒルベルトの第 14 問題（再掲）　S は n 次正則行列の集合とする．このとき，S 不変式環 $k[x_1,\ldots,x_n]^S$ は有限個の不変式で生成されるか？

しかし，1901 年のパリ国際数学者会議ではこの問題ではなく，これを特別な場合として含む別の問題を提出した．理由は次のとおりである．「ヒルベルト数学の問題」（一松　信訳，共立出版，1969 年）より彼自身の文章を引用しよう．

「14．ある完全函数系の有限生成性の証明

代数的不変式の理論において，私は思うのだが，完全函数系の有限性の問題は特に興味深いものである．最近マウレル（L. Maurer）は，ゴルダンと私が以前に証明した不変式論の有限性定理を，普通の不変式論で扱っているような一般射影群上でなく，不変式を定義する任意の部分群を基礎にして，拡張することに成功した．⋯」

このように 1901 年の時点で上の問題は解かれたと思われていたのである．この問題はその後も別の数学者によって肯定的解決が宣言されたようだが，約半世紀を経てとうとう反例が発見された．

ただ有限性の証明にまだまったく触れていないので次回はその方に進むつもりである．

− − −

演習問題 4 次以上の方程式 $F_n(x) = 0$ に対して，行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$ が半不変式であることを証明せよ．
（これは catalecticant と呼ばれる．）

− − −

今回のような古典的不変式を勉強するにあたっては，「不変式論」（紀伊国屋，1977 年）に大変助けられましたが，著者の森川寿先生は 2005 年 5 月に他界なされました．謹んでご冥福をお祈りいたします．

第 3 回

ヒルベルトの基定理とワイルの手品

これまで不変式の例をいろいろと挙げてきた．どんなものか少し感じがつかめただろうか？今回は不変式全体が有限生成であることが示せる場合にそのよって来るところを説明してみたい．大雑把にいうと二つの有限性 (§3) からくる．一つの有限性のおかげで平均がとれ，それでもって不変式が得られる．たとえば，任意の関数 $f(x)$ から $f^{ev}(x) = \{f(x) + f(-x)\}/2$ として偶関数，すなわち，$x \mapsto -x$ で不変なものが得られる．こういう事実を利用して，不変式環の有限生成性をあるイデアルの有限生成性に帰着させることができる．

もう一つの有限性はヒルベルトの基定理と呼ばれるもので, イデアルの方の有限生成性を保証してくれる．多くの現代代数学の発展がここに起源をもつ有名な定理である．

なお，今回は考える数の範囲（今までは k と記した）を複素数の全体 $\mathbb{C}$ とする．

§1　復習と目標

まず初回の設定をすこし復習しよう．n 変数多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は $f((x_1, \ldots, x_n)A)$ と（恒等的に）等しいとき，n 次正則行列 A に関して不変であるという．また，n 次正則行列の集合 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ が与えられたとき，すべての $A \in G$ に関して不変であるとき，G 不変と呼んだ．G が積と逆に関して閉じている，すなわち，$A, B \in G \Rightarrow AB^{-1} \in G$ の成立するときが本質的である．このとき，G は行列群であるという．以下ではいつもこれを仮定する．次の命題が一つの目標である．

命題 1．（初回の命題 18）有限行列群 $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ に対して G 不変式全体のなす環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ は有限個の不変式で生成される．

前回は n 次代数方程式 $F_n(x) = 0$ の不変式を考察した．それは

$$F_n(x) = ax^n + nbx^{n-1} + \binom{n}{2}cx^{n-2} + \binom{n}{3}dx^{n-3} + \cdots$$

の係数を独立変数とする $(n+1)$ 変数多項式 $f(a, b, c, d, \ldots)$ でもって，

$$F_n(x) \mapsto (rx+s)^n F_n\left(\frac{px+q}{rx+s}\right), \tag{3.1}$$

$$p, q, r, s \in \mathbb{C}, \quad ps - qr = 1 \tag{3.2}$$

に伴う $a, b, c, d, \ldots$ の線形変換の全体 $G(n)$ でもって不変な多項式のことである．これは無限行列群で，たとえば，$n = 2$ のとき

$$G(2) = \left\{ \begin{pmatrix} p^2 & pq & q^2 \\ 2pr & ps+qr & 2qs \\ r^2 & rs & s^2 \end{pmatrix} \mid ps - qr = 1 \right\}$$

である．(2) をみたす行列 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の全体は 2 次特殊線形群と呼ばれ，$SL(2, \mathbb{C})$ で表される．(1) は準同形写像

$$\rho : SL(2, \mathbb{C}) \to GL(n+1, \mathbb{C}) \tag{3.3}$$

を定め，$G(n)$ はこれの像に他ならない．次のゴルダンの定理がもう一つの目標である．

定理 2．（前回の定理 5）方程式の不変式全体のなす環 $\mathbb{C}[a, b, c, d, \ldots]^{G(n)}$ も有限個の不変式で生成される．

§2　平均化作用素

$G = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ は有限行列群とする．また，A は G の勝手な元とする．このとき，

$A_1A, A_2A, \ldots, A_mA$ は，$A_1, A_2, \ldots, A_m$ を並べ替えただけで，集合としては G と一致することに注意しよう．n 変数多項式 $f(\underline{x})$ に対してそれの G に関する平均を

$$f^{av}(\underline{x}) := \{f(\underline{x}A_1) + f(\underline{x}A_2) + \cdots + f(\underline{x}A_m)\}/m$$

でもって定義する．上で注意したことにより，$f(\underline{x}A) = f(\underline{x})$ がすべての $A \in G$ に対して成立する．以下の性質はどれも容易に確かめることができる．

1. $f^{av}(\underline{x})$ は G 不変である．
2. $f(\underline{x})$ が G 不変なら $f^{av}(\underline{x}) = f(\underline{x})$ である．
3. 加法を保つ：$(f+h)^{av} = f^{av} + h^{av}$．
4. 乗法は一般には保たないが，どちらかが G 不変ならばそれを保つ．たとえば，f が G 不変なら $(fg)^{av} = fg^{av}$．

後半では ^{av} を多項式の全体 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ から自分自身への写像とみているので $f(\underline{x})$ 等から変数 $(\underline{x})$ を省いた．この写像(平均化作用素) $f \mapsto f^{av}$ の像は不変式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ に一致する．また，$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G$ の上においてそれは恒等写像である．

例 3. G がすべての置換行列よりなるとき，$m = n!$ で ^{av} は対称化作用素と呼ばれる．任意の多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，

$$f^{av}(\underline{x}) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$$

は対称式である．また，偶置換だけをわたる平均 $\frac{2}{n!}\sum_{\sigma:偶} f(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n))$ は半対称式である．

§3　コンパクト性と基定理

有限集合のもつ性質を抽出して一般化することによって，いろんな数学的対象のいろんな有限性が定義される．位相空間の（可算）コンパクト性

「どんな（可算）開被覆 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対しても，ある自然数 m が存在して $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ は被覆になっている．(よって，どの U_i も $\bigcup_{j=1}^{m} U_j$ に含まれる．)」

もその一つである．これは点列コンパクト性（どんな点列も収束する部分列を含む）とほぼ同値である．例としては次を知っていれば困らない．

例 4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合（例えば球面 S^{n-1}）はコンパクトである．

これから説明する有限性はコンパクト性と同じ雰囲気をもっている．最も簡単な場合として n 項縦ベクトル ${}^t(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 全体のなすベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ を考えよう．これは無限集合であるが，次のような有限性をもっている．

命題 5. ベクトルのどんな無限列 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots \in \mathbb{C}^n$ に対しても，ある自然数 m が存在してどの $\vec{a}_i$ も $\vec{a}_1, , \ldots, \vec{a}_m$ の線形結合で表すことができる．

証明　項数 $n \geq 0$ に関する帰納法．$n = 0$ のときはすべてのベクトルが零なので主張は自明である．$n \geq 1$ としてベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ の第 n 成分 α_{1n}，α_{2n}，$\alpha_{3n}, \cdots$ に着目する．これがすべて零ならどの $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ も $\mathbb{C}^{n-1}$ に属するので帰納法の仮定より OK である．l 番目 α_{ln} が零でないとして $\mathbb{C}^{n-1}$ に属するベクトル列

$$\vec{b}_1 := \vec{a}_{l+1} - \frac{\alpha_{l+1,n}}{\alpha_{ln}}\vec{a}_l,\ \vec{b}_2 := \vec{a}_{l+2} - \frac{\alpha_{l+2,n}}{\alpha_{ln}}\vec{a}_l, \ldots$$

を考える．帰納法の仮定より，どの $\vec{b}_i$ も $\vec{b}_1, , \ldots, \vec{b}_m$ の線形結合で表すことができるような m が存在する．簡単な計算より，どの $\vec{a}_i$ も $\vec{a}_1, , \ldots, \vec{a}_l, , \ldots, \vec{a}_{m+l}$ の線形結合で表せることがわかる．◇

これはベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ の有限次元性とよばれる性質である．線形代数の初歩を仮定してよいなら次のようにも証明できる．$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \ldots$ の成分を並べてえられる $n \times \infty$ 行列

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \cdots \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \cdots \end{pmatrix}$$

の最初の l 列よりなる行列の階数を $r(l)$ とおく．このとき，

$$0 \leq r(1) \leq r(2) \leq r(3) \leq \cdots \leq n$$

が成立する．よって，ある m から先で $r(l)$ は一定値になり，上の命題が成立する．

次に整数の全体（のなす環）

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$$

を考えよう．これも無限集合であるが命題 5 に似た有限性をもつ．

命題 6. 整数のどんな無限列 $n_1, n_2, n_3, \ldots$ に対しても，ある自然数 m が存在してどの n_i も $n_1, , \ldots, n_m$ の整数係数 1 次結合で表すことができる．

証明 最初の l 個の整数 $n_1, n_2, \ldots, n_l$ の最大公約数を $gcd(l)$ とおくとき，

$$n_1 = gcd(1) \geq gcd(2) \geq gcd(3) \geq \cdots \geq 1$$

が成立する．よって，ある m から先で $gcd(l)$ は一定値 n になる．ユークリッド互除法により，n は $n_1, n_2, \ldots, n_m$ の整数係数 1 次結合で表される．また，n_i はすべて n の倍数である．よって，命題が成立する．◇

この命題における「整数」を「多項式」で置き換えたものが成立するというのがヒルベルトの基定理である．

定理 7. n 変数多項式のどんな無限列 $f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), f_3(\underline{x}), \ldots$ に対しても，ある自然数 m が存在してどの $f_i(\underline{x})$ も $f_1(\underline{x}), \ldots, f_m(\underline{x})$ の多項式係数 1 次結合 $\sum_{i=1}^m f_i(\underline{x}) g_i(\underline{x})$ で表すことができる．

§4　有限生成性（命題 1）の証明

n 変数単項式 $x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ の指数和 $k_1 + \cdots + k_n$ による次数付けを考える．すなわち，多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ の次数 d をそれに（零でない係数で）含まれる単項式の指数和の最大と定める．

定義 8. 多項式 $f(x_1, \ldots, x_n)$ は，それに含まれる単項式の次数がすべて d に等しいとき d 次斉次式という．

勝手な多項式 f は $f_d + f_{d-1} + \cdots + f_1 + f_0$ と斉次式の和に一意的に分解する．ただし，f_i は i 次斉次式または零で，f の斉次成分と呼ばれる．f が G 不変であることはすべての斉次成分 f_i が G 不変であることと同値であることに注意しよう．

次数 d の単項式は有限個しかない．それらは d 次斉次式全体のなすベクトル空間の基底をなす．d 次斉次式で G 不変なもの全体はこのベクトル空間の部分空間になっている．よって有限個の基底をもつ．d を止める毎に G 不変式は有限次元であるが，d を走らせると無限次元になる．それでも環としては有限個で生成されるというのが命題 1（や定理 2）の主張である．準備した平均化作用素 $f \mapsto f^{av}$ と基定理でもってこれを証明しよう．

G 不変 d 次斉次式の基底を次数 $d = 1, 2, 3, \ldots$ の順番に並べたものを $f_1, f_2, f_3, \ldots$ とし，これに定理 7 を適用する．[*1] どの f_i も $f_1, \ldots, f_m$ の多項式係数 1 次結合で表すことができるような m が存在する．次が主張である．

$\boxed{G \text{ 不変式の全体 } \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^G \text{ は } f_1, \ldots, f_m \text{ で生成される．}}$

勝手な G 不変斉次式 h が $f_1, \ldots, f_m$ で生成される部分環に入ることを示せば十分である．これを h の次数に関する帰納法で証明する．次数が 0 なら h は定数で何も証明することはないので次数は正とする．$f_1, f_2, f_3, \ldots$ の定義より，h は $f_1, \ldots, f_m$ の多項式係数 1 次結合 $\sum_{i=1}^m h_i f_i$ で表される．h や $f_1, \ldots, f_m$ は斉次式だから，$h_1, \ldots, h_m$ も斉次式としてよい．$h = \sum_{i=1}^m h_i f_i$ の両辺の平均をとる．§2 の性質（特に 4）より $h = h^{av} = \sum_{i=1}^m h_i^{av} f_i$ を得る．f_i の次数は正なので，各 h_i^{av} は h より次数が低い．よって帰納法の仮定によりそれらは $f_1, \ldots, f_m$ で生成される部分環に入る．よって h もそうである．◇

§5　コンパクト群による不変式環

命題 1 をコンパクトな行列群に一般化しよう．これは体積が有限なので有限群と同じように多項式を平均化して不変式にすることができる．もっとも簡単なコンパクト群は絶対値 1 の複素数の全体 $S^1 = \{e^{i\theta} \,|\, \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$ である（例 4）．円周群と呼ぼう．最初に $SL(2, \mathbb{C})$ の中の円周群

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \,|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

の準同形写像 (3.3) による像 $\rho(K) \subset GL(n+1, \mathbb{C})$ を例として考えよう．円周行列群 $\rho(K)$ に関して不変な $(n+1)$ 変数多項式は同重 (isobaric) 多項式と呼ばれ

[*1] $d = 0$（定数）は除いていることに注意しよう．

る．多項式 $f = f(a,b,c,d,\ldots)$ に対して K に関する平均を

$$f^{av} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f((a,b,c,d,\ldots)\rho\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix})d\theta$$

でもって定めると，前節と同じ議論でもって同重多項式の全体 $\mathbb{C}[a,b,c,d,\ldots]^{\rho(K)}$ は有限生成であることがわかる．

$SL(2,\mathbb{C})$ はもっと大きなコンパクト群を含む．$\begin{pmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p}\end{pmatrix}$ という形の行列に着目しよう．ただし，$^-$は複素共役を表す．これの行列式は $|p|^2+|q|^2$ である．よって，3 次元球面 $\{(p,q)\,|\,|p|^2+|q|^2=1\}\subset\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$ が $SL(2,\mathbb{C})$ に入っている．容易に確かめられるようにこれも行列群である．2 次ユニタリ群と呼ばれ，$SU(2)$ と表される．上と同じように，$SU(2)$ に関する平均

$$f^{av} := \frac{1}{2\pi^2}\int_{S^3} f((a,b,c,d,\ldots)\rho\begin{pmatrix} p & q \\ -\bar{q} & \bar{p}\end{pmatrix})dS$$

を考える．[*2] $SU(2)=S^3$ の元の掛算は S^3 の回転を導くので，通常の測度 dS はそれで不変である．よって，この f^{av} は $SU(2)$ 不変で，前節の議論から次をえる．

命題 9. $\rho(SU(2))\subset GL(n+1,\mathbb{C})$ で不変な多項式全体のなす環 $\mathbb{C}[a,b,c,d,\ldots]^{\rho(SU(2))}$ は有限生成である．

§6　ゴルダンの定理の証明

定理 2 を命題 9 を使って証明しよう．[*3] この方法はワイル (Weyl) が始めたもので，ユニタリ手品 (unitary trick) と呼ばれる．準備として前回への補足が必要である．$G(n)$ の部分集合

$$H(n) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & q & \ldots & q^n \\ 0 & 1 & \ldots & nq^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix} \,|\, q\in\mathbb{C}\right\}$$

でもって不変な $(n+1)$ 変数多項式を n 次代数方程式の半不変式と呼んだことを思い出そう．$H(n)$ の元はベキ零行列

$$N+ := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{pmatrix}$$

を用いて $\exp(qN_+)$ と表される．よって，この N_+ に対応する線形（偏）微分作用素を

$$D = a\frac{\partial}{\partial b} + 2b\frac{\partial}{\partial c} + 3c\frac{\partial}{\partial d} + \cdots$$

とするとき，$f(a,b,c,d,\ldots)$ が半不変式であることは微分方程式 $Df=0$ と同値である．

$H(n)$ は

$$U_+ := \left\{\begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1\end{pmatrix} \,|\, q\in\mathbb{C}\right\}$$

の (3.3) の準同形写像 ρ による像であることに注意しよう．これの転置である

$$U_- := \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1\end{pmatrix} \,|\, r\in\mathbb{C}\right\}$$

の像による不変性は微分方程式 $\Delta f = 0$，ただし，

$$\Delta := nb\frac{\partial}{\partial a} + (n-1)c\frac{\partial}{\partial b} + (n-2)d\frac{\partial}{\partial c} + \cdots,$$

と同値である．U_+ と U_- が群として $SL(2,\mathbb{C})$ を生成するので次をえる．

命題 10. $f(a,b,c,d,\ldots)$ が方程式の不変式であることは $Df=\Delta f=0$ と同値である．

これはケーリー・アロンホールド (Aronhold) の方程式と呼ばれる．

■定理 2 の証明　2 次ユニタリ群 $SU(2)$ は §5 でみた K 以外にも次のような円周群 S^1 を含む．

$$K' := \left\{\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0\end{pmatrix} \,|\, \theta\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right\},$$

$$K'' := \left\{\exp\begin{pmatrix} 0 & i\theta \\ i\theta & 0\end{pmatrix} \,|\, \theta\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right\}.$$

$\rho(SU(2))$ で不変な多項式 $f=f(a,b,c,d,\ldots)$ は当然 $\rho(K')$ や $\rho(K'')$ で不変であるが，それは微分方程式 $(D-\Delta)f=0$ や $i(D+\Delta)f=0$ と同値である．よって，命題 10 より，f は方程式の不変式であり，定理は命題 9 より従う．◇

[*2] 偶数次元の単位球 $B^{2n}\subset\mathbb{R}^{2n}$ の体積は $\pi^n/n!$ に，その表面積（S^{2n-1} の体積）はそれの $2n$ 倍に等しい．

[*3] ヒルベルトは同重多項式と D,Δ だけで証明した．（例えば，『数学のたのしみ』(2001 年 1 月号) の拙稿．）

§7　付録：基定理の証明

そのままの形で証明すると汚くなってしまう．抽象度が増すがイデアルの言葉で言い換えて証明しよう．

定義 11. 多項式の集合 $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ は次の２性質をみたすときイデアルという．

1. 和に関して閉じている：$h(\underline{x}), h'(\underline{x}) \in I$ なら $h(\underline{x}) + h'(\underline{x}) \in I$.
2. 多項式倍でも閉じている：$f(\underline{x}) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ かつ $h(\underline{x}) \in I$ なら $f(\underline{x})h(\underline{x}) \in I$.

２番目の条件は「積に関して閉じている」（部分環の条件）と混同しないよう注意しよう．

例 12. 多項式の列 $\mathbf{f} = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), f_3(\underline{x}), \ldots)$ を固定したとき，それらの多項式係数１次結合 $f(\underline{x}) = \sum_i f_i(\underline{x})g_i(\underline{x})$（有限和）の全体 $I_{\mathbf{f}}$ はイデアルである．これを $\mathbf{f}$ で生成されるイデアルという．

イデアル I は $I = I_{\mathbf{f}}$ となる有限列 $\mathbf{f}$ が存在するとき有限生成であるという．

定理 13. 多項式環のイデアル $I \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ は有限生成である．

例 12 の無限列 $\mathbf{f}$ で生成されるイデアル $I_{\mathbf{f}}$ にこの定理を適用しよう．$I_{\mathbf{f}}$ を生成する有限個の多項式 $h_1(\underline{x}), \ldots, h_l(\underline{x}) \in I_{\mathbf{f}}$ がある．各 $h_i(\underline{x})$ は $\sum_j f_j(\underline{x})g_{ij}(\underline{x})$（有限和）と表される，よって，これらの表示に現れる有限個の $f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \ldots, f_m(\underline{x})$ でもって $I_{\mathbf{f}}$ が生成される．特に，どの $f_i(\underline{x})$ も $f_1(\underline{x}), \ldots, f_m(\underline{x})$ の多項式係数１次結合で表すことができる．よって，上の定理から定理７がしたがう．

■定理 13 の証明　変数の個数 n に関する帰納法．n 変数では正しいと仮定して，$(n+1)$ 変数多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, y]$ でも正しいことを示す．§4 では指数和を次数として使ったが，この節では最後の変数 $y (= x_{n+1})$ に関する次数付けを使う．y に関して d 次な多項式 $f(\underline{x}, y)$ は $f_d(\underline{x})y^d + f_{d-1}(\underline{x})y^{d-1} + \cdots + f_0(\underline{x})$ と一意的に表される．最高次「係数」$f_d(\underline{x}) \neq 0$ に着目することが多くの問題解法に役立つ．

イデアル I に属する多項式で（y に関する）次数が d 以下のものを考える．そしてそれらの y^d の係数の全体のなす集合を $\mathfrak{a}_d \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ とおく．$\mathfrak{a}_d$ はイデアルであり，d に関して増大列 $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots$ になっている．和集合 $\mathfrak{a}_\infty = \cup_{d \geq 0} \mathfrak{a}_d \subset \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ もイデアルであるが，これは I に属する多項式の最高次係数全体（と零）のなす集合に他ならない．

帰納法の仮定より各 $\mathfrak{a}_d$ や $\mathfrak{a}_\infty$ は有限生成である．まず後者の生成元を考える．作り方より，それらの最高次係数が $\mathfrak{a}_\infty$ を生成するような有限個の多項式 $f_1(\underline{x}, y), \ldots, f_m(\underline{x}, y) \in I$ を選ぶことができる．これらの次数の最大値を d_{max} とする．また，y^i の係数が $\mathfrak{a}_i$ を生成するような有限個の i 次多項式 $f_1^{(i)}(\underline{x}, y), f_2^{(i)}(\underline{x}, y), \ldots \in I$ を選ぶことができる．このとき，任意の $f(\underline{x}, y) \in I$ は $f_1(\underline{x}, y), \ldots, f_m(\underline{x}, y)$ の適当な多項式係数１次結合を引くことにより次数を d_{max} より小さくできることに注意しよう．これより，I は $f_1(\underline{x}, y), \ldots, f_m(\underline{x}, y)$ と $0 \leq i \leq d_{max} - 1$ に対する $f_1^{(i)}(\underline{x}, y), f_2^{(i)}(\underline{x}, y), \ldots$ 達とで生成される．◇

§8　初回の演習問題の解答

問題２：例 13 より $y_1 = s_1$ と y_2^2, y_3^2, y_4^2 と $y_2y_3y_4$ より生成される．$y_2y_3y_4$ は演習問題１でみたように，$s_1^3 - 4s_1s_2 + 8s_3$ に等しい．y_2^2, y_3^2, y_4^2 は s_1 と $x_1x_2 + x_3x_4$，$x_1x_4 + x_2x_3$，$x_1x_3 + x_2x_4$ で表される．

問題３：次の変数変換でもって置換 (1234) は対角化される．

$$
\begin{aligned}
y_0 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\
y_1 &= x_1 + \sqrt{-1}x_2 - x_3 - \sqrt{-1}x_4, \\
y_2 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\
y_3 &= x_1 - \sqrt{-1}x_2 - x_3 + \sqrt{-1}x_4
\end{aligned}
$$

各 y_i は $(\sqrt{-1})^i$ 倍されるので，不変式環は７個の多項式 $y_0, y_1y_3, y_2^2, y_1^2y_2, y_3^2y_2, y_1^4, y_3^4$ で生成される．

問題４：単項式 $M_l = x^{m_l}y^{n_l}$ は $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して，$y, xy^2, x^4y^7, x^{15}y^{26}, \ldots$ である．各 $l \geq 1$ に対して，$n \geq \frac{n_l}{m_l}m$ をみたす単項式 x^my^n で生成される部分ベクトル空間は $k[x, y]$ の部分環である．これを R_l で表す．$\frac{n_l}{m_l}$ は単調減少で $\sqrt{3}$ に収束する．よって，$\{R_l\}_{l \geq 1}$ は増大列で，$\bigcup_l R_l = R$ が成立する．$n_{l-1}m_l - m_{l-1}n_l = 1$ に注意しよう．R_1 は $y = M_0$

と $xy^2 = M_1$ で生成され，R_l は R_{l-1} と M_l で生成される．よって，R は $M_l, l \geq 0,$ で生成される．

第 4 回

第 14 問題に対する反例と二つの未解決問題

m 変数多項式 $f(x_1,\ldots,x_m)$ は

$$f(x_1A,\ldots,x_mA)=f(x_1,\ldots,x_m)$$

をみたすとき，m 次正則行列 A に関して不変であるという．[*1] また，S が正則行列の集合で，S に属するすべての行列に関して不変なとき，$f(x_1,\ldots,x_m)$ は S 不変式といい，これらの全体を $k[x_1,\ldots,x_m]^S$ で表す．前回までは次の問題の背景と肯定的な結果を述べてきた．[*2]

■ヒルベルトの第 14 問題（線形作用版） S 不変式環 $k[x_1,\ldots,x_m]^S$ は有限個の不変式で生成されるか？

ヒルベルト自身は有限生成定理以降，整数論やその他の分野に研究領域を変え，不変式論に戻ってくることはなかった．そのため彼がこの問題についてどう考えていたかはわからない．その後，ザリスキ (Zariski)，リース（Rees），永田を始めとする数学者達（専門は代数幾何学や可換環論）によって解決への努力がなされた．そして，永田は 1958 年にこの問題の反例を構成することに成功した．永田の目指したシナリオは次の通りである．

♠　不変式環 $k[x_1,\ldots,x_m]^S$ には無理数的な傾きが現れ，そのために無限生成になってしまうことがある．

無理数の発見はピタゴラス教団の人達を混乱させたそうだが，上の発見も多くの人を失望させた（そして，させ続けている）と想像する．

前回説明したようにヒルベルトの有限生成定理は二つの有限性に基づいている．一つは多項式環自体のもので，もう一つは正則行列の集合 S で生成された部分群 $G\subset GL(n)$ に関するものである．今回考えるのは G がそのような有限性（平均をとって不変式が作れる）をもたない場合で，実際に反例が作れてしまう．しかし，そのような群でも不変式環が有限生成になるような良い十分条件があるだろうか？

永田の反例はヒルベルトの第 14 問題を新しいステージにあげたとも言える．ヒルベルトとは違ったアイデアでもってより広い範囲で有限生成を保証する新しい定理を見つけるのは 21 世紀の問題のひとつだろう．上の第 14 問題の反例を紹介するとともにこれに関連する二つの未解決問題をあげて読者諸賢の挑戦を期待したい．

§1　どこまで煮詰まったか？

正則行列 A は何乗かして零になるときベキ零，単位行列を引いてベキ零なときベキ単 (unipotent) という．ベキ単はすべての固有値が 1 であることと同値で，ジョルダンの定理により対角線に 1 が並ぶ上半 3 角行列

$$\begin{pmatrix}1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

に標準化できる．

ヒルベルトの第 14 問題の正否は次が正しいかどうかと同値である．

■ベキ単第 14 問題 S はベキ単な上半 3 角行列 (4.1) だけからなるとき，S 不変式環 $k[x_1,\ldots,x_m]^S$ は有限個の不変式で生成されるか？

連載の冒頭にあげたユークリッド変換による 2 次

[*1] x_iA, $1\le i\le m$, は $(x_1,\ldots,x_m)A$ の第 i 成分である．

[*2] k は考えている数の範囲を示す．有理数の全体 $\mathbb{Q}$ か実数の全体 $\mathbb{R}$ か複素数の全体 $\mathbb{C}$．

曲線

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0 \tag{4.2}$$

の代数幾何的な分類を例として説明しよう．

ユークリッド変換

$$g=g_{r,s,\theta}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta & r\\ -\sin\theta & \cos\theta & s\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

の導く係数の変換

$$\begin{pmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{pmatrix}\mapsto {}^t g\begin{pmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{pmatrix}g \tag{4.3}$$

全体 $G\subset GL(6)$ に関する不変式環 $k[a,b,c,d,e,f]^G$ が問題となる．これを求めるのは二つのプロセスに分かれる．

1. 平行移動の全体 $G_u=\{g_{r,s,0}\}$ に関する不変式環 $k[a,b,c,d,e,f]^{G_u}$ を求める．
2. $k[a,b,c,d,e,f]^{G_u}$ の中で回転の全体 $G_0=\{g_{0,0,\theta}\}$ に関する不変式の全体を求める．これが $k[a,b,c,d,e,f]^G$ に一致する．

G_u はベキ単な上半 3 角行列のみよりなる．(i) がこの場合のベキ単第 14 問題である．こちらの有限生成が解れば，後の方は前回のような一般論から $k[a,b,c,d,e,f]^G$ が従う．もっともこの例の場合は簡単で，$k[a,b,c,d,e,f]^{G_u}$ は 2 次の部分の係数 a,b,c と行列式（判別式）$D=\begin{vmatrix}a & b & d\\ b & c & e\\ d & e & f\end{vmatrix}$ で生成される．また，a,b,c,D の多項式で G_0 不変なものの全体は単に有限生成であるだけでなく具体的に $a+c, ac-b^2$ と D で生成されることがわかる．

一般の部分群 $G\subset GL(m)$ の場合も同様である．G をそのザリスキ閉包[*3]で置き換える．こうしても不変式環は変わらない．このとき，G はベキ単根基 (unipotent radical) と呼ばれる正規部分群 G_u をもつ．G_u の元はすべてベキ単で，$x_1,\ldots,x_m$ をそれらの線形変換で置き換えることにより，G_u の元はすべて上半 3 角行列よりなるようにできる．G に関する不変式環は G_u に関する不変式環 $k[x_1,\ldots,x_m]^{G_u}$ と剰余類群 G/G_u の話に分解する．G/G_u は前回のような議論（平均をとって不変式が作れる）ができる群[*4]なので次が成立する．

定理 1. ベキ単根基に関する不変式環 $k[x_1,\ldots,x_m]^{G_u}$ が有限生成なら，もとの不変式環 $k[x_1,\ldots,x_m]^G$ も有限生成である．

$k[x_1,\ldots,x_m]^{G_u}$ は必ずしも多項式環ではないので，この定理を証明するには設定を（有限変数）多項式環から有限生成な環に一般化しておかないといけない．ただ，それは技術的なことでヒルベルトやワイルのアイデアを超えるものが必要なわけではない．

§2　ベキ単行列 3 個の反例

永田の考えた不変式環を紹介しよう．$n\times n$ 個のブロックに分けたとき，対角ブロック $A^{(1)},A^{(2)},\ldots,A^{(n)}$ 以外はすべて零になっている行列

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A^{(1)} & 0 & \cdots & 0\\ \hline 0 & A^{(2)} & & 0\\ \hline \vdots & & \ddots & \vdots\\ \hline 0 & 0 & \cdots & A^{(n)}\end{array}\right)$$

を

$$A^{(1)}\oplus A^{(2)}\oplus\cdots\oplus A^{(n)}$$

で表す．各 $A^{(i)}$ が 2 次正方行列であるようなベキ単な $2n$ 次正方行列

$$\begin{pmatrix}1 & a_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}1 & a_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{pmatrix}1 & a_n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

を $A_{2n}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ で表す． $A_{2n}(a_1,\ldots,a_n)$ と $A_{2n}(a'_1,\ldots,a'_n)$ は可換であることに注意しよう．（積は $A_{2n}(a_1+a'_1,\ldots,a_n+a'_n)$．）

今までの記号使いを変更することになるが，$2n$ 個の変数を $x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n$ で表す．$A_{2n}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ に関しての不変性は

$$\begin{aligned} &f(x_1,a_1x_1+y_1,\ldots,x_n,a_nx_n+y_n)\\ &\qquad=f(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n)\end{aligned} \tag{4.5}$$

[*3] G 上で消える多項式すべての共通零点集合のこと．

[*4] 簡約可能代数群 (reductive algebraic group) が正式な名称である．

である．(4.4) の形の行列よりなる集合 S に関する不変式環 $k[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]^S$ を永田型不変式環と呼ぶ．

定理 2 (永田雅宜 1958 年)． 13 個の 32 次ベキ単行列 (4.4) の集合 $S \subset GL(32, \mathbb{C})$ に関する永田型不変式環 $\mathbb{C}[x_1, y_1, \dots, x_{16}, y_{16}]^S$ は，S が「十分一般」なら有限生成でない．

「十分一般」はなかなか難解でここでは説明できない．その後の改良によりこの難解な部分は避けられるようになった．また，行列の個数も 3 個にまで落とされた．筆者が現時点で知るもっとも簡単な反例は次の通りである．

定理 3． 3 つの 18 次ベキ単行列 $A_i := A_{18}(1^i, 2^i, \dots, 9^i)$，$i = 0, 1, 3$，に関する永田型不変式環 $k[x_1, y_1, \dots, x_9, y_9]^{\{A_0, A_1, A_3\}}$ は有限生成ではない．

§3　ベキ単行列２個はどうか？

ベキ単第 14 問題に関する肯定的な結果として次がある．

定理 4 (マウレルーワイツェンベック)． 1 個のベキ単行列 A に関する不変式環 $k[x_1, \dots, x_m]^A$ は有限個の不変式で生成される．

マウレルについては第 2 回に説明した．ワイツェンベック (Weitzenböck) の論文は 1932 年に発表されたが，これも「第 14 問題に対する全面的な肯定的解決」を主張するものだそうである．ベキ単行列の個数 s に関する帰納法でベキ単第 14 問題を目指したときの拠り所となる結果である．だが，目指したことは実は成立しない．上の結果は後の人がこういう努力の中から正しい部分を救い出したもので，誰がいつ確定させたかを明確にしにくい．このようなもやもやの中で発見された定理 2 は非ユークリッド幾何やコペルニクスの地動説のようなものであって，人々の認識を変えた大きな業績であろう．

定理 4 の典型例は方程式の半不変式（前回）や 1 個の $A_{2n}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ に関する不変式環である．後者は $A_{2n}(1, 1, \dots, 1)$ に限定しても一般性を失わない．明らかに $x_1, \dots, x_n$ は $A_{2n}(1, 1, \dots, 1)$ 不変である．それ以外に $2 \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$$

の 2 次小行列式 $p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$ も $A_{2n}(1, 1, \dots, 1)$ 不変式である．

定理 5． ベキ単行列 $A_{2n}(1, 1, \dots, 1)$ に関する不変式環 $k[x_1, y_1, \dots, x_n, y_n]^{A(1, \dots, 1)}$ は $x_1, \dots, x_n$ と p_{ij} $(1 \le i < j \le n)$ で生成される．

さて，定理 3 と定理 4 を考え合わせることにより，次が浮かび上がってくる．新しい有限生成性定理を見つけるヒントになるかもしれない．

■問題　2 個の可換なベキ単上半 3 角行列 A, B に関する不変式環 $k[x_1, \dots, x_m]^{A,B}$ は有限生成か？

永田型不変式環に対してこれは正しい．生成系（2^n 個）も求められている (Casteravat-Tevelev 2005 年)．永田型以外の例として二つの $(2n + 1)$ 次ベキ単行列

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & & 1 & & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & & & 1 & 0 \\ \hline & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & & 0 & 1 & & \\ & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ & & 1 & 0 & & & 1 \\ \hline & & & 1 & & & \\ \hline & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right)$$

の場合を考えよう．ただし，ブロック分けは各々 $(n + n + 1)^2$ と $(n + 1 + n)^2$ である．

定理 6 (内藤弘嗣 2005 年)． 上の A, B に関する不変式環 $k[x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_n]^{\{A,B\}}$ は次の不変式達で生成される．

1. $x_0, \dots, x_{n-1}$,

2. $3 \times (n+1)$ 行列

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{n-1} & \\ & x_0 & \dots & x_{n-1} & x_{n-1} \\ y_0 & y_1 & \dots & y_{n-1} & y_n \end{pmatrix}$$

の *3* 次小行列式等々．

$5 \times (n+2)$ 行列の 5 次小行列式，$7 \times (n+3)$ 行列の 7 次小行列式,$\cdots$ と進んで最後はシルベスタ行列式（終結式を具体的に表示するもので $2n+1$ 次）で終わる．生成元の個数

$$\binom{n}{1}+\binom{n+1}{3}+\binom{n+2}{5}+\cdots+\binom{2n}{2n-1}+\binom{2n+1}{2n+1}$$

はフィボナッチ数である．

§4　別の未解決問題

2 変数多項式 $f = f(x, y)$ に点 $p = (a, b)$ の座標を代入した値 $f(a, b)$ が零のとき，f は p で消えると言うことにする．p で m 重に消えるとは $(m-1)$ 階までの偏微分がすべて p で消えることと定義する．また，m 重に消えて $(m+1)$ 重には消えないとき，m を f の p における消滅重複度と呼び．$\mathrm{mult}_p\, f$ で表す．

平面上の n 点 $p_1, \dots, p_n$ が与えられたとき，重複度の和と（総）次数の比を

$$\mu(f; p_1, \dots, p_n) := \sum_1^n \mathrm{mult}_{p_i} f / \deg f$$

とおく．非定数多項式 f をすべて動かしたとき，この比の上限を

$$\mu(p_1, \dots, p_n) := \sup_f \mu(f; p_1, \dots, p_n)$$

で表す．例えば，$n = 1$ のとき，$\mu = 1$ である．

■永田予想 1　$n \geq 9$ のとき，$\mu(p_1, \dots, p_n) = \sqrt{n}$ をみたす n 個の点 $p_1, \dots, p_n$ が存在するだろう．

予想を実感するために，簡単な次元勘定をしよう．次数が d の多項式の全体は $(d+1)(d+2)/2$ 次元のベクトル空間である．一方，点 p で m 重に消えるもの全体は部分空間をなすがその余次元は $m(m+1)/2$ 以下である．よって，

$$(d+1)(d+2)/2 - \sum_{i=1}^n m_i(m_i+1)/2 \tag{4.6}$$

が正なら（恒等的に）零でない d 次多項式でもって $p_1, \dots, p_n$ において $m_1, \dots, m_n$ 重に消えるものが存在する．

自然数の組 $(a; b_1, \dots, b_n)$ と自然数 l に対して，$d = la$, $m_i = lb_i$ とおいて上に代入し l に関する増大度をみる．代入したものは l に関する 2 次式で l^2 の係数は $(a^2 - \sum_1^n b_i^2)/2$ に等しい．$\sum_1^n b_i/a > \sqrt{n}$ のとき $a^2 - \sum_1^n b_i^2 < 0$ であることと次の命題が予想の一つの根拠である．

命題 7. $\mu(p_1, \dots, p_n) \geq \sqrt{n}$.

証明　$b_1 = \cdots = b_n (=: b)$ で $\sum_1^n b_i/a < \sqrt{n}$ のとき，$a^2 - \sum_1^n b_i^2 > 0$ である．よって，l が十分大きいとき，零でない la 次多項式でもって $p_1, \dots, p_n$ において lb 重に消えるものが存在する．◇

予想 1 はこの命題と次より従う．

■永田予想 2　$n > 9$ のとき，n 個の点 $p_1, \dots, p_n$ でもって，すべての非定数多項式 f に対して $\mu(f; p_1, \dots, p_n) < \sqrt{n}$ をみたすものが存在するだろう．

命題 8. $n \leq 9$ のとき，予想 2 は成立しない．

証明　2 点 p_1, p_2 を結ぶ直線の方程式を $f = f_{1,2}$ とすると，$n = 2, 3, 4$ のとき，$\mu(f; p_1, \dots, p_n) \geq 2 \geq \sqrt{n}$ となる．$n = 5, 6$ と $n = 7, 8, 9$ の場合は次元勘定 (4.6) を

$$(d; m_1, \dots, m_n) = (2; 1^5), (3; 2, 1^6), (6; 3, 2^7), (3; 1^9)$$

に対して適用する．5 点 $p_1, \dots, p_5$ を通る 2 次曲線の方程式 $f = f_{1,\dots,5}$ に対して $\mu(f; p_1, \dots, p_5) = 5/2$ である．よって，$n = 5, 6$ のとき，

$$\mu(p_1, \dots, p_n) \geq \frac{5}{2} > \sqrt{n}$$

である．すべての点で消えて 1 点では 2 重に消える 3 次式や，すべての点で 2 重に消えてある点では 3 重に消える 6 次式が存在するで，$n = 7, 8$ のとき，

$$\mu(p_1, \dots, p_7) \geq \frac{8}{3} > \sqrt{7},$$
$$\mu(p_1, \dots, p_8) \geq \frac{17}{6} > \sqrt{8}$$

となる．最後に，9点で消える3次式 $f_{1,\dots,9}$ に対して $\mu(f;p_1,\dots,p_9)\geq 9/3=\sqrt{9}$ が成立する．◇

永田は次を示すことによって第14問題の反例の構成に成功した．

命題 9. n が平方数の場合に予想2は正しい．

§5　永田流の証明

永田型不変式環においてベキ単行列 (4.4) が $(n-3)$ 個の場合が永田予想と関係している．前節では多項式の（総）次数と消滅重複度の比を考えたが，これは永田型不変式 $f(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$ では $x_1,\dots,x_n$ に関する次数 x-$\deg f$ と $y_1,\dots,y_n$ に関する次数 y-$\deg f$ の比を考えることに対応する．$(n-3)$ 個の行列が

$$A_{2n}(1,a_1,b_1,1,0,\dots,0),A_{2n}(1,a_2,b_2,0,1,\dots,0),\\ \dots,A_{2n}(1,a_{n-3},b_{n-3},0,0,\dots,1)$$

の場合を考える．

$$z_1'=y_1/x_1-\sum_{i=4}^{n}y_i/x_i,\quad z_1'=y_2/x_2-\sum_{i=4}^{n}a_{i-3}y_i/x_i,\\ z_2'=y_3/x_3-\sum_{i=4}^{n}b_{i-3}y_i/x_i$$

は上の $(n-3)$ 個のベキ単行列でもって不変であることに注意しよう．これらに $\prod_1^n x_i$ を掛けて分母を払うことによって不変式が得られる．これらを z_1,z_2,z_3 で表そう．

d 次多項式 $f(x,y)$ が $p_1=(a_1,b_1),\dots,p_n=(a_n,b_n)$ において $m_1,\dots,m_n$ 重に消えるなら

$$\frac{f(\frac{z_2}{z_1},\frac{z_3}{z_1})z_1^a}{\prod_1^n x_i^{m_i}}$$

は永田型不変式環に属することがわかる．命題7より，すべての有理数 $a\geq n-1-\sqrt{n}$ に対して x-$\deg f/y$-$\deg f=a$ なる永田型不変式 f が存在する．また，永田予想の成立を仮定すると，永田型不変式 f はいつも $f(z_2/z_1,z_3/z_1)z_1^a/\prod_1^n x_i^{m_i}$ の形に表されること等より，定数でなければ

$$x\text{-}\deg f/y\text{-}\deg f>n-1-\sqrt{n}$$

をみたす．よって，永田型不変式環は初回にあげた次の二つの例と同じ感じでもって有限生成でなくなる．

例 10. $k[x,y]$ の中で $n\geq\sqrt{3}m$ をみたす単項式 x^my^n で生成される部分ベクトル空間は部分環である．しかし，有限個の多項式で生成されない．

例 11. $y=0$ を代入して定数になる2変数多項式 $a+yg(x,y)$ $(a\in k)$ の全体 R は有限個の多項式では生成されない．

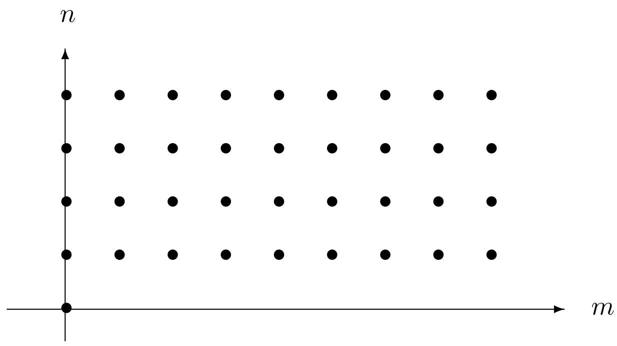

図 4.1　R 内の単項式 x^my^n

永田は命題9を示すことによって非有限生成性の証明に達した．現在では永田予想に依存しないより簡単な非有限生成性の証明がえられているが，例えば定理3の永田流の証明を考えてみる，すなわち，3変数以上に永田予想を一般化するのも面白いかもしれない．

§6　フェアリンデ型公式

行列2個の永田型不変式環や定理6の不変式に対しては3角関数でもってその個数を表示できる．これらはケーリー・シルベスタの個数公式（第2回の定理4）の高度な拡張で，永田型の場合はフェアリンデ公式と呼ばれるものになるが，定理6の不変式 $f(\underline{x},\underline{y})$ に対しても似た形の公式が成立する．$x_0,\dots,x_{n-1}$ に関する次数から $y_0,\dots,y_n$ に関する次数を引いたものをレベルと呼ぼう．

定理 12（向井・内藤）. $x_0,\dots,x_{n-1}$ に関しても $y_0,\dots,y_n$ に関しても斉次な不変式 $f(\underline{x},\underline{y})$ でもってレベル l のもの全体のなすベクトル空間の次元は

$$\frac{4}{2l+3}\sum_{j=1}^{l+1}\frac{\sin^2\frac{2j\pi}{2l+3}}{(2\cos\frac{2j\pi}{2l+3})^{2n-1}}$$

に等しい．（$l=1$ とするとフィボナッチ数である．）

このような公式は他の場合も存在するだろうか？存在は有限生成性と同じ根もつことがらではないかと想像している．

−−−

■第２回の演習問題の解答　$F_n(x) \mapsto F_n(x+q)$ に伴う変換でもって係数 b, c, d, e は

$$aq+b,\ aq^2+2bq+c, \cdots, aq^4+4bq^3+6cq^2+4dq+e$$

に変換される．問題の行列にこれらを代入したものは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 \\ q^2 & 2q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q & q^2 \\ 0 & 1 & 2q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に等しい．よって，その行列式 (catalecticant) は方程式 $F_n(x) = 0$ の半不変式である．