幾何学I試験問題解答

問題 1. 略

問題 2. まず

$$f(u,v)=a(u,v)+vb(u,v), \qquad a(u)=2\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix}, \quad b(u)=\begin{pmatrix}\sin(-u/2)\cos u\\ \sin(-u/2)\sin u\\ \cos(-u/2)\end{pmatrix}$$

に注意する．よって，M は xy 平面の半径が 2 の円の上の点 $a(u)$ から $b(u)$ の方向に v だけ進んだ点の全体である．また，a, b の定義域を $\mathbf{R}$ 全体に拡張すると $a(u+2\pi)=a(u)$, $b(u+2\pi)=-b(u)$ が成り立つから，u が 0 から 2π で $a(u)$ が一周する間に b が -1 倍になって，ちょうど一回ねじれてメビウスの帯になっていることを注意しよう．

Step 1. まず，f が単射であることを示す．M が自分自身と交わっていないことを示すことに他ならない．$f(u,v)=\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\\ z\end{smallmatrix}\right)$ としたときに，u, v が x, y, z から一意的に決まることを示せばよい．まず

$$x=(2+v\sin(-u/2))\cos u, \quad y=(2+v\sin(-u/2))\sin u$$

であって，$2+v\sin(-u/2)>1$ に注意する．したがって

$$\left(\begin{smallmatrix}\cos u\\ \sin u\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)/\left\|\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)\right\|$$

となる．だから u は x, y で定まる．u が x, y, z で定まれば，v もそうであることは，ほぼ明らかであるので省略する．

Step 2. $U_1=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid (x,y)$ は第一, 第二, 第三象限のいずれか $\}$, $U_2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid (x,y)$ は第一, 第三, 第四象限のいずれか $\}$ とおく．ただし，それぞれの集合のはじは取り除いておく．U_1, U_2 は $\mathbf{R}^3$ の開集合で，$M=(M\cap U_1)\cup(M\cap U_2)$ が成り立つ．このとき Step 1 の議論により

$$f\colon (0,3\pi/2)\times(-1,1)\to M\cap U_1, \qquad f\colon(-\pi,2/\pi)\times(-1,1)\to M\cap U_2$$

はそれぞれ同相写像であることは容易に分かる．ただし，問題文中の f の式をそのままにして定義域だけ変えたものも同じ f で表わしてしまった．$(0,3\pi/2)\times(-1,1)$, $(-\pi,2/\pi)\times(-1,1)$ は開集合であるから，多様体の二番目の定義 (5/18 の定理 (1)) により，それぞれの写像 (正確には，それを U_1, U_2 への写像と思ったもの) の微分が単射であることを示せば M が多様体であることが従う．

(ここで，Step 1 が示されていないと，$M\cap U_1$, $M\cap U_2$ に f の像以外の点が入っている可能性があり，多様体の定義の中にある条件が満たされないかもしれない．)

二つの f の式は全く同じであるから，微分の計算は全く同じである．計算してみると

$$\frac{\partial f}{\partial u}=2\begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-\frac12\cos(-u/2)\cos u-\sin(-u/2)\sin u\\ -\frac12\cos(-u/2)\sin u+\sin(-u/2)\cos u\\ \frac12\sin(-u/2)\end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\begin{pmatrix}\sin(-u/2)\cos u\\ \sin(-u/2)\sin u\\ \cos(-u/2)\end{pmatrix}$$

となる. f の微分が単射である必要十分条件は, ベクトル積 $\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$ が 0 でないことである.

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v} = 2 \begin{pmatrix} \cos(-u/2)\cos u \\ \cos(-u/2)\sin u \\ \sin(-u/2) \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(-u/2)\cos u - \sin(-u/2)\sin u \\ -\frac{1}{2}\cos(-u/2)\sin u + \sin(-u/2)\cos u \\ \frac{1}{2}\sin(-u/2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin(-u/2)\cos u \\ \sin(-u/2)\sin u \\ \cos(-u/2) \end{pmatrix}$$

となる. 第一項は長さが 2 に等しく, 第二項の長さは

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos(-u/2)\cos u - \sin(-u/2)\sin u \\ -\frac{1}{2}\cos(-u/2)\sin u + \sin(-u/2)\cos u \\ \frac{1}{2}\sin(-u/2) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \sin^2(-u/2)} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

であることに注意すれば, ベクトル積 $\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$ が 0 でないことが分かる.

注意. (1) ベクトル積を使わなくても小行列式を使って階数 2 であることも容易に示せる.
(2) Step 1 の議論が省略されていても正解として採点した.

問題 3. 解析の教科書にある Lagrange の未定乗数法の証明では, 多様体の言葉を用いずに, その代わりに陰関数定理を用いて同等の議論が与えられている. ここでは多様体の言葉を使って証明する.

まず, M の x における接空間 T_xM が

$$\mathrm{Ker}\, DF(x) = \{v \in \mathbf{R}^n \mid DF(x)v = 0\} = \{v \in \mathbf{R}^n \mid v \perp \left(\tfrac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \tfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)\}$$

であることに注意する.

f の M への制限が x で最大値を取ることから, 6/1 の授業でやった定理により x における微分 $df_x \colon T_xM \to \mathbf{R}$ は 0 である. 微分の定義に戻ると, f を $\mathbf{R}^n$ 上の関数と思って微分したもの $Df(x)$ を接空間 T_xM に制限したものが df_x である. したがって $df_x = 0$ は, $v \in T_xM \Longrightarrow Df(x)v = 0$ と言うことであり, 上の T_xM の記述とあわせると

$$v \perp \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) \Longrightarrow v \perp \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

となる. よって $Df(x)$ は $DF(x)$ の定数倍である.

注意. 陰関数定理を用いて $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ と書ける, として議論を進めているものがいたが, $\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$ のときは, その様に書けるとは保証されない. 仮定から, ある k について $\frac{\partial F}{\partial x_k} \neq 0$ となるので, $x_k = g(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ と書ける, と議論すれば正しい.

問題 4. (1) $\widetilde{f}$ が北極の近傍で C^∞ 級であることを証明すればよい. $\varphi' \colon S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \to \mathbf{C}$ を南極からの直交射影とする. すなわち

$$\varphi'(a,b,c) = \frac{a}{1+c} + i\frac{b}{1+c}$$

である. このとき $\widetilde{f} \circ \varphi'^{-1}$ が $\mathbf{C}$ から $\mathbf{R}^3$ への C^∞ 級写像であることを言えばよい.

$(a,b,c) \in S^2$ が北極でも南極でもないとし, $\varphi(a,b,c) = z$, $\varphi'(a,b,c) = z'$ とすると, 容易に分かるように $z' = 1/\overline{z}$ の関係にある. ただし $\overline{z}$ は z の共役複素数である. したがって $z' \neq 0$, すなわち $\varphi'^{-1}(z')$ が北極でないとき

$$\widetilde{f} \circ \varphi'^{-1}(z') = \varphi^{-1} \circ f(\frac{1}{\overline{z'}}) = \varphi^{-1}\left(a_n \left(\frac{1}{\overline{z'}}\right)^n + \cdots + a_0\right)$$

となる．ここで

$$\varphi^{-1}(w) = \left(\frac{2\operatorname{Re} w}{1+|w|^2}, \frac{2\operatorname{Im} w}{1+|w|^2}, \frac{|w|^2-1}{1+|w|^2} \right)$$

に $w = a_n \left(\frac{1}{\overline{z'}}\right)^n + \cdots + a_0$ を代入して，$z' \to 0$ の極限を考えると，$w \to \infty$ であることから，$\varphi^{-1}(w) \to (0,0,-1)$ となることが分かる．よって $\widetilde{f}$ は北極でも連続になる．したがって z' が 0 に十分近いときには $\widetilde{f} \circ \varphi'^{-1}(z')$ は南極とは異なる点であり，$\varphi' \circ \widetilde{f} \circ \varphi'^{-1}(z')$ が定義される．

すると

$$\varphi' \circ \widetilde{f} \circ \varphi'^{-1}(z') = \varphi' \circ \varphi^{-1} \left(a_n \left(\frac{1}{\overline{z'}} \right)^n + \cdots + a_0 \right) = \frac{z'^n}{\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z' + \cdots + \overline{a_0} z'^n}$$

となる．$a_n \neq 0$ より $z' = 0$ のときに分母は 0 にならず，$z' = 0$ でも成立する．さらに $z' = 0$ で C^∞ 級であることも同時に分かる．

(2) 代数学の基本定理のときに授業でやった計算を思い出すと，$\widetilde{f}$ が $(0,0,-1)$ で微分が同型でないための必要十分条件は，

$$\left. \frac{d}{dz'} \left(\frac{z'^n}{\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z' + \cdots + \overline{a_0} z'^n} \right) \right|_{z'=0} = 0$$

となることである．微分を計算してみると，

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz'} \left(\frac{z'^n}{\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z' + \cdots + \overline{a_0} z'^n} \right) \\ =& \frac{n z'^{n-1} \left(\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z' + \cdots + \overline{a_0} z'^n \right) - z'^n \left(\overline{a_{n-1}} + \cdots + n \overline{a_0} z'^{n-1} \right)}{\left(\overline{a_n} + \overline{a_{n-1}} z' + \cdots + \overline{a_0} z'^n \right)^2} \end{aligned}$$

であるから，$z' = 0$ で 0 となる必要十分条件は $n \neq 1$ である．