幾何学I 追試問題

担当: 中島 啓

2001年9月28日(金) 10:30〜12:00

問題 1. 逆関数定理を用いて次の陰関数定理を証明せよ.

陰関数定理. U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし, $f\colon U \to \mathbf{R}^m$ を C^∞ 級写像とする. 点 a は U に属すとし, $f(a) = 0$ と仮定する. a での f の微分 $Df(a)\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が全射であれば, a を含む開集合 $V \subset U$, 0 を含む $\mathbf{R}^n$ の開集合 W, 及び C^∞ 級微分同相写像 $F\colon W \to V$ が存在し, すべての $(t_1, \dots, t_n) \in W$ に対して

$$f \circ F(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_m)$$

となる.

問題 2. $\mathbf{R}^3$ の点の座標を (x, y, z) で表すことにする. yz 平面 (すなわち $x = 0$) 内の円 $(y-2)^2 + z^2 = 1$ を z 軸の周りに回転させてできる図形を M とする. このとき M が $\mathbf{R}^3$ の部分多様体 (授業では単に多様体と呼んだ) であることを証明せよ.

問題 3. $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を C^∞ 級関数とし, M をそのグラフ, すなわち

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n+1} \mid y = F(x)\}$$

とする. M 上の関数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ を $f(x, y) = y$ で定義する. このとき,

(1) 点 (x, y) における M の接空間 $T_{(x,y)}M$ を求めよ.

(2) f の臨界点, すなわち f の微分 $df_{(x,y)}\colon T_{(x,y)}M \to \mathbf{R}$ が 0 になる点をすべて求めよ.