幾何学IIテストの解答と講評

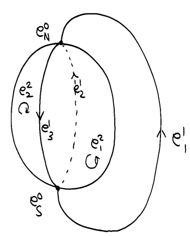
担当: 中島 啓

2007年2月9日(金)

解答 1. 多様体であること, 向きづけられていること, 有限な good cover を持つことを忘れずに書くこと.

解答 2. 1月10日の小テストの**問題 1** の通り. 何人かの人は気付いていたが, 授業でやらなかった簡約ホモロジーに関する Mayer-Vietoris 完全列を使うと, 場合分けをする必要がなくなる. ただし, 厳密にいうと, Mayer-Vietoris 完全列の証明をもう一回見直して, 簡約ホモロジーでも全く同様に成立することをチェックする必要がある. この部分については, 何も書いていなくても OK とした.

解答 3. (1) X を二つに分け, Mayer-Vietoris を使っても容易にできるが, 次のように CW 複体の構造を入れて計算する.



$$\partial e_1^2 = \partial e_2^2 = e_2^1 + e_3^1$$
$$\partial e_1^1 = \partial e_2^1 = -\partial e_3^1 = e_N^0 - e_S^0$$

であるから, $H_q(X) = \mathbf{Z}$ $(q = 0, 1, 2)$, $= 0$ (q その他) が従う.

CW 複体の定義を理解せず, 変な分け方をして CW 複体のように計算して間違っているものが何人か見られた.

(2) 二つの S^1 の管状近傍 U を取る. $Y \simeq \mathbf{R}^3 \setminus U$ (ホモトピー同値) である. $\mathbf{R}^3 = Y \cup U$ について, Mayer-Vietoris 完全列を用いると, $H_q(\mathbf{R}^2) = 0$ $(q \geq 1)$ から, $H_q(Y) \oplus H_q(U) \cong H_q(Y \cap U)$ $(q \geq 1)$ が分かる. $Y \cap U$ は二つのトーラスの非交和とホモトピー同値である. よって

$$H_q(Y \cap U) = \begin{cases} \mathbf{Z}^{\oplus 2} & (q = 2) \\ \mathbf{Z}^{\oplus 4} & (q = 1) \\ 0 & (q \geq 3) \end{cases}$$

となる．(証明略) また, U は, 二つの S^1 の非交和とホモトピー同値である．よって,

$$H_q(U) = \begin{cases} \mathbf{Z}^{\oplus 2} & (q = 1) \\ 0 & (q \geq 2) \end{cases}$$

となる．(証明略)

したがって, (厳密にはアーベル群の直和分解の一意性),

$$H_q(Y) = \begin{cases} \mathbf{Z}^{\oplus 2} & (q = 1, 2) \\ 0 & (q \geq 3) \end{cases}$$

となる．また, Y は弧状連結であるから, $H_0(Y) \cong \mathbf{Z}$ である．(もちろん, Mayer-Vietoris 完全列をきちんと追ってもチェックできる.)

S^1 を一つずつ抜いて, 二段階で計算しているものが何人かいたが, 二段階目で $\mathbf{R}^3 \setminus S^1$ のホモロジーが, あるために完全列だけからはすぐには, $H_q(Y)$ が計算できず, きちんと写像を追う必要が出てくる．そこまできちんとできているものは少なかった.

答案を数学事務室 (理学部 6 号館 6F, 3 月途中からは, 3 号館 1F) で返却するので, 受け取ること．採点に異議のあるものは申し出ること．ただし, 採点に間違えがあったと認められる場合以外, 評価の変更は受け付けられない.